

Олимпиада имени С.И. Колокольникова

Заключительный этап

Тюмень, 2025

Первый тур



Олимпиада	7 класс
Дата написания	14 апреля 2025
Количество заданий	4
Сумма баллов	48
Время написания	240 минут

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов, а также цены во всех задачах бесконечно делимыми.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений.

Все общеизвестные факты, не следующие из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Задача 1. Кредитовать нельзя, запретить (12 баллов)

С 1 марта 2025 года у россиян появилась возможность воспользоваться самозапретом на кредит: каждый гражданин может оформить запрет на взятие потребительских кредитов (займов) в банках и микрофинансовых организациях. Самозапрет также можно оформить и на выдачу кредитных карт.

а) (3 балла) Парадоксальным образом, хотя запрет на выдачу кредитов ограничивает возможности людей, многие граждане прибегают к самозапрету. (За первые две недели самозапрет оформили более 6 миллионов россиян, 90% из которых воспользовались полным запретом на кредиты). Приведите два других примера из жизни, когда люди сознательно вводят какие-либо самоограничения.

б) (3 балла) По данным РБК в 2024 году более 70% от числа выданных кредитов пришлось на микрозаймы и кредиты на небольшие суммы. Чем для населения опасны данные кредиты?

в) (3 балла) Согласно статистическим данным самозапрет наиболее популярен у людей, чей возраст превышает 60 лет, при этом на данную группу населения приходится менее 5% выдаваемых кредитов. С чем может быть связана популярность самозапрета у данной группы населения?

г) (3 балла) Запрет не распространяется на некоторые виды кредитов, к таким относятся, например, ипотека и автокредитование. По какой причине данные виды кредитов могут не попадать под самозапрет?

Решение:

а) Существует много примеров, когда люди сознательно себя ограничивают для того, чтобы добиться лучшего результата. Ярким примером подобного поведения может послужить диета: люди ограничивают себя в еде, чтобы в итоге прийти в лучшее физическое состояние. Еще один яркий пример — функция ограничения экранного времени в телефоне или компьютере: люди сознательно вводят ограничение, чтобы проводить меньше времени в гаджетах.

б) Подобные кредиты и микрозаймы часто имеют высокий процент, а их доступность и легкость в получении может породить у людей стимулы к спонтанным покупкам и ненужным тратам. Эти факторы в совокупности приводят к тому, что население попадает в “долговую яму” — ситуацию, когда долги растут быстрее, чем человек их выплачивает.

в) Одна из главных причин внедрения возможности самозапрета на кредиты — распространение мошенничества. Мошенникам будет гораздо сложнее выманить у человека крупную сумму, если он не может брать кредит. При этом пенсионеры — наиболее уязвимая для мошенников группа населения, поэтому самозапрет пользуется у них такой популярностью.

г) Получение ипотеки, автокредита, поручительства — очень сложные операции, требующие большого количества документации и стартовых средств, поэтому человеку сложно принять такое решение спонтанно, сделать это без похода в банк, а значит, и мошенникам сложнее обмануть человека в таком случае, поэтому данные кредиты под самозапрет не попадают. Кроме того, в случае ипотеки или автокредита банк перечисляет деньги автосалону или застройщику, а зна-

чит, у человека, взявшего кредит, на руках будет автомобиль или квартира, что усложняет действия мошенников.

Схема проверки:

а) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:

- приведено верное решение с пояснением — **3 балла**
- приведен один обоснованный аргумент и один необоснованный — **2 балла**
- приведены два аргумента без обоснования — **1 балл**
- приведен один аргумент без обоснования — **0 баллов**
- приведены два схожих аргумента — **1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:

- приведено верное решение с пояснением — **3 балла**
- приведен верный аргумент, но допущена ошибка в логических заключениях — **2 балла**
- в ответе выбрано верное направление рассуждений, но логические заключения неверны — **1 балл**
- неверное решение — **0 баллов**.

в) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:

- приведено верное решение с пояснением — **3 балла**
- приведен верный аргумент, но допущена ошибка в логических заключениях — **2 балла**
- в ответе выбрано верное направление рассуждений, но логические заключения неверны — **1 балл**
- неверное решение — **0 баллов**.

г) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:

- приведено верное решение с пояснением — **3 балла**
- приведен верный аргумент, но допущена ошибка в логических заключениях — **2 балла**
- в ответе выбрано верное направление рассуждений, но логические заключения неверны — **1 балл**
- неверное решение — **0 баллов**
- приведен аргумент про важность ипотеки и автокредита для человека или общества — **1 балл**.

Задача 2. *Слишком полная занятость* (12 баллов)

В некоей стране спрос на труд описывается зависимостью $L_d = 45 - w - 40t$, где w – уровень зарплат в стране, t – уровень налогов, L_d – количество людей, которое хотят нанять фирмы. Предложение задано как $L_s = w - 4 - 20t$, где L_s – количество людей, готовых работать. Все люди, которых не устраивает зарплата и уровень налогов в стране, перестают искать работу.

а) (3 балла) Определите, какие зарплаты w установятся в стране в зависимости

от выбранного государством уровня налогов.

б) (3 балла) Государство установило $t_1 = 0,15$. К какому уровню зарплат w_1 придет экономика страны?

Как вы могли заметить, безработица на протяжении первых двух пунктов данной задачи была нулевой, что может не устраивать правительство. После того как в данной стране установился уровень зарплат, полученный вами в пункте **б)**, государство запретило изменение w в течение одного года. При этом увольнять и принимать новых работников разрешено (так же как и увольняться или устраиваться).

в) (3 балла) Государство хочет поднять уровень безработицы до размера естественной. Уровень безработицы определяется как $u = \frac{U}{L} \cdot 100\%$, где U – количество нетрудоустроенных, но заинтересованных в работе людей, а L – размер рабочей силы, то есть величина предложения труда в стране. Какой уровень t_2 следует установить государству, если уровень естественной безработицы равен $\frac{1}{15} \cdot 100\%$?

г) (3 балла) Почему нулевая безработица может вредить экономике? Если будет приведено больше одного аргумента, оцениваться будет первый.

Решение:

а) $L_d = 45 - w - 40t$ и $L_s = w - 4 - 20t$. Найдем равновесие при фиксированном t . $L_d = L_s$, то есть $45 - w - 40t = w - 4 - 20t \Rightarrow 49 - 20t = 2w \Rightarrow w(t) = 24,5 - 10t$.

Ответ: $w(t) = 24,5 - 10t$.

б) Подставим $t = 0,15$ и получим $w(0,15) = 24,5 - 10 \cdot 0,15 = 24,5 - 1,5 = 23$.

Ответ: $w = 23$.

в) $u = \frac{U}{L} \cdot 100\%$, но U – это количество безработных, то есть разница между теми, кто хочет работать и теми, кто работает $U = L_s - L_d$, а L – это количество заинтересованных в работе, то есть при $L_s - L_d > 0$, что точно верно, так как мы добиваемся определенной безработицы, $L = L_s$. Тогда $u = \frac{U}{L} \cdot 100\% = \frac{L_s - L_d}{L_s} \cdot 100\%$.

$100\% = \frac{(w - 4 - 20t) - (45 - w - 40t)}{w - 4 - 20t} \cdot 100\%$, но было зафиксировано $w = 23$. То есть $u = \frac{(w - 4 - 20t) - (45 - w - 40t)}{w - 4 - 20t} \cdot 100\% = \frac{(23 - 4 - 20t) - (45 - 23 - 40t)}{23 - 4 - 20t} \cdot 100\%$.

$100\% = \frac{(19 - 20t) - (22 - 40t)}{19 - 20t} \cdot 100\% = \frac{20t - 3}{19 - 20t} \cdot 100\% = \frac{100}{15}\%$. Переведем запись

из процентов в доли. Получаем $\frac{20t - 3}{19 - 20t} = \frac{1}{15} \Rightarrow 300t - 45 = 19 - 20t \Rightarrow 320t = 64 \Rightarrow t = 0,2$.

Ответ: $t_2 = 0,2$.

г) При нулевой безработице, к примеру, нет конкуренции за рабочие места, а значит, люди не будут повышать свою квалификацию, что будет негативно сказываться на технологическом прогрессе. В итоге страна будет отставать от других в технологическом плане и в будущем будет вынуждена покупать то, что не смогла создать сама.

Схема проверки:

- а) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:
- произведена попытка приравнять L_d и L_s — **1 балл**
 - найдена верная зависимость $w(t)$ — **2 балла**
 - не найдена явная зависимость, но есть связь между w и t , где каждая из переменных указана единожды — **1 балл**.
- б) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:
- получено правильное значение w — **3 балла**
 - получен ответ, но допущена незначительная арифметическая ошибка — **2 балла**.
 - получен ответ, но допущена значительная арифметическая ошибка — **1 балл**.
- в) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:
- получено правильное выражение для U — **1 балл**
 - найдена зависимость между u и t — **1 балл**
 - получен верный ответ — **1 балл**.
- г) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:
- приведен верный аргумент с корректным обоснованием — **3 балла**
 - приведен верный аргумент, но допущена логическая ошибка — **2 балла**.
 - в ответе выбрано верное направление рассуждений, но логические заключения неверны или отсутствуют — **1 балл**.

Задача 3. Футбольный менеджер*(12 баллов)*

Тренер ФК «Тюмень» собирает футбольную команду, чтобы выиграть чемпионат России. Он покупает игроков на три линии: нападение (F), полузащита (M), защита (D). Всего у тренера есть 1 миллиард рублей. Поскольку тренер очень умен, он смог высчитать зависимость числа забитых мячей (Z) от уровня игры нападения, полузащиты и защиты:

$$Z = 10F + 5M + 2D$$

Также он вычислил зависимость числа пропущенных мячей от этих показателей:

$$P = 100 - F - 6M - 10D$$

Тренер планирует покупать игроков из других футбольных клубов России. Один форвард стоит 200 млн. рублей (он увеличивает параметр F на 1), один полузащитник – 150 млн. рублей (он увеличивает параметр M на 1), один защитник стоит 100 млн. рублей (он увеличивает параметр D на 1). Количество футболистов может быть только целым.

а) (2 балла) Определите, как тренеру распределить деньги, чтобы максимизировать разницу между числом забитых и пропущенных мячей.

б) (4 балла) Размышляя над покупкой игроков согласно распределению из пункта **а)**, тренер ФК «Тюмень» выяснил, что у него окажется меньше 11 футболистов. Поняв свою ошибку, он решил пересмотреть свои планы и обратил внимание на рынок африканских футболистов. Один африканский футболист стоит 200000 \$ и усиливает свою линию на 0,1 (два африканских футболиста усилят свою линию на 0,2 и так далее...). Определите, каких футболистов теперь собирается купить тренер, если курс доллара равен 100 руб. При решении этого и следующих пунктов считайте, что в команде должно быть не менее 11 футболистов, но может быть и больше. Если в команде больше 11 игроков, то они по-прежнему улучшают показатели своих линий, так как являются запасными, которые позволяют отдыхать основным игрокам и тем самым повышают общую эффективность.

в) (6 баллов) Мысленно собрав новую команду, тренер ФК «Тюмень» снова нашел ошибку. Теперь его команда не сбалансирована. Подумав немного, он решил, что для лучшего результата ему нужны как минимум 3 защитника, 3 полузащитника и 1 нападающий, а также 1 вратарь, которого он смог «подписать» у ФК «Оренбург» за 50 млн. рублей. Определите, сколько футболистов купит тренер на каждую линию.

Решение:

а) Фактически функция полезности тренера $U = Z - P = 11F + 11M + 12D - 100$. Рассмотрим значение величины $\frac{MU}{P}$ (MU – величина, на которую увеличивается полезность при покупке игрока) для нападающих, полузащитников и защитников. (Данная величина показывает, какую прибавку к полезности будет прино-

силь миллион, потраченный на игрока. Таким образом, тренер будет покупать игрока той позиции, для которой данное значение наибольшее). Для нападающего: $\frac{MU_F}{P} = \frac{11}{200} = 0,055$. Для полузащитника: $\frac{MU_M}{P} = \frac{11}{150} = 0,073$. Для защитника: $\frac{MU_D}{P} = \frac{12}{100} = 0,12$. Таким образом, тренеру будет выгодно покупать защитников для максимизации своей функции полезности. За 1 млрд. рублей тренер сможет купить 10 защитников.

Ответ: $F = 0, M = 0, D = 10$.

б) Найдем цену африканского игрока в рублях. $200000\$ \cdot 100 = 20$ млн. рублей. $P = 20$. Так как покупка одного африканского защитника увеличивает полезность на 1,2, а покупка африканского полузащитника или нападающего увеличивает полезность на 1,1, то их цена одинакова, покупать африканских нападающих и полузащитников не имеет смысла. Теперь определим, что лучше: покупать африканского защитника или российского. Для этого найдем значение $\frac{MU}{P}$ для африканского защитника.

$\frac{MU_{\text{афр.}D}}{P} = \frac{1,2}{20} = 0,06$. Видим, что покупать российского защитника выгоднее, чем африканского, но так как тренеру требуется набрать больше 11 игроков, ему необходимо отказаться от одного российского защитника и купить 5 африканских защитников.

Ответ: 9 российских защитников и 5 африканских защитников.

в) Найдем величину $\frac{MU}{P}$ для нападающих и полузащитников из Африки. $\frac{MU_{\text{афр.}F}}{P} = \frac{MU_{\text{афр.}M}}{P} = \frac{1,1}{20} = 0,055$. Наиболее выгодно покупать российского защитника, на втором месте по выгоде покупка российского полузащитника, на третьем месте покупка африканского защитника. Наименее выгодно покупать африканских полузащитников и нападающих, а также российского нападающего. Начнем выбирать состав команды: так как для состава необходим 1 нападающий, то выберем африканского нападающего, так как выгода от его покупки такая же, как и при покупке российского нападающего, однако при этом освобождаются деньги для покупки более выгодных игроков. Покупка защитников более выгодна, чем покупка полузащитников, поэтому полузащитников в составе будет только трое.

Рассмотрим варианты покупки полузащитников:

1) Заметим, что при покупке трех российских полузащитников, они принесут прибавку к полезности $3 \cdot 11 = 33$, при этом мы потратим 450 млн. рублей.

2) При покупке двух российских полузащитников и одного африканского полузащитника мы получим прибавку к полезности $2 \cdot 11 + 1,1 = 23,1$, потратив при этом 320 млн рублей. При этом, по сравнению с первым случаем мы сможем купить одного российского защитника, что увеличит нашу полезность еще на 12 единиц.

3) При покупке одного российского полузащитника и двух африканских полу-

защитников прибавка к полезности составит $11 + 2 \cdot 1,1 = 13,2$, потратив при этом 190 млн. рублей. Так, по сравнению с первым случаем, у нас освободится бюджет для покупки двух российских и трех африканских защитников, что позволит увеличить нашу полезность еще на $12 \cdot 2 + 3 \cdot 1,2 = 27,6$.

4) При покупке трех африканских полузащитников мы получим прибавку к полезности $1,1 \cdot 3 = 3,3$, потратив при этом 60 млн. рублей. По сравнению с первым случаем мы сможем купить еще трех российских и четырех африканских защитников, что увеличит нашу полезность на $12 \cdot 3 + 4 \cdot 1,2 = 40,8$.

Видим, что наиболее выгодно покупать трех африканских полузащитников. При этом у нас остается $1000 - 50$ (покупка вратаря) - 60 (покупка полузащитников) - 20 (покупка нападающего) = 870 млн. рублей. На них мы купим российских защитников, потратив 800 млн. рублей, так как это наиболее выгодные для покупки футболисты, а на оставшиеся 70 млн. купим трех африканских защитников.

Ответ: вратарь, 3 африканских защитника, 8 российских защитников, 3 африканских полузащитника и 1 африканский нападающий.

Схема проверки:

а) Максимальная оценка за пункт — **2 балла**, из них:

- верно выведена функция полезности тренера — **1 балл**
- верно выведено, что оптимальной стратегией будет покупка только защитников — **1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**, из них:

- идея о том, что африканский защитник полезнее африканского полузащитника или нападающего — **2 балла**
- нахождение оптимального распределения — **4 балла**.

в) Максимальная оценка за пункт — **6 баллов**, из них:

- объяснено, почему мы покупаем африканского нападающего, а не русского — **1 балл**
- объяснено, каких полузащитников мы будем покупать (в случае полного и верного перебора — **3 балла**, если упущен какой-то вариант, то — **1 балл**, **3 балла** за другое верное объяснение)
- объяснено, почему мы будем покупать минимальное количество полузащитников и нападающих — **1 балл**
- найдено итоговое распределение — **1 балл**.

Задача 4. Знахарь и злой дух*(12 баллов)*

Знахарь Ефимыч может собирать грибы (x) и ягоды (y). Ефимыч знает, как грибы и ягоды нужны лесу, но при этом сам вынужден собирать их для своих лечебных отваров, поэтому его функция полезности равна:

$$U(x, y) = 100 - (x - 12)^2 - (y - 8)^2$$

а) (3 балла) При каких x и y достигается максимальная полезность знахаря U_{\max} ?

б) (3 балла) За день у него хватает времени, чтобы собрать не больше 20 грибов, при этом каждый гриб искать приходится в $k > 0$ раз дольше, чем каждую ягоду. Найдите все такие значения k , что знахарь может достичь своей максимальной полезности U_{\max} , которую вы нашли в предыдущем пункте.

В лесу появился злой дух, который хочет испортить жизнь знахарю. После того как Ефимыч соберет грибы и ягоды, он может наложить на знахаря заклятие изменения, из-за чего все грибы станут ягодами, а ягоды — грибами. Дух старается сделать полезность знахаря как можно меньше. Если злому духу безразлично накладывать заклятие или нет, он предпочитает не делать этого. Ефимыч знает о существовании духа и о том, что тот пытается уменьшить его полезность.

в) (5 баллов) При $k = 1$ определите, сколько ягод и грибов нужно собрать знахарю, чтобы достичь наибольшей полезности за один день.

г) (1 балл) Наложит ли злой дух заклятие на знахаря при такой стратегии?

Решение:

а) Проанализируем функцию полезности знахаря. Так как любое $t^2 \geq 0$, то $(x - 12)^2 \geq 0$ и $(y - 8)^2 \geq 0$, но мы вычитаем эти неотрицательные выражения из 100, значит, $100 - (x - 12)^2 - (y - 8)^2$ точно не больше 100, и тогда максимальная полезность будет равна 100, причем это возможно только, если $(x - 12)^2 = 0$ и $(y - 8)^2 = 0$. Получаем $x = 12$ и $y = 8$.

Ответ: $x = 12$ и $y = 8$.

б) Знахарю для максимальной полезности необходимо собрать 12 грибов и 8 ягод. Один гриб искать в k раз дольше, чем одну ягоду, значит, за одно и то же время он успеет собрать в k раз больше ягод, чем грибов. Пусть он нашел y ягод, значит, он отказался от $\frac{y}{k}$ грибов. Тогда количество собранных грибов $x \leq 20 - \frac{y}{k}$. Получаем, что для достижения максимальной полезности:

$$12 \leq 20 - \frac{8}{k}$$

$$\frac{8}{k} \leq 8$$

$$8 \leq 8k \quad (\text{так как } k > 0)$$

$$8k \geq 8$$

$$k \geq 1$$

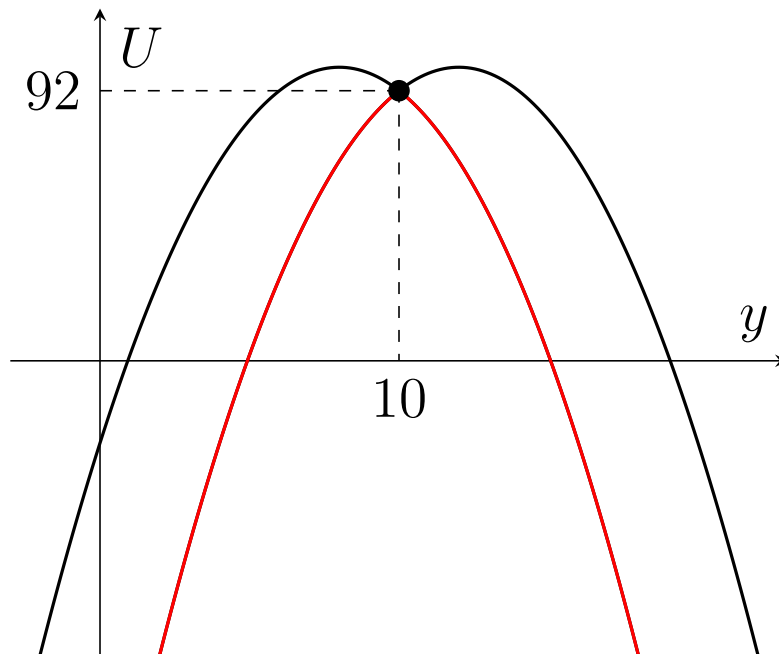
Ответ: $k \geq 1$.

в) При $k = 1$ получаем $x \leq 20 - \frac{y}{1}$, то есть $x + y \leq 20$. Если заклятие есть: $U_3(x,y) = 100 - (y - 12)^2 - (x - 8)^2$. Если заклятия нет: $U_{63}(x,y) = 100 - (x - 12)^2 - (y - 8)^2$. Если подставить $x \leq 20 - \frac{y}{1}$ в выражения прибыли, то получим:

$$U_3(y) \leq 100 - (y - 12)^2 - ((20 - y) - 8)^2 = -2y^2 + 48y - 188$$

$$U_{63}(y) \leq 100 - ((20 - y) - 12)^2 - (y - 8)^2 = -2y^2 + 32y - 28$$

Заметим, что итоговой полезностью знахаря будет нижняя огибающая этих двух парабол, тогда график этих двух парабол будет иметь следующий вид:



Свой максимум нижняя огибающая достигает в точке пересечения двух парабол:

$$-2y^2 + 48y - 188 = -2y^2 + 32y - 28$$

$$y = 10$$

Так как точка максимальной полезности находится на параболах, для нахождения оптимального x можно считать, что полученное ранее неравенство в данном случае равенство:

$$x = 20 - y = 10$$

Оптимальную точку $x = y = 10$ можно было также и угадать, но в таком случае необходимо привести доказательство того, что при таких значениях действительно достигается максимальное значение полезности: пусть $x = 10 + a$, тогда $y =$

$10 - a$. В таком случае полезность будет равна $U_3(x, y) = 100 - (-2 - a)^2 - (2 + a)^2$ или $U_{\bar{6}3}(x, y) = 100 - (-2 + a)^2 - (2 - a)^2$. Перепишем по-другому и получим $U_3(x, y) = 100 - 8 - 8a - 2a^2$ или $U_{\bar{6}3}(x, y) = 100 - 8 + 8a - 2a^2$.

Тогда, если $a > 0$, то дух выберет $U_3(x, y) = 92 - 8a - 2a^2 < 92$, если же $a < 0$, то дух выберет $U_{\bar{6}3}(x, y) = 100 - 8 + 8a - 2a^2 < 92$, а, значит, $x = y = 10$ и $U = 92$ это оптимум.

Ответ: $x = y = 10$.

г) При стратегии $(10, 10)$ полезность Ефимыча равна 92 независимо от того, наложено заклятие или нет. Злой дух не может уменьшить полезность знахаря, поэтому ему нет смысла накладывать заклятие.

Ответ: нет, не наложит.

Схема проверки:

а) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:

- получен правильный ответ — **1 балл**
- обоснование правильного ответа — **2 балла**.

б) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**, из них:

- получена правильная взаимосвязь между количеством собранных грибов и ягод в зависимости от k — **2 балла**
- получен правильный ответ — **1 балл**.

в) Максимальная оценка за пункт — **5 балла**, из них:

- правильная запись новой функции полезности — **2 балла**
- получен правильный ответ без обоснований — **1 балл**
- обоснование полученного верного ответа — **2 балла**.

г) Максимальная оценка за пункт — **1 балл**, из них:

- приведен правильный ответ с обоснованием — **1 балл**
- приведен правильный ответ без обоснования — **0 баллов**.