Олимп
Экономика

Всероссийская олимпиада школьников по экономике
2024/2025 год
Региональный этап
Олимпиада «Олимп.Экономика»
10 класс

Задания состоят из четырех частей. Первые три части–тестовые, к вопросам из них нужно привести только ответы. К заданиям четвертой части нужно привести развернутые решения.

Максимальное количество баллов — **100**. Продолжительность — **180** минут.

Часть 1

5 вопросов, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать единственно верный или наиболее полный ответ. Правильный ответ приносит **2 балла**.

1) В краткосрочном периоде максимальный объем производства фирмы, имеющей только один переменный фактор производства, может быть достигнут, если в при выбранном объёме использования данного фактора:

1) Его предельная производительность является максимальной.
2) Достигается его наибольшая средняя производительность.
3) Предельная производительность фактора равна нулю
4) Средний продукт данного фактора выше предельного продукта

Решение

3

2) В точке рыночного равновесия эластичность спроса по цене по модулю превышает эластичность предложения по цене. Предположим, что функции спроса и предложения - линейные. Правительство вводит потоварный налог t на единицу продукции, который платят продавцы; после введения данного налога равновесный объём продаж остаётся положительным. Каким образом распределится налоговое бремя между продавцами и покупателями?

1) На покупателей ляжет относительно большее налоговое бремя
2) На продавцов ляжет относительно большее налоговое бремя
3) Налоговое бремя распределится поровну между продавцами и покупателями
4) Распределение налогового бремени зависит от величины t

Решение

2

3) Чему равнялось минимальное значение ключевой ставки Банка России в 2024 году?

1) 14% 2) 15% 3) 16% 4) 18%

Решение

3

4) На некотором совершенно конкурентном рынке предложение абсолютно неэластично по цене. При введении потоварной субсидии на производителя продаваемое на рынке количество:

1) Увеличится
2) Уменьшится
3) Не изменится
4) Может как вырасти, так и уменьшиться; определённо сказать нельзя.

Решение

3

5) Бескупонная облигация номиналом 25 денежных единиц (д.е.) со сроком погашения через 2 года сейчас стоит 16 д.е.. Сколько бы денежных единиц стоила данная облигация, если бы ее срок погашения был бы 1 год при том же номинале? Считайте, что ставка процента неизменна во времени

1) 19 2) 20 3) 20,5 4) 22

Решение

2

Часть 2

5 вопросов, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать все верные. Правильным ответом считается полное совпадение выбранного множества вариантов с ключом. Правильный ответ приносит **3 балла**.

6) В каком статусе пребывает студент магистратуры, официально работающий в консалтинговой фирме, если по выходным он подрабатывает репетиторством, получая за это вознаграждение «в конверте».

1) Занятый
2) Безработный
3) Гражданин в трудоспособном возрасте
4) Экономически неактивный

Решение

13

7) Фирма Олимп работает на совершенно конкурентном рынке и максимизирует прибыль в долгосрочном равновесии на данном рынке; все факторы производства фирмы переменные. В 2024 году фирма произвела 50 единиц продукции и продала их по цене 10. Можно утверждать, что:
1) $AC(50) = 10$
2) $MC(50) = 10$
3) $MC(50) = AVC(50)$
4) $MR(50) = 10$

Решение

1234

8) Выберите все неверные утверждения:
1) С ростом оплаты труда снижается альтернативная стоимость свободного от работы времени.
2) Если полезность одного потребителя выше полезности второго, то нельзя сделать вывод о том, что первый зарабатывает больше второго.
3) Единицы измерения полезности - всегда денежные единицы.
4) Если товар A - инфериорный товар, то при росте дохода потребителя (при прочих равных условиях) его расходы на приобретение товара A увеличатся.

Решение

134

9) Страна X - малая открытая экономика; функция внутреннего спроса в ней имеет отрицательный наклон, а функция предложения - положительный наклон. Если X - импортер товара x и объём продаж отечественных фирм положителен, то при увеличении мировой цены x:
1) X может стать экспортером x
2) Благосостояние потребителей страны X увеличится
3) Благосостояние производителей страны X увеличится
4) Суммарное благосостояние потребителей и производителей страны X не изменится

Решение

13

10) Выберите верные утверждения:

1) Если в январе уровень инфляции в месячном исчислении составил 12%, в феврале 9%, то в целом за два месяца уровень цен вырос на 21%.
2) Если инфляция в стране составила 10%, это означает, что каждый товар подорожал на 10%.
3) Если уровень цен в данном году ниже, чем в базовом, то дефлятор ВВП больше 1.
4) Если за первый год покупательная способность денег упала на треть, а за второй - выросла на четверть, то в целом за два года цены выросли в 1,2 раза.

Решение

4

Часть 3

5 вопросов с открытым ответом. В этой части будут засчитаны все правильные по смыслу ответы, в том числе ответы с соответствующими предлогами и единицами измерения или без них. Правильный ответ приносит **3 балла**.

11) Николай потребляет только два блага - кофе и конфеты, причем может потреблять их только так, чтобы на чашку кофе приходилось три конфеты. Цена чашки кофе - 9, а цена конфеты - 2. Доход Николая составляет 180. Правительство ввело 50%-й налог на покупку конфеты. Определите, на сколько уменьшится количество потребляемых Николаем чашек кофе.

Решение

2

12) На рынке совершенной конкуренции действуют фирмы, имеющие одинаковые функции средних издержек $AC = 10 + 5(Q - 5)^2$. Спрос на продукцию отрасли описывается функцией $Q_d = 1000 - 5P$. Определите, какое число фирм останется в отрасли в долгосрочном периоде.

Решение

190

13) Функция спроса на продукцию монополиста имеет вид: $P = 100/Q$ при $Q > 0$; при нулевом выпуске фирма получает нулевую выручку. При этом продавать монополист может только целое количество продукции, а про издержки известно, что они строго возрастают по Q. Найдите оптимальный выпуск монополиста.

Решение

0

14) Спрос на рынке завтраков задается функцией $Q_d = 200 - 2P$. Завтраки продают две фирмы, которые одновременно и независимо друг от друга выбирают количество завтраков, которое будут продавать. Предельные издержки каждой фирмы постоянны и равны A, фиксированные издержки отсутствуют. Потери общественного благосостояния по сравнению с совершенно конкурентным равновесием на данном рынке равны 900. Найдите A.

Решение

19

15) Вася любит смотреть фильмы (x) в кинотеатре и есть попкорн (y). Полезность Васи задается функцией: $U_i = 10x_i + 16y_i - x_i^2 - 4y_i^2$, где i - месяц, в котором он посмотрел фильм и съел попкорн. В декабре у Васи было 500 денежных единиц на кино и попкорн, а в январе - 400. Оперделите, на сколько изменилась максимальная полезность Васи в январе по сравнению со значением в декабре, если и в декабре, и в январе билет на один фильм стоит 40 денежных единиц, а цена попкорна равна 30.

Решение

0

Часть 4

3 задачи, полное решение каждой из которых приносит **20 баллов**.

Задача 1

Предприниматель имеет 3 предприятия, на которых он производит товары x и y. Рассмотрим из КПВ:

$$y_1 = 16 - x^2, \quad y_2 = 400 - x, \quad y_3 = 12 - x$$

На мировом рынке цены на товары составляют: $p_x = 3$, $p_y = 4$. Жители страны потребляют товары x и y только в комплектах, где x в 2 раза больше, чем y.

а) Сколько всего товара y потребят в стране A?

б) Пусть цены на товары p_x и p_y заданы как параметры. Выведите, сколько будет потребляться каждого товара при всех значениях p_x и p_y.

Решение

$y_1 = 16 - x^2$ $\qquad \frac{P_x}{P_y} = \frac{3}{4}.$

$y_2 = 400 - x$

$y_3 = 12 - x$

а) Сложим наши КПВ: сначала сложим вторую с третьей, потом их сумму с первой.

Т.к. y_2 и y_3 – линейные функции с один. наклоном $\Longrightarrow$ их сумма будет просто линейная функция с таким же наклоном, т.е.

$y_{сум} = 412 - x.$

Теперь осталось сложить $y_1 = 16 - x^2$ с $y_{сум} = 412 - x.$

$y = y_1 + y_{сум} = 412 - x_c + 16 - x_1^2 = 412 - (x - x_1) + 16 - x_1^2 = 428 - x + x_1 - x_1^2 \longrightarrow \underset{0 \le x_1 \le 4}{MAX}$

$\begin{cases} x_1^* = \frac{1}{2} \\ x_c^* = x - \frac{1}{2} \end{cases}$

ЭПВРан

Проверим ограничения на x_c:

$0 \le x_c \le 412.$

- $x - \frac{1}{2} \ge 0 \Longrightarrow x \ge \frac{1}{2}$
- $x - \frac{1}{2} \le 412 \Longrightarrow x \le 412{,}5$

Т.е. запишем наши оптимумы:

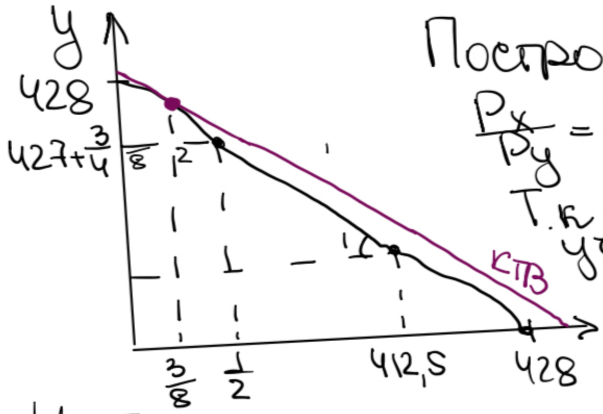
$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_c = x - \frac{1}{2} \end{cases}, \ x \in [\frac{1}{2}; 412{,}5].$

$\begin{cases} x_1 = x \\ x_c = 0 \end{cases}, \ x \le \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x_1 = x - 412 \\ x_c = 412 \end{cases}, \ x \in [412{,}5; 428].$

Запишем итоговую КПВ:

$y = \begin{cases} 428 - x^2, & x \le \frac{1}{2} \\ 428 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - x = 428 + \frac{1}{4} - x, & x \in [\frac{1}{2}; 412{,}5] \\ 16 - (x - 412)^2, & x \in [412{,}5; 428]. \end{cases}$



Построим КТВ:

$\frac{P_x}{P_y} = \frac{3}{4}$.

Т.к. наклон среднего участка равен 1 ($\frac{3}{4} < 1$) $\Longrightarrow$ КТВ косается КПВ на 1 участке.

Найдем точку касания:

$2x = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{8}$ (под ограничение 1 участка подходит) $\Rightarrow y = \frac{27383}{64}$.

Тогда КТВ: $y = a - bx$ Подставим точку касания и наклон:

$\frac{27383}{64} = a - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} \Longrightarrow a = \frac{27401}{64}$.

Т.е. КТВ: $y = \frac{27401}{64} - \frac{3}{4}x$.

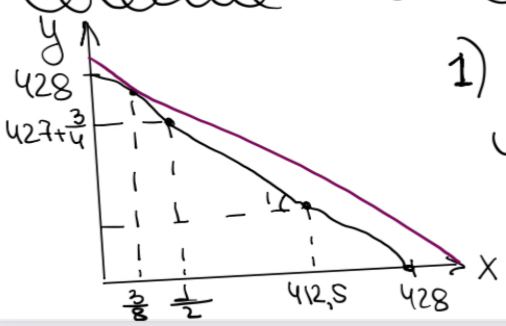
По усл. в комплекте x в 2 раза больше y $\Rightarrow$ $y = \frac{x}{2}$. – кривая комплектов.

Найдем точку пересечения кривой комплектов с КТВ:

$\frac{x}{2} = \frac{27401}{64} - \frac{3}{4}x \Longrightarrow x = \frac{27401}{80}$

Тогда $y^* = \frac{27401}{64} - \frac{3}{4} \cdot \frac{27401}{80} = \frac{27601}{160} =$ 172,50625

b) $\frac{P_x}{P_y}$ Нам нужно вывести КТВ при каждом $\frac{P_x}{P_y}$ и найти пересечение с кривой комплектов.



1) если $\frac{P_x}{P_y} < 1$, то КТВ косается КПВ на 1 участке.

$2x = \frac{P_x}{P_y}$

$x = \frac{P_x}{2P_y} \Longrightarrow y = 428 - \frac{P_x^2}{4P_y^2}$.

КПВ: $428 - \frac{P_x^2}{4P_y^2} = a - \frac{P_x}{P_y}\cdot\frac{P_x}{2P_y}$

$\Longrightarrow a = 428 - \frac{P_x^2}{4P_y^2} + \frac{P_x^2}{2P_y^2} = 428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2}$.

$y = 428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2} - \frac{P_x}{P_y}\cdot x$.

Тогда оптимум:

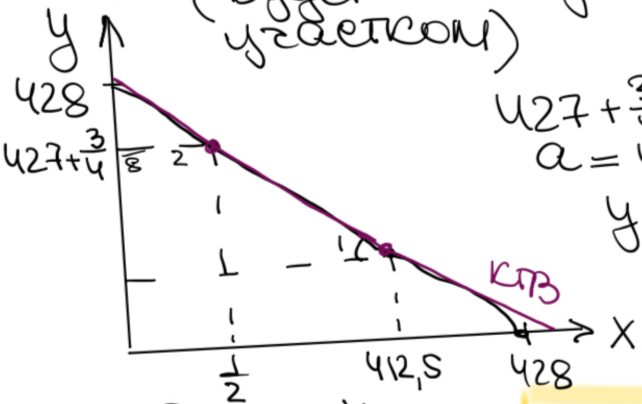
$428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2} - \frac{P_x}{P_y}\cdot x = \frac{x}{2} \Longrightarrow x = \frac{428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2}}{\left(\frac{P_x}{P_y} + \frac{1}{2}\right)}$.

$y = 428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2} - \frac{P_x}{P_y}\cdot\left(\frac{428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2}}{\frac{P_x}{P_y} + \frac{1}{2}}\right) = \left(428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2}\right)\left(1 - \frac{P_x}{P_y\left(\frac{P_x}{P_y} + \frac{1}{2}\right)}\right)$.

Т.е. если $\frac{P_x}{P_y} < 1$, то

$x = \frac{428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2}}{\left(\frac{P_x}{P_y} + \frac{1}{2}\right)}$; $y = \left(428 + \frac{P_x^2}{4P_y^2}\right)\left(1 - \frac{P_x}{P_y\left(\frac{P_x}{P_y} + \frac{1}{2}\right)}\right)$

2) если $\frac{P_x}{P_y} = 1$, то КПВ выглядит так: (будет совпадать со вторым участком)



$427 + \frac{3}{4} = a - 1\cdot\frac{1}{2}$

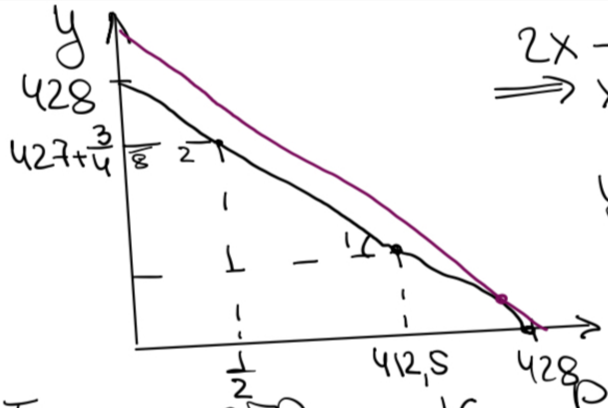
$a = 427 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 427 + \frac{5}{4}$.

$y = 427 + \frac{5}{4} - x$.

$427 + \frac{5}{4} - x = \frac{x}{2} \Longrightarrow$ $x = \frac{427 + \frac{5}{4}}{1 + \frac{1}{2}}$; $y = \left(427 + \frac{5}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{\frac{3}{2}}\right)$

если $\frac{P_x}{P_y} = 1$.

если $\frac{P_x}{P_y} > 1$, то касание КПВ будет на 3 участке:



$$2x - 824 = \frac{P_x}{P_y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{824 + \frac{P_x}{P_y}}{2} = 412 + \frac{P_x}{2P_y}.$$

$$y = 16 - \left(412 + \frac{P_x}{2P_y} - 412\right)^2 = 16 - \frac{P_x^2}{4P_y^2}$$

Тогда КПВ: $16 - \frac{P_x^2}{4P_y^2} = a - \frac{P_x}{P_y}\cdot\left(412 + \frac{P_x}{2P_y}\right)$

$$\Rightarrow a = 16 - \frac{P_x^2}{4P_y^2} + 412\frac{P_x}{P_y} + \frac{P_x^2}{2P_y^2} = 16 + 412\frac{P_x}{P_y} + \frac{P_x^2}{4P_y^2}.$$

$$y = 16 + 412\frac{P_x}{P_y} + \frac{P_x^2}{4P_y^2} - \frac{P_x}{P_y}\cdot x.$$

Тогда оптимум:

$$16 + 412\frac{P_x}{P_y} + \frac{P_x^2}{4P_y^2} - \frac{P_x}{P_y}\cdot x = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{16 + 412\frac{P_x}{P_y} + \frac{P_x^2}{4P_y^2}}{\frac{1}{2} + \frac{P_x}{P_y}}$$

$$y = \left(16 + 412\frac{P_x}{P_y} + \frac{P_x^2}{4P_y^2}\right)\left(1 - \frac{P_x}{P_y\left(\frac{1}{2} + \frac{P_x}{P_y}\right)}\right).$$

если $\frac{P_x}{P_y} > 2$.

Задача 2

В городе N 30 фирм производят шоколадные конфеты и продают их на совершенно конкурентном рынке. Фирма использует единственный фактор производства - труд. Производственная функция для каждой фирмы выглядит следующим образом: $q = \sqrt{L}$, где L - количество работников, нанятых данной фирмой. L может быть нецелым числом, так как фирма может нанимать людей на неполный рабочий день. Заработная плата фиксирована и равна 15.

Правительство города N поддерживает малый бизнес (фирмы, в которых работает не больше 36 человек), поэтому не облагает его налогом. Фирмы, которые не считаются малым бизнесом, облагаются налогом, налоговые сборы равны: $Tx = 5q^2$, где q - количество, произведенное данной фирмой. Если фирме безразлично между двумя количествами работников, она выбирает меньшее из них.

а) *(14 баллов)* Выведите функцию предложения шоколадных конфет в городе N.

б) *(2 балла)* Найдите равновесие на рынке шоколадных конфет, если спрос на них задается функцией: $Q_d = 700 - P$.

в) *(4 баллов)* Если Вы правильно решили предыдущий пункт, то у Вас получилось, что на рынке нет представителей малого бизнеса. Правительство недовольно данной ситуацией и решило в дополнение к существующим мерам ввести такой минимальный потоварный налог на потребителей, чтобы продавались только изделия малого бизнеса. Найдите, какой налог нужно ввести правительству, чтобы достичь данной цели.

Решение

а) Выведем предложение одной фирмы, ее прибыль при отсутствии налога:

$\pi = Pq - wL = P\sqrt{L} - 15L$ -> max по $\sqrt{L}$, парабола ветвями вниз [2 балла]

$\sqrt{L} = \frac{P}{30}$ [1 балл], $L \leqslant 36 \Rightarrow P \leqslant 180$ [2 балла]

При $P \leqslant 180$ фирма будет "малым бизнесом". Посмотрим на ситуацию с налогом:

заметим, что можно переписать $Tx = 5L$ (можно наоборот все переписать через q),

$\pi = P\sqrt{L} - 15L - 5L = P\sqrt{L} - 20L$ -> max по $\sqrt{L}$, парабола ветвями вниз [2 балла]

$\sqrt{L} = \frac{P}{40}$ [1 балл]

Посмотрим, когда фирме выгодно становится "крупным бизнесом":

$\pi(L = 36) \leqslant \pi(L = \frac{P^2}{1600})$ [2 балла]

$P * 6 - 15 * 36 \leqslant P * \frac{P}{40} - 20 * \frac{P^2}{1600}$

$P \geqslant 360$ [1 балл]

$$q_i^s = \begin{cases} \frac{P}{30}, P \leqslant 180 \\ 6, 180 \leqslant P < 360 \\ \frac{P}{40}, P \geqslant 360 \end{cases} \quad [1 \text{ балл}]$$

$$Q^s = \begin{cases} P, P \leqslant 180 \\ 180, 180 < P \leqslant 360 \\ \frac{3P}{4}, P > 360 \end{cases} \quad [2 \text{ балла}]$$

б) Предложение не убывает, спрос убывает, [1 балл, можно нарисовать на графике] одно пересечение при $P = 400, Q = 300$ [1 балл]

в) Введение потоварного налога при линейном спросе "сдвигает"кривую спроса параллельно вниз, значит, нужно найти такой налог, при котором в равновесии будет продаваться $Q = 180$. [2 балла]

$180 = 700 - 360 - t$ [1 балл]

$t = 160$[1 балл]

Задача 3

Иван Иванович на маленьком кирпичном заводике производит кирпичи. Производственная функция фирмы имеет вид:

$$Q = \max\{KL - L, 0\}$$

где Q - количество произведенных кирпичей, K - объем капитала, L - объем труда. И труд, и капитал приобретается на совершенно конкурентном рынке по ценам: $P_K = 1, P_L = 1$.

На рынке продажи кирпичей фирма является монополистом. Функция спроса имеет вид: $Q = \frac{a^2}{(P+1)^2}$, где $a > 0$ - некоторый параметр, P - цена товара.

Фирма знает функцию спроса и максимизирует свою прибыль.

а) *(8 баллов)* Выведите функцию издержек фирмы $TC(Q)$.

б) *(6 баллов)* Найдите оптимальный объем производства $Q^*(a)$ при каждом значении параметра a.

в) *(6 баллов)* Фирме предлагают модернизировать завод за S денежных единиц. В случае модернизации производственная функция изменится на следующую: $Q = 2\sqrt{KL}$. Для каждого значения параметра a найдите, какую максимальную сумму фирма готова заплатить за модернизацию. Проиллюстрируйте графически функцию $S_{max}(a)$, где $S_{max}(a_0)$ - является данной максимальной суммой при $a = a_0$.

Решение

а) 1. Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} Q = \max\{KL - L, 0\} \\ TC = P_k \cdot K + P_l \cdot L \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = \max\{KL - L, 0\} \ \rightarrow \ \max(K, L) \\ TC = K + L \end{cases}$$

2. Рассмотрим случай $Q \geqslant 0$:

$$\begin{cases} Q = KL - L \ \rightarrow \ \max(K, L), \quad Q \geqslant 0 \\ TC = K + L \end{cases}$$

$$Q = (TC - L) \cdot L - L = (TC - 1) \cdot L - L^2 \rightarrow \max \quad \text{(Это парабола ветвями вниз)}$$

$$L^* = \begin{cases} \frac{TC-1}{2} & \frac{TC-1}{2} \geqslant 0 \\ 0 & \frac{TC-1}{2} < 0 \end{cases} \quad \textbf{[2 балл]}$$

$$L^* = \begin{cases} \frac{TC-1}{2} & TC \geqslant 1 \\ 0 & TC < 1 \end{cases}$$

$$\text{Случай } TC \geqslant 1: \quad K = \frac{TC+1}{2} \geqslant 0 \ : \quad Q = \left(\frac{TC-1}{2}\right)^2 \quad \textbf{[2 балл]}$$

$$\text{Так как все величины положительные:} \quad \sqrt{Q} = \frac{TC-1}{2}$$

$$TC = 2\sqrt{Q} + 1, \quad TC = 2\sqrt{Q} + 1 \geqslant 1$$

$$TC = 2\sqrt{Q} + 1, \quad Q \geqslant 0$$

Случай $TC < 1$: $\quad Q = 0 \quad K \to \min, \quad K^* = 0, \quad TC = 0$ **[2 балл]**

3. Выпишем функцию общих издержек:

$$TC = \begin{cases} 2\sqrt{Q} + 1 & Q > 0 \\ 0 & Q = 0 \end{cases}, \quad \textbf{[2 балл]}$$

Ответ: $TC = \begin{cases} 2\sqrt{Q} + 1 & Q > 0 \\ 0 & Q = 0 \end{cases}$

б) 1. Выразим $P(Q, a)$

$$\begin{cases} a > 0 \\ Q = \frac{a^2}{(P+1)^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{Q} = \frac{a}{P+1}$$

$$\text{При } P \neq -1 : \; Q > 0 : \quad P + 1 = \frac{a}{\sqrt{Q}}$$

$$P(Q, a) = \frac{a}{\sqrt{Q}} - 1, \quad \textbf{[1 балл]}$$

2. Промаксимизируем прибыль монополиста при $Q > 0$

$$\Pi = P(Q, a) \cdot Q - TC(Q) = \left(\frac{a}{\sqrt{Q}} - 1\right) Q - 2\sqrt{Q} - 1 = (a - 2)\sqrt{Q} - Q - 1$$

$$t = \sqrt{Q}, \; t > 0$$

$$\Pi = (a-2)t - t^2 - 1 \to \max(t) \;\; \text{Это парабола ветвями вниз}$$

$$t^* = \begin{cases} \frac{a-2}{2} & a \geqslant 2 \\ 0 & a < 2 \end{cases}, \quad Q^* = \begin{cases} \frac{(a-2)^2}{4} & a \geqslant 2 \\ 0 & a < 2 \end{cases}$$

$$\Pi = \begin{cases} \frac{(a-2)^2}{4} - 1 & a \geqslant 2 \\ -1 & a < 2 \end{cases}, \quad \textbf{[3 балл]}$$

3. Если ничего не производим, прибыль равна 0

4. Для каждого a выберем, на каком участке оставаться, получим:

$$\Pi = \begin{cases} \frac{(a-2)^2}{4} - 1 & a \geqslant 4 \\ 0 & a < 4 \end{cases}$$

5. Выпишем Q, соответствующее каждому из участков:

$$Q = \begin{cases} 0 & a \leqslant 4 \\ \frac{a-2}{2} & a \geqslant 4 \end{cases}, \quad \textbf{[2 балл]}$$

в) 1. Выведем функцию издержек:

$$\begin{cases} Q = 2\sqrt{KL} \\ TC = K + L \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad Q = 2\sqrt{\frac{TC}{2} \cdot \frac{TC}{2}} = TC$$

$$TC = Q, \quad \textbf{[2 балл]}$$

2. Найдем прибыль в зависимости от a:

$$\Pi_2 = \left(\frac{a}{\sqrt{Q}} - 1\right) Q - Q = a\sqrt{Q} - 2Q \to \max(\sqrt{Q})$$

$$(\sqrt{Q})^* = \frac{a}{4}, \quad Q^* = \frac{a^2}{16}$$

$$\Pi_2 = \frac{a^2}{8}, \quad \textbf{[2 балл]}$$

3. Найдем $S_{max} = \max\{\Pi_2 - \Pi, 0\}$:

(a) Рассмотрим $0 \leqslant a \leqslant 4$:

$$S_{max} = \frac{a^2}{8}$$

(b) Рассмотрим $a > 4$:

$$S_{max} = \frac{a^2}{8} - \frac{(a-2)^2}{4} + 1 = \frac{a^2 - 2(a^2 - 4a + 4) + 8}{8} = \frac{8a - a^2}{8} = \frac{a(8-a)}{8}$$

$$\frac{a(8-a)}{8} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant a \leqslant 8, \quad \textbf{[2 балл]}$$

(c) На этом отрезке получаем:

$$S_{max} = \begin{cases} \frac{a(8-a)}{8} & 4 \leqslant a \leqslant 8 \\ 0 & a > 8 \end{cases}$$

Ответ: $S_{max}(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{8} & 0 \leqslant a \leqslant 4 \\ \frac{a(8-a)}{8} & 4 \leqslant a \leqslant 8 \\ 0 & a \geqslant 8 \end{cases}$