

Олимпиада имени С.И. Колокольникова

Заключительный этап

Тюмень, 2025

Второй тур



Конкурс	7 класс
Дата написания	15 апреля 2025
Количество заданий	4
Сумма баллов	48
Время написания	240 минут

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов, а также цены во всех задачах бесконечно делимыми.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений.

Все общеизвестные факты, не следующие из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Задача 5. Мир инвестиций*(12 баллов)*

Студент Иннокентий решил начать инвестировать свои деньги. Его первоначальный капитал составляет 100 тыс. рублей. На бирже ему предложили два варианта: акция А с ожидаемой доходностью 20% и волатильностью 10% стоимостью 1 тыс. рублей и акция Б с ожидаемой доходностью 25% и волатильностью 15% стоимостью 2 тыс. рублей. Можно покупать любое количество акций каждого вида (даже нецелое), но нельзя потратить больше своего бюджета.

Примечание: Волатильность показывает как сильно может измениться доходность. Обычно волатильность обозначается буквой σ (сигма). Инвесторы не любят волатильные акции и при прочих равных выбирают с меньшей волатильностью. Если положить долю α всех денег в актив с волатильностью σ_1 и долю $1 - \alpha$ в актив с волатильностью σ_2 , то волатильность такого портфеля будет равна $\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2$. Аналогично для большего числа активов.

а) *(2 балла)* Как Иннокентию следует распорядиться своими деньгами, если он только максимизирует ожидаемую доходность? А если только минимизирует волатильность?

б) *(3 балла)* Иннокентий в университете прочитал учебник по финансам и увидел там замечательный финансовый показатель Sharpe Ratio:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{\text{ожидаемая доходность} - \text{процентная ставка безрискового актива}}{\text{волатильность}}$$

В стране, где живет Иннокентий, процентная ставка безрискового актива известна и равна 5%. У какой акции Sharpe Ratio больше? Объясните, почему максимизация Sharpe Ratio согласуется с предпочтениями инвестора.

в) *(2 балла)* В какой пропорции Иннокентий будет покупать акции, чтобы максимизировать Sharpe Ratio своего портфеля (набора бумаг)?

Например, если он купит бумаги, потратив поровну денег на каждую, то его

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{0,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,20 - 0,05}{0,5 \cdot 0,15 + 0,5 \cdot 0,10} = 1,4$$

г) *(3 балла)* На бирже появляется третья акция В с ожидаемой доходностью 15% и волатильностью 5% стоимостью 500 рублей. Как в этом случае следует распорядиться финансами, если Иннокентий по-прежнему максимизирует Sharpe Ratio портфеля?

д) *(2 балла)* Как изменились бы ответы на пункты **в)** и **г)**, если бы Иннокентий обладал не 100 тыс. рублей, а 1 млн. рублей? А если 10 млн. рублей?

Задача 6. Валютный рынок в Ругляндии (12 баллов)

Представим себе вымышленную страну Ругляндия, которая обладает огромными запасами нефти. Эту нефть добывает и продаёт само государство. Деньги от продажи идут на два направления:

1. Часть поступает прямо в государственный бюджет — на пенсии, пособия и другие важные расходы.
2. Часть государство оставляет у себя на счетах — на будущее.

Каждый год Ругляндия продаёт 5 бочек нефти. Продавать нефть можно только за тугрики — это международная валюта. А тратить деньги внутри страны можно только в ругриках — национальной валюте.

Государство использует следующую аналитическую информацию:

- Одна бочка нефти всегда продаётся по 70 тугриков.
- Один тугрик всегда можно обменять на 70 ругриков.
- 12% от всей выручки с продажи нефти направляется на государственные расходы (пенсии, пособия и т.п.).
- Отложенные на будущее деньги хранятся в тугриках.

а) (2 балла) Считайте, что издержек на добычу и продажу нефти нет. Сколько ругриков планирует потратить государство на внутренние нужды?

В Министерство финансов заглянул юный экономист, бывший выпускник математико-экономического профиля ФМШ. Ознакомившись с планом, он был потрясён:

— Вы что, совсем не понимаете, как работает валютный рынок? — воскликнул он. — Курс тугрика не фиксирован, он определяется на бирже, в зависимости от спроса и предложения!

Он напомнил чиновникам: в Ругляндии тугрик свободно торгуется, и его курс формируется на основе рыночного равновесия. Спрос и предложение описываются так:

$$\text{спрос на тугрик: } Q = 140 - E$$

$$\text{предложение тугрика: } Q = E$$

Здесь E — это обменный курс (от английского exchange — менять): он отражает, сколько ругриков дают за 1 тугрик. Из этих формул видно, что в равновесии курс действительно равен $E = 70$. Но если государство решит выйти на валютный рынок и продать часть своих тугриков, предложение на рынке вырастет, и это повлияет на курс.

Экономист привёл пример:

— Если вы хотите, например, продать 100 тугриков, то предложение на рынке будет уже не $Q = E$, а, $Q = E + 100$ (при каждом значении обменного курса на рынке предлагается на 100 тугриков больше). Это приведёт к изменению курса, и на ту же сумму в тугриках можно будет получить меньше ругриков, чем раньше.

б) (3 балла) Государство продаёт 5 бочек нефти по 70 тугриков и 12% от выручки решает обменять на ругрики на валютной бирже. Какой установится новый обменный курс E ? Сколько ругриков получит государство на свои расходы?

В 2025 году в далекой стране к власти пришёл политик по имени Тональд Д. и устроил настоящий кризис на нефтяном рынке. Цена на нефть упала до 50 тугриков за бочку. Ругляндия по-прежнему продаёт 5 бочек нефти, но хочет сохранить тот же уровень трат в ругриках, который получился в предыдущем пункте.

в) (4 балла) Какой процент выручки от продажи нефти нужно теперь направить на валютный рынок, чтобы сохранить расходы в ругриках? Каким будет новый курс E ?

Цены на нефть остались низкими – 50 тугриков за бочку, продаются всё те же 5 бочек. Министерство финансов теперь хочет выяснить:

— А какой процент от выручки нам стоит продавать, чтобы получить максимум ругриков на траты?

г) (3 балла) Какой процент выручки от продажи нефти нужно обменять на ругрики, чтобы расходы государства в ругриках были максимальными? Какой установится курс E при этом?

Задача 7. *Блиц по качественным задачам про авиабилеты (12 баллов)*

Назовите причины следующих закономерностей. В каждом случае надо привести ровно одну причину и объяснить ее. Если будет приведено более одной причины, все последующие не будут проверены.

а) (2 балла) Билеты из Москвы в страны Шенгенского соглашения¹ на ближайшие даты (например, если покупать за неделю) могут стоить дешевле, чем если заранее планировать отпуск и покупать билеты за два месяца.

б) (2 балла) Билеты при поездке туда-обратно² на несколько дней стоят дороже, чем при поездке на 7 и более дней.

в) (2 балла) Багаж при оформлении онлайн стоит дешевле, чем если оплачивать багаж в аэропорту.

г) (2 балла) На сайтах-агрегаторах³ билеты стоят дороже, чем напрямую через официальный сайт авиакомпании. Люди это знают, но все равно часто покупают билеты на агрегаторах.

д) (2 балла) На выходе из аэропорта стоят толпы таксистов, которые предлагают цены сильно выше, чем в стандартных приложениях такси, но они всё равно часто находят клиентов.

е) (2 балла) Авиакомпания-лоукостеры⁴ нередко зашивают карманы на спинках пассажирских кресел. Это действие создаёт очевидные неудобства для пассажиров, а также требует дополнительных денежных затрат со стороны авиакомпаний на сам процесс зашивания.

¹Страны Шенгенского соглашения — это страны, подписавшие соглашение об упрощении паспортно-визового контроля для ряда европейских государств.

²Поездка «туда-обратно» означает, что пассажир покупает сразу два билета: в одну сторону и обратно.

³На сайте-агрегаторе представлены билеты сразу всех авиакомпаний по выбранному маршруту. Сайтами-агрегаторами являются, например, Aviasales, Kupibilet, Aviakassa и т.д.

⁴Авиакомпания-лоукостер — это такая авиакомпания, главным преимуществом которой являются дешевые билеты

Задача 8. Железо, дерево, два ствола (12 баллов)

Одна очень амбициозная страна умела добывать железо и дерево. Её КПВ в добыче этих ресурсов задавалось функцией $y = 100 - x$, где y — единицы дерева, а x — единицы железа. Из железа и дерева жители страны умеют делать пушки и дома. На каждый дом нужно потратить 2 единицы дерева и 2 единицы железа, а на каждую пушку нужно потратить 3 единицы железа и 1 единицу дерева.

а) (3 балла) Лидер страны решил захватить поселение, КПВ которого задается $y = 120 - 2x$, и для этого ему понадобилось 5 пушек. Выведите новое КПВ страны в координатах железо-дерево после захвата поселения.

б) (3 балла) Теперь, после разгромной победы, государь стремится построить в своей стране как можно больше домов. Однако захваченное поселение требует срочного ремонта, на который уйдет 40 единиц дерева. Какое количество домов сможет построить умный лидер амбициозной страны?

в) (6 баллов) Забудем про захват поселения из пункта а). Пусть на захват другой страны, КПВ которой задается функцией $y = N \left(8 - \frac{x}{3}\right)$, государю нужно потратить N пушек. После захвата страны восстанавливать ее не нужно. Больше 8 пушек страна построить не может из-за ограничений, установленных внутренним законодательством страны. Какое максимальное количество домов сможет построить государь, если он планирует захватывать только одну страну?