

Олимпиада имени С.И. Колокольникова

Заключительный этап

Тюмень, 2025

Первый тур



Конкурс	8 класс
Дата написания	14 апреля 2025
Количество заданий	4
Сумма баллов	48
Время написания	240 минут

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов, а также цены во всех задачах бесконечно делимыми.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений.

Все общеизвестные факты, не следующие из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Задача 1. Двоевластие*(12 баллов)*

В замечательном городе Тюмени только одна фирма занималась добычей нефти. Спрос на нефть в городе описывался функцией $Q(P) = 100 - P$, где P — цена на нефть, а Q — объем ее потребления. Общие издержки производства Q единиц продукции составляют $ТС(Q) = Q^2$.

а) *(2 балла)* Какой объем выберет фирма, максимизируя свою прибыль?

б) *(3 балла)* Государь «Заречный» решил собирать потоварный налог с фирмы, причем такой, чтобы его налоговые сборы были максимальны. Однако из-за размера города и сложности процесса он тратит много ресурсов на сбор налога, поэтому общие издержки от сбора налога по ставке $t_з$, которые несет государство, составляют $C_з(t_з) = 11t_з$. Какой налог выберет государь? Какой выпуск выберет фирма?

в) *(5 баллов)* Внезапно объявился еще один человек - «Восточный», который утверждает, что он тоже государь Тюмени, и «Заречный» согласен править вместе с ним. Вся проблема в том, что «Восточный» тоже хочет собирать налоги с монополиста, и его издержки на сбор налога задаются функцией $C_в(t_в) = 4t_в + \frac{t_в^2}{4}$. Каждый из государей стремится максимизировать собственные налоговые сборы. Какой выпуск произведет фирма, и какие ставки налогов выберут «Восточный» и «Заречный», если они делают выбор одновременно и независимо?

г) *(2 балла)* Приведите два примера, из чего могут складываться издержки на сбор налогов. Если будет приведено больше, чем два примера, то оценены будут первые два.

Задача 2. *Знахарь и злой дух**(12 баллов)*

Знахарь Ефимыч может собирать грибы (x) и ягоды (y). Ефимыч знает, как грибы и ягоды нужны лесу, но при этом сам вынужден собирать их для своих лечебных отваров, поэтому его функция полезности равна:

$$U(x, y) = 100 - (x - 12)^2 - (y - 8)^2$$

За день у него хватает времени, чтобы собрать не больше 20 грибов, при этом каждый гриб искать приходится в $k > 0$ раз дольше, чем каждую ягоду.

а) *(3 балла)* При каких x и y достигается максимальная полезность знахаря? Считайте, что в этом пункте время на сбор грибов и ягод у него не ограничено.

б) *(3 балла)* Найдите все значения k , при которых знахарь может достичь своей максимальной полезности.

В лесу появился злой дух, который хочет испортить жизнь знахарю. После того как Ефимыч соберет грибы и ягоды, он может наложить на знахаря заклятие изменения, из-за чего все грибы станут ягодами, а ягоды — грибами. Дух старается сделать полезность знахаря как можно меньше. Если злему духу безразлично накладывать заклятие или нет, он предпочитает не делать этого. Ефимыч знает о существовании духа и о том, что тот пытается уменьшить его полезность.

в) *(5 балла)* При $k = 1$ определите, сколько ягод и грибов нужно собрать знахарю, чтобы достичь наибольшей полезности.

г) *(1 балла)* Наложит ли злой дух заклятие на знахаря при такой стратегии?

Задача 3. Живём не одним днём!*(12 баллов)*

Помещик Боголепов — порядочный гражданин, он каждый день ходит на свою работу и зарабатывает $I = 120$ золотых, которые тратит в тот же день. Ровно в 6 часов вечера он заходит в местную харчевню и выбирает, что он будет сегодня есть: борщ или каравай. Его полезность задается функцией $U = kx + ty$, где x — количество потребленных борщей, y — количество потребленных караваев, а k и t — некоторые коэффициенты.

а) *(2 балла)* Пусть $k = 5, t = 4$. Выведите спрос помещика Боголепова на борщи в зависимости от цены борща P_x , если цена на караваи $P_y = 8$. Какое количество каждого из блюд он будет потреблять, если цена одного борща равна $P_x = 12$?

б) *(8 баллов)* Коэффициенты k и t непостоянны и могут изменяться. Если Боголепов потребил борщей больше, чем караваев, то на следующий день k будет равняться $5 - \frac{x}{4}$; если же он потребил караваев больше, чем борщей, то изменится t и станет равным $4 - \frac{y}{6}$, где x и y это потребление помещика в первый день. Если он потребит борщей и караваев одинаковое количество, то коэффициенты k и t останутся неизменными. Выяснив эти зависимости экспериментальным путем, помещик решил узнать, какую максимальную полезность он сможет получить суммарно за сегодня и завтра. Какое количество каждого товара потребит мудрый Боголепов в каждый из дней, если на начало первого дня $k = 5, t = 4$?

в) *(2 балла)* Приведите одну причину, из-за чего k и t могут так меняться со временем.

Задача 4. Кредитовать нельзя, запретить (12 баллов)

С 1 марта 2025 года у россиян появилась возможность воспользоваться самозапретом на кредит: каждый гражданин может оформить запрет на взятие потребительских кредитов (займов) в банках и микрофинансовых организациях. Самозапрет также можно оформить и на выдачу кредитных карт.

а) (3 балла) Парадоксальным образом, хотя запрет на выдачу кредитов ограничивает возможности людей, многие граждане прибегают к самозапрету. (За первые две недели самозапрет оформили более 6 миллионов россиян, 90% из которых воспользовались полным запретом на кредиты). Приведите два других примера из жизни, когда люди сознательно вводят какие-либо самоограничения.

б) (3 балла) По данным РБК в 2024 году более 70% от числа выданных кредитов пришлось на микрозаймы и кредиты на небольшие суммы. Чем для населения опасны данные кредиты?

в) (3 балла) Согласно статистическим данным самозапрет наиболее популярен у людей, чей возраст превышает 60 лет, при этом на данную группу населения приходится менее 5% выдаваемых кредитов. С чем может быть связана популярность самозапрета у данной группы населения?

г) (3 балла) Запрет не распространяется на некоторые виды кредитов, к таким относятся, например, ипотека и автокредитование. По какой причине данные виды кредитов могут не попадать под самозапрет?