XXXII Международный экономический фестиваль школьников «Сибириада. Шаг в мечту»
Олимпиада по экономике для учащихся 10-х классов 24.02.2025
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. РЕШЕБНИК.

Максимальная сумма баллов – 100.

Задача 1. Инновация в кредит

Царь Кощей, чахнущий над златом, и его бессменный советник Змей Горыныч организовали фирму «К&Г» по производству игрушечных дракончиков – металлических и деревянных, используя один дефицитный ресурс: труд подданных царя Кощея. Зависимости годовых объемов производства дракончиков от количества используемого труда описываются функциями: $Q_м = \frac{L}{2}$ и $Q_д = \sqrt{L}$, где $Q_м$ и $Q_д$ – это количество произведенных дракончиков по видам в штуках, а L – это количество использованного труда в единицах труда.

Дракончики фирмы «К&Г» пользуются устойчивым спросом и всегда находят своего покупателя. Фирма «К&Г» дорожит своей репутацией и держит стабильные цены уже очень много лет: металлические дракончики всегда продаются по 10 золотых монет за штуку, а деревянные – по 20 золотых монет за штуку.

Работающие на фирме сотрудники формируют общий годовой фонд рабочего времени в размере 100 единиц труда. За использование каждой единицы труда фирма «К&Г» платит 3 золотые монеты в год. Все другие ресурсы, необходимые для производства дракончиков, достаются фирме «К&Г» бесплатно.

1. Горыныч уже доказал, что фирма «К&Г» получит максимальную годовую прибыль, если будет производить деревянных дракончиков в количестве 2 штуки (и вы это можете проверить сами, если захотите). Определите, сколько при этом будет производиться металлических дракончиков, и каким окажется размер максимальной прибыли.

2. Попав в царство Кощея, Иван предложил фирме «К&Г» купить у него за 1000 золотых монет инновационную технологию производства деревянных дракончиков, основанную на ИИ, которая позволяет в 2 раза повысить производительность каждой единицы труда. Выведите уравнение КПВ для фирмы «К&Г», если она внедрит новую технологию в производство, и оцените, на сколько золотых монет вырастет в этом случае её максимальная годовая прибыль.

3. Кощей отказался платить своим златом за новую технологию, поэтому Горыныч, вдохновившись идеей внедрения инноваций, решил обратиться в Гномий банк за кредитом. Гномы согласились выдать требуемую сумму, но на следующих условиях. Во-первых, кредит выдается сроком на 10 лет под 10% годовых с использованием формулы простого процента. Во-вторых, согласно схеме погашения кредита и выплаты процентов по нему в конце каждого года обязательно должны быть выплачены:

а) проценты на непогашенную сумму кредита, которая числилась за фирмой на начало года (выплата процентов);

б) одна десятая часть первоначальной суммы кредита (гашение кредита).

Ежегодные расходы на погашение кредита и выплату процентов Горыныч рассчитывает осуществлять из прибыли фирмы.

Будет ли хватать этих денег, если на внедрение новой технологии потребуется целый год – то есть в первый год с момента покупки новой технологии производство деревянных дракончиков будет осуществляться по старой технологии, и только со второго года – по новой? Ответ обязательно обоснуйте. Сколько при этом составит переплата по кредиту, т.е. сумма выплаченных банку процентов?

4. Если гномы будут согласны, чтобы фирма «К&Г» досрочно погасила кредит, то за какое минимальное количество лет она сможет рассчитается по кредиту? Какой в этом случае окажется экономия на процентах?

Примечание. При расчетах платежей банку все числа округляйте до целых в **БОЛЬШУЮ** сторону – Гномий банк не любит, когда ему недоплачивают даже половину золотой монеты.

Решение:

1. Горыныч уже доказал, что фирма «К&Г» получит максимальную годовую прибыль, если будет производить деревянных дракончиков в количестве 2 штуки (и вы это можете проверить сами, если захотите). Определите, сколько при этом будет производиться металлических дракончиков, и каким окажется размер максимальной прибыли.

Поскольку деревянных дракончиков производится всего 2, то количество потраченного на них труда составит (из соответствующей функции):

$$L_{д} = Q_{д}^2 = 2^2 = 4 \text{ единиц труда}$$

Значит на металлических дракончиков фирма тратит не более 100 – 4 = 96 единиц труда.

Один вариант рассуждения: поскольку труд уже фактически закуплен, то максимум прибыли совпадает с максимумом выручки, которая прямо пропорционально зависит от числа произведенных дракончиков. Это означает, что оптимум будет тогда, когда фирма будет использовать весь труд и производить максимум металлических дракончиков.

$$Q_{м} = \frac{L_{м}}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ штук}$$

Второй вариант: более математический – записываем прибыль и максимизируем ее:

$$\pi_1 = P_{м}Q_{м} + P_{д}Q_{д} - 3*(4 + L_{м}) = 10*\frac{L_{м}}{2} + 20*2 - 12 - 3L_{м} = 28 + 2L_{м} \to max$$

$$\text{при } L_{м} \le 96$$

Очевидно, что прибыль достигается при максимально возможном значении $L_{м} = 96$.

Значит

$$Q_{м} = \frac{L_{м}}{2} = \frac{96}{2} = 48$$

Прибыль составит:

$\pi_1 = P_{м}Q_{м} + P_{д}Q_{д} - 3*100 = 10*48 + 20*2 - 300 = 520 - 300 = 220$ золотых монет.

Искать КПВ в этом пункте не нужно, но мы укажем ее тут. На решение и баллы она не влияет:

- Количество труда, которое будет потрачено на металлических игрушечных дракончиков:

$$L_м = 2Q_м$$

- Количество труда, которое будет потрачено на деревянных игрушечных дракончиков:

$$L_д = Q_д^2$$

В сумме количество используемого труда составляет 100:

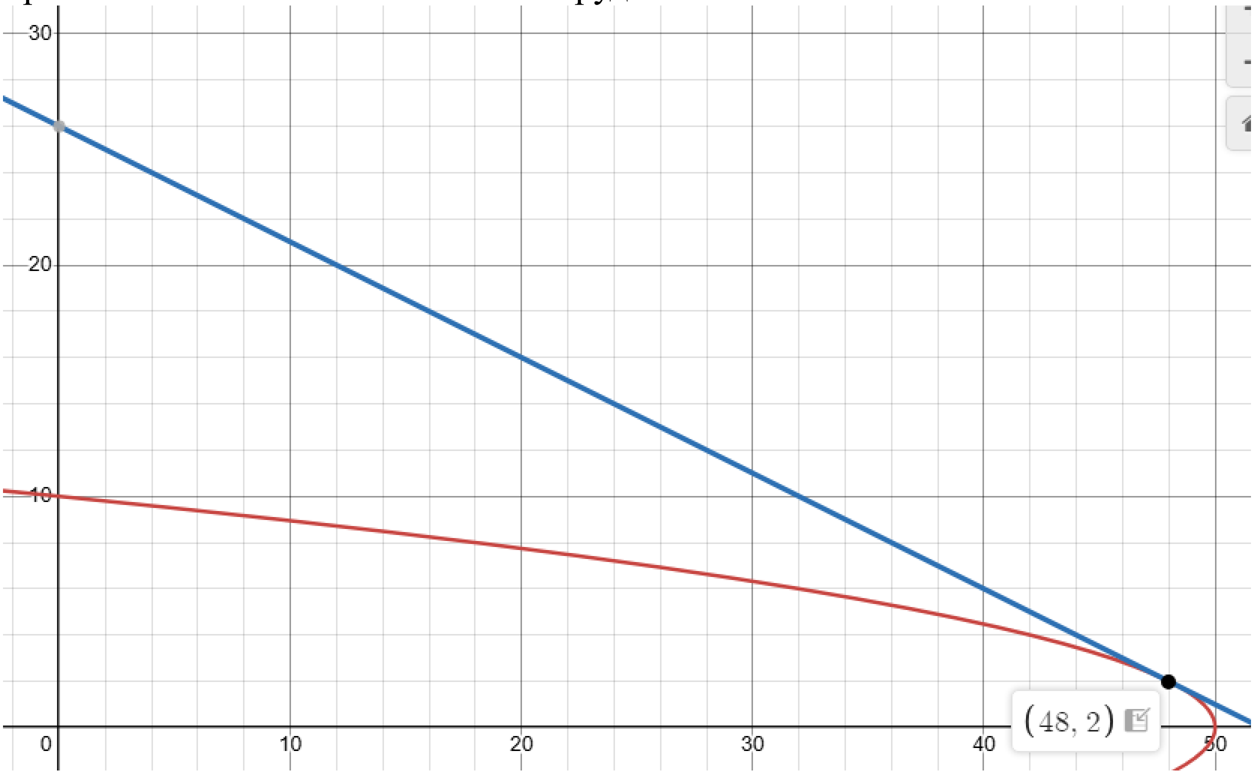
$$L_м + L_д = 100$$

Получаем КПВ:

$$2Q_м + Q_д^2 = 100$$

Или любая другая форма записи, например: $Q_д = \sqrt{100 - 2Q_м}$

Картинка для пункта 1 следующая: красная линия – КПВ, синяя – прибыль при максимальном использовании труда.



2. Выведите уравнение КПВ для фирмы «К&Г», если она внедрит новую технологию в производство, и оцените, на сколько золотых монет вырастет в этом случае её максимальная годовая прибыль.

Здесь нужно определить КПВ, подход тот же, что приведен выше.

Рост производительности труда в 2 раза означает, что количество произведенных деревянных дракончиков теперь определяется функцией

$$Q_д = 2\sqrt{L}$$

Тогда

- Количество труда, которое будет потрачено на металлических игрушечных дракончиков:

$$L_м = 2Q_м$$

- Количество труда, которое будет потрачено на деревянных игрушечных дракончиков:

$$L_д = \frac{Q_д^2}{4}$$

В сумме количество используемого труда составляет 100:

$$L_м + L_д = 100$$

Получаем новая КПВ:

$$2Q_м + \frac{Q_д^2}{4} = 100$$

Или любая другая форма записи, например:

$$Q_д = \sqrt{400 - 8Q_м} \text{ или } Q_м = 50 - \frac{Q_д^2}{8}$$

Запишем прибыль: опять-таки, очевидно, что максимум прибыли получаем, когда используется весь труд – все 100 единиц труда.

$$\pi_2 = P_м Q_м + P_д Q_д - 3 * 100 = 10 * \left(50 - \frac{Q_д^2}{8}\right) + 20Q_д - 300$$
$$= 200 + 20Q_д - 1{,}25Q_д^2 \to max$$

Это парабола ветвями вниз, ее максимум достигается в вершине:

$$Q_д = \frac{-20}{2 * (-1{,}25)} = 8 \text{ деревянных дракончиков}$$

Количество металлических дракончиков (это число не обязательно находить – про него не спрашивают) составит

$$Q_м = 50 - \frac{8^2}{8} = 42 \text{ металлических дракончика}$$

Прибыль составит

$$\pi_2 = P_м Q_м + P_д Q_д - 3 * 100 = 10 * 42 + 20 * 8 - 300 = 280$$

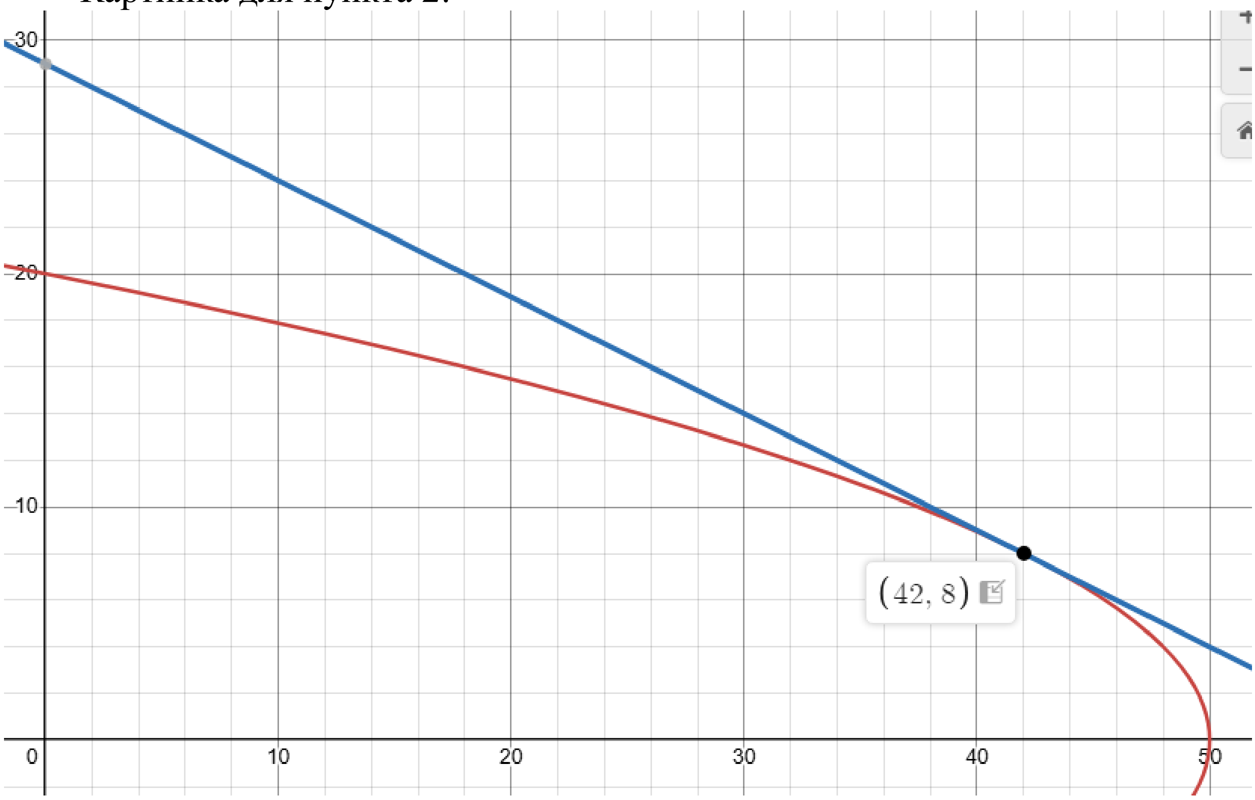
или

$$\pi_2 = 200 + 20Q_д - 1{,}25Q_д^2 = 200 + 20 * 8 - 1{,}25 * 8^2 = 280$$

Искомый прирост прибыли:

$$\pi_2 - \pi_1 = 280 - 220 = 60 \text{ золотых монет}$$

Картинка для пункта 2:



3. Будет ли хватать этих денег, если на внедрение новой технологии потребуется целый год – то есть в первый год с момента покупки новой

технологии производство деревянных дракончиков будет осуществляться по старой технологии, и только со второго года – по новой? Ответ обязательно обоснуйте. Сколько при этом составит переплата по кредиту, т.е. сумма выплаченных банку процентов?

При указанной схеме очевидно, что платежи будут уменьшаться со временем, так как уменьшается непогашенная часть, на которую начисляются проценты. Поэтому для ответа на вопрос нужно лишь показать, что первый (самый большой – в нем проценты начисляются на максимальную сумму в 1000 золотых монет) платеж меньше прибыли, получаемой без использования новой технологии – меньше 220.

Тут все просто: в конце первого года нужно оплатить по кредиту:

10%*1000+0,1*1000=200 золотых монет

Поэтому предприятию хватит прибыли для обслуживания такого кредита (тем более, что со второго года прибыль будет составлять 280 монет).

Переплата по кредиту – это сумма выплаченных процентов:

- проценты за первый год: 10%*1000=100
- проценты за второй год: 10%*900=90
- проценты за третий год: 10%*800=80

и так далее…

- проценты за последний десятый год: 10%*100=10

Получаем сумму переплаты:

100+90+80+70+60+50+40+30+20+10=550 золотых монет

4. Если гномы будут согласны, чтобы фирма «К&Г» досрочно погасила кредит, то за какое минимальное количество лет она сможет рассчитается по кредиту? Какой в этом случае окажется экономия на процентах?

Чтобы погасить кредит за минимальное количество лет фирма должна направлять всю прибыль на его погашение.

Расчеты удобно представить в табличном виде:

Год	Величина кредита на начало года	Начисленный процент	Выплата по основной части кредита	Полный платеж за год	Величина кредита на конец года – после платежа
-	$(1)_{i+1}=(5)_i$	(2)=10%*(1)	(3)=0,1*1000	(4)=(2)+(3)	$(5)_i = (1)_i – (3)$
1	1000	100	120	220	880
2	880	88	192	280	688
3	688	***69***	211	280	477
4	477	***48***	232	280	245
5	245	***25***	245	270	0
Сумма	–	330	1000	1330	–

Жирным курсивом выделены цифры, которые в соответствии с условием нужно «округлять»:

- процент третьего года 10%*688=68,8 – округляем до 69 – в большую сторону по требованию Гномьего банка.

- процент четвертого года 10%*477=47,7 – до 48.

- процент пятого года 10%*245=24,5 – до 25.

Получили, что минимальное необходимое количество лет – пять! Заметим также, что уже не вся прибыль пятого года нужна – у фирмы 10 золотых монет даже осталось.

Переплата составит 330 золотых монет – на 220 монет меньше, чем если бы погашали все 10 лет. Эти 220 монет и есть искомая экономия.

Критерии (всего 20 баллов)	**Балл**
1) всего 3 баллов	
Количество производимых металлических дракончиков (48 штук)	2 балла
Прибыль (220 золотых монет)	1 балл
2) всего 6 баллов	
Уравнение КПВ	3 балла
Определение $Q_д$ (и/или $Q_м$) ($Q_д = 8,\ Q_м = 42$)	2 балла
Прирост прибыли (60 золотых монет) - за саму прибыль (280 монет) без указания прироста – балл не ставится	1 балл
3) всего 5 баллов	
Ответ и обоснование – будет ли хватать денег	2 балла
Расчет всех процентов	2 балла
Сумма переплаты (550 монет)	1 балл
4) всего 6 баллов	
Составление графика платежей - забыли округлить – ставим только 1 балл из трех!	3 балла
Количество лет (5 лет)	1 балл
Сумма переплаты (330 монет)	1 балл
Экономия (220 монет)	1 балл

Задача 2. Горыныч и волшебное слово

Только в стране горных гномов растет волшебный дуриан и только гном Дурин знает старинный рецепт приготовления из него дури-джема. Дурин варит дури-джем бочками, издержки производства описываются функцией $TC_X = \frac{Q^2}{2} + 2Q$, где Q – количество бочек в неделю. Однако, у горных гномов генетическая непереносимость дуриана и продуктов из него. А вот равнинные эльфы очень ценят дури-джем и используют его как лекарство от всех болезней. Их спрос на дури-джем описывается функцией $Q_d = 84 - 2P$, где P – цена за бочку (золотых монет).

Путь из страны горных гномов в королевство равнинных эльфов лежит только через туннель в горах, который стережет Горыныч. За проход через туннель в королевство равнинных эльфов он требует 24 золотые монеты и сверх того по 4 монеты за каждую бочку, а еще волшебное слово, которое знает только мохноногий Билл, который закупает дури-джем у Дурина и продает его равнинным эльфам (обратно в страну гномов Горыныч пускает Билла за одно только волшебное слово). Каждый раз при покупке дури-джема Билл яростно торгуется с Дурином, и часто дело доходит до драки.

1. Определите, какая закупочная цена дури-джема была бы выгодна Дурину, если бы Билл соглашался с любой назначенной ценой. Какую прибыль получили бы в этом случае каждый из них?

2. Определите, какая закупочная цена дури-джема была бы выгодна Биллу, если бы Дурин соглашался с любой назначенной ценой. Какую прибыль получили бы в этом случае каждый из них?

3. Каждый раз, разнимая дерущихся Дурина и Билла, маг Квазимир уговаривает их создать совместное предприятие, обещая, что он будет им точно предсказывать такой объем выпуска, которой поможет им получить максимально возможную общую прибыль. Разумеется, за определенное вознаграждение. Определите максимально возможное вознаграждение, на которое мог бы рассчитывать Квазимир.

4. Дурин и Билл категорически не желают делиться с Квазимиром. Поэтому каждый раз после ожесточенного торга и даже драки им удается договориться о закупочной цене и заключить сделку. Определите границы диапазона значений закупочной цены, в котором заключается сделка.

Решение:

1. Определите, какая закупочная цена дури-джема была бы выгодна Дурину, если бы Билл соглашался с любой назначенной ценой. Какую прибыль получили бы в этом случае каждый из них?

Для определения закупочной цены, максимизирующей прибыль Дурина, нужно знать **спрос Билла на дури-джем**. А этот спрос определяется исходя из максимизации Биллом его прибыли при заданной (Дуриным) закупочной цене дури-джема $P_{ДД}$: Билл является ценополучателем – для него закупочная цена – это константа.

Из функции спроса выразим цену:

$$P = 42 - 0{,}5Q$$

Записывает сначала прибыль Билла:

$$\pi_{Б} = (42 - 0{,}5Q)Q - (4Q + 24) - P_{ДД}Q = -0{,}5Q^2 + \left(42 - 4 - P_{ДД}\right)Q - 24 \to \max_{Q}$$

Это парабола ветвями вниз, в ее вершине прибыль Билла достигает максимума:

$$Q = \frac{-\left(42 - 4 - P_{ДД}\right)}{2 * (-0{,}5)} = 38 - P_{ДД}$$

или

$$P_{ДД} = 38 - Q$$

– это уравнение спроса, предъявляемого Биллом на дури-джем.

Теперь записываем собственно прибыль Дурина:

$$\pi_{Д} = (38 - Q)Q - \left(\frac{Q^2}{2} + 2Q\right) = -\frac{3}{2}Q^2 + 36Q \to \max_{Q}$$

Это парабола ветвями вниз, в ее вершине прибыль Дурина достигает максимума:

$$Q_1^* = \frac{-36}{2 * (-1{,}5)} = 12$$

Таким образом, оптимальная закупочная цена для Дурина составляет:

$$P_{ДД1} = 38 - 12 = 26.$$

Наконец, посчитаем прибыли Дурина и Билла:

Прибыль Дурина:

$$\pi_{Д1} = 26 \cdot 12 - \left(\frac{12^2}{2} + 2 \cdot 12\right) = 312 - 96 = 216$$

Для прибыли Билла сначала определим цену, по которой он будет продавать джем равнинным эльфам:

$$P_{Б1} = 42 - 0{,}5 \cdot 12 = 42 - 6 = 36.$$

Теперь прибыль:

$$\pi_{Б1} = 36 \cdot 12 - (4 \cdot 12 + 24) - 26 \cdot 12 = 432 - 72 - 312 = 48$$

Суммарно Дурин и Билл получили $216 + 48 = 264$ золотые монеты.

2. Определите, какая закупочная цена дури-джема была бы выгодна Биллу, если бы Дурин соглашался с любой назначенной ценой. Какую прибыль получили бы в этом случае каждый из них?

Этот пункт решается очень похоже.

Для определения закупочной цены, максимизирующей прибыль Билла, нужно знать **предложение дури-джема Дуриным**. А это предложение определяется исходя из максимизации Дуриным его прибыли при заданной Биллом закупочной цене дури-джема $P_{ДД}$: теперь Дурин рассматривается как ценополучатель.

Записывает сначала прибыль Дурина:

$$\pi_Д = P_{ДД}Q - \left(\frac{Q^2}{2} + 2Q\right) = -\frac{Q^2}{2} + (P_{ДД} - 2)Q \to \max_Q$$

Это парабола ветвями вниз, в ее вершине прибыль Дурина достигает максимума:

$$Q = \frac{-(P_{ДД} - 2)}{2 * (-0{,}5)} = P_{ДД} - 2$$

или

$$P_{ДД} = Q + 2$$

– это уравнение предложения дури-джема Дуриным.

Теперь записываем собственно прибыль Билла:

$$\pi_Б = (42 - 0{,}5Q)Q - (4Q + 24) - P_{ДД}Q =$$
$$= (42 - 0{,}5Q)Q - (4Q + 24) - (Q + 2)Q = -1{,}5Q^2 + 36Q - 24 \to \max_Q$$

Это парабола ветвями вниз, в ее вершине прибыль Билла достигает максимума:

$$Q_2^* = \frac{-36}{2 * (-1{,}5)} = 12.$$

Таким образом, оптимальная закупочная цена дури-джема для Билла:

$$P_{ДД2} = 12 + 2 = 14.$$

Посчитаем прибыли:

Прибыль Дурина:

$$\pi_{Д2} = 14 \cdot 12 - \left(\frac{12^2}{2} + 2 \cdot 12\right) = 168 - 96 = 72$$

Для определения прибыли Билла посчитаем цену, по которой он будет продавать джем равнинным эльфам:

$$P_{Б2} = 42 - 0{,}5 \cdot 12 = 42 - 6 = 36.$$

Теперь прибыль:

$$\pi_{Б2} = 36 \cdot 12 - (4 \cdot 12 + 24) - 14 \cdot 12 = 432 - 72 - 168 = 192.$$

Суммарно они получили $72 + 192 = 264$ золотые монеты – такая же величина, как и в первом пункте.

3. Каждый раз, разнимая дерущихся Дурина и Билла, маг Квазимир уговаривает их создать совместное предприятие, обещая, что он будет им точно предсказывать такой объем выпуска, которой поможет им получить максимально возможную общую прибыль. Разумеется, за определенное вознаграждение. Определите максимально возможное вознаграждение, на которое мог бы рассчитывать Квазимир.

Максимально возможное вознаграждение Квазимира – это величина прибыли, которое получит совместное предприятие Дурина и Билла.

$$\pi_{\Sigma} = P_{ДД}Q - \left(\frac{Q^2}{2} + 2Q\right) + (42 - 0{,}5Q)Q - (4Q + 24) - P_{ДД}Q =$$

$$= (42 - 0{,}5Q)Q - \left(\frac{Q^2}{2} + 2Q\right) - (4Q + 24) = -Q^2 + 36Q - 24 \to \max_{Q}$$

Здесь $P_{ДД}$ – цена дури-джема.

Фактически суммарную прибыль Дурина и Билла можно интерпретировать, как прибыль одного монополиста. Максимизируем ее – это парабола ветвями вниз, ее вершина (в которой достигается максимум):

$$Q_{З}^{*} = \frac{-36}{2 * (-1)} = 18.$$

Цена, по которой дури-джем будет продан равнинным эльфам:

$$P_{БЗ} = 42 - 0{,}5 \cdot 18 = 42 - 9 = 33.$$

Суммарная прибыль равна:

$$\pi_{\Sigma} = 33 \cdot 18 - \left(\frac{18^2}{2} + 2 \cdot 18\right) - (4 \cdot 18 + 24) = 594 - 198 - 96 = 300.$$

Таким образом, создав совместное предприятие, Дурин и Билл могут получить большую прибыль, чем действуя по-отдельности, а Квазимир мог претендовать на вознаграждение до 300 – 264 = 36 золотых монет.

4. Дурин и Билл категорически не желают делиться с Квазимиром. Поэтому каждый раз после ожесточенного торга и даже драки им удается договориться о закупочной цене и заключить сделку. Определите границы диапазона значений закупочной цены, в котором заключается сделка.

Дурин и Билл согласятся сотрудничать, если прибыль каждого будет не меньше, чем в самом худшем случае без сотрудничества. То есть нужно согласовать такую закупочную цену, чтобы прибыль Дурина была не ниже 72, а прибыль Билла – не ниже 48.

Может показаться, что это будет любая цена из интервала от 14 (случай 2) до 26 (случай 1). Однако это не так. Верный интервал будет определен из следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \pi_{Д} = P_{ДД}Q - \left(\dfrac{Q^2}{2} + 2Q\right) \geq 72 \\ \pi_{Б} = (42 - 0{,}5Q)Q - (4Q + 24) - P_{ДД}Q \geq 48 \end{cases}$$

Объем продаж и цена дури-джема у равнинных эльфов уже определены в пункте 3.

$$\begin{cases} \pi_{Д} = P_{ДД} \cdot 18 - \left(\frac{18^2}{2} + 2 \cdot 18\right) \geq 72 \\ \pi_{Б} = 33 \cdot 18 - (4 \cdot 18 + 24) - P_{ДД} \cdot 18 \geq 48 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} P_{ДД} \geq 15 \\ P_{ДД} \leq 25 \end{cases}$$

Таким образом для того, чтобы сотрудничество Дурина и Билла состоялось, закупочная цена должна быть в интервале от 15 до 25 денежных единиц.

Критерии (всего 20 баллов)	**Балл**
1) всего 6 баллов	
Закупочная цена для Дурина - спрос Билла на дури-джем 2 балла - количество продаваемого джема 1 балл - собственно цена 1 балл	4 балла
Прибыль Дурина	1 балл
Прибыль Билла	1 балл
2) всего 6 баллов	
Закупочная цена для Билла - предложение дури-джема Дуриным 2 балла - количество продаваемого джема 1 балл - собственно цена 1 балл	4 балла
Прибыль Дурина	1 балл
Прибыль Билла	1 балл
3) всего 4 балла	
Количество продаваемого джема	3 балла
Вознаграждение Квазимира	1 балл
4) всего 4 балла	
Указания на ограничения по прибыли	2 балла
Собственно неравенство для цены – диапазон значений	2 балла

Задача 3. Экология очень нужного товара

В маленькой стране один очень нужный товар производит только одна фирма на двух предприятиях, расположенных в разных регионах. На предприятии №1 производство очень нужного товара относительно недорого, но сопровождается вредными выбросами в атмосферу, функция издержек $TC_1 = 3Q_1 + 0{,}25Q_1^2$. Технология, используемая предприятием №2 экологически совершенно чистая, но производство каждой единицы обходится дороже, функция издержек $TC_2 = 8Q_2 + Q_2^2$ (Q – млн единиц, TC – млн ойро*). Спрос на очень нужный товар описывается функцией $Q = 40 - P$, (P – ойро за единицу) качество товара не зависит от того, на каком предприятии он был произведен, потребители не различают товары, изготовленные на разных предприятиях.

*ойро – денежная единица маленькой страны.

1. Какое количество очень нужного товара будет произведено каждым предприятием?

2. Производство единицы очень нужного товара на предприятии №1 сопровождается одной условной единицей очень вредных загрязняющих выбросов, экологи бьют тревогу, требуя ввести штраф T ойро за каждую условную единицу загрязняющих выбросов. Правительство понимает недопустимость сокращения объема производства очень нужного товара, поэтому предлагает одновременно ввести субсидию S ойро за каждую единицу товара, произведенного по экологически чистой технологии. Минфин, чтобы избежать дополнительной нагрузки на бюджет, рассчитал такие ставки штрафа и субсидии, чтобы суммы собранных штрафов в точности хватало на выплату необходимой суммы субсидий. К какому снижению выбросов приведет реализация предложений Минфина?

3. Экологи считают, что для того, чтобы экологическая ситуация начала улучшаться, необходимо минимум в 2 раза большее сокращение вредных выбросов, чем то, которое достижимо при реализации предложений Минфина. Минфин, понимая, что при бо́льшем сокращении загрязнений сумма выплачиваемых субсидий превысит сумму поступлений от штрафов, предупреждает, что на оплату предоставляемых субсидий он сможет выделить не более 200 млн ойро. За развитием ситуации с тревогой следит директор фирмы, пытаясь предугадать возможные изменения прибыли при введении штрафов и субсидий. Развейте тревоги директора, проведя необходимые расчеты и определите диапазон возможного изменения его прибыли, когда экологи, Минфин и Правительство достигнут компромисса и примут решение.

Решение

1**.** Максимизируемая прибыль фирмы – это квадратичная парабола с ветвями вниз относительно Q_1 и Q_2:

$$\pi = (40 - (Q_1 + Q_2)) \cdot (Q_1 + Q_2) - (3Q_1 + 0{,}25Q_1^2) - (8Q_2 + Q_2^2)$$

Решение с использованием производной:

Условие максимизации прибыли $MR(Q) = MC_1(Q_1) = MC_2(Q_2),\ \ Q = Q_1 + Q_2$

$$\{40 - 2(Q_1 + Q_2) = 3 + 0{,}5Q_1\ 40 - 2(Q_1 + Q_2) = 8 + 2Q_2$$

Решаем систему: $Q_2 = 1$, $Q_1 = 14$. Сразу определим прибыль $\pi_0 = 275$.

Решение без производной:

В функции прибыли зафиксируем Q_2 и преобразуем ее:

$$\pi = -1{,}25Q_1^2 + Q_1(37 - 2Q_2) + (32Q_2 - 2Q_2^2),$$

и будем максимизировать по Q_1.

Вершина параболы $Q_1 = \frac{37-2Q_2}{2.5}$. Подставим в функцию прибыли и получим функцию одной переменной:

$$\pi = -1{,}25\left(\frac{37 - 2Q_2}{2.5}\right)^2 + \frac{37 - 2Q_2}{2.5} \cdot (37 - 2Q_2) + (32Q_2 - 2Q_2^2)$$
$$= -1{,}2Q_2^2 + 2{,}4Q_2 + \frac{37^2}{5}$$

Вершина параболы $Q_2 = 1$, тогда $Q_1 = 14$. Итого, общий объем производства 15.

2**.** Максимизируемая прибыль фирмы в данном случае:

$$\pi = (40 - (Q_1 + Q_2)) \cdot (Q_1 + Q_2) - ((3 + T)Q_1 + 0{,}25Q_1^2) - ((8 - S)Q_2 + Q_2^2)$$

Решение с использованием производной:

$$\{40 - 2(Q_1 + Q_2) = 3 + T + 0{,}5Q_1\ 40 - 2(Q_1 + Q_2) = 8 - S + 2Q_2$$

Так как максимальная прибыль фирмы должна достигаться при $Q_1 + Q_2 = 15$, то

$$\{10 = 3 + T + 0{,}5Q_1\ 10 = 8 - S + 2(15 - Q_1) \qquad (*)$$

Следовательно, для того, чтобы общий выпуск очень нужного товара оставался прежним, соотношение ставки налога и штрафа должно быть $S = 4T$. Чтобы бюджет не понес дополнительных расходов, должно соблюдаться условие $TQ_1 = SQ_2$ или $TQ_1 = 4TQ_2$. Значит, $Q_1 = 4Q_2$, следовательно, $Q_2 = 3$, $Q_1 = 12$. То есть вредные выбросы сократятся только на 2 млн условных единиц.
Решение без производной:

$$\pi = -1{,}25Q_1^2 + Q_1(37 - \text{T} - 2Q_2) + ((32 + S)Q_2 - 2Q_2^2)$$

$Q_1 = \frac{37-\text{T}-2Q_2}{2.5}$, так как общий объем не должен измениться, то $15 - Q_2 = \frac{37-\text{T}-2Q_2}{2.5}$, откуда $Q_2 = 1 + 2T$

$$\pi = -1{,}25\left(\frac{37 - \text{T} - 2Q_2}{2.5}\right)^2 + \frac{37 - \text{T} - 2Q_2}{2.5} \cdot (37 - \text{T} - 2Q_2) + ((32 + S)Q_2 - 2Q_2^2)$$

Это парабола с ветвями вниз, ее вершина $Q_2 = \frac{(32+S)-0{,}8(37-T)}{2{,}4}$. Вспомним, что $Q_2 = 1 + 2T$ и приравняв найдем $S = 4T$. Далее ход решения такой же, как и при использовании производной.
3. Должны быть выполнены все следующие условия:
1) Требование экологов: производство на предприятии №1 не превышает $Q_1 = 14 - 2 \cdot 2 = 10$ млн штук, то есть $Q_1 \leq 10$;
2) Общий объем производства очень нужного товара должен остаться неизменным, то есть $Q_1 + Q_2 = 15$, что обеспечивается соотношением ставок штрафа и субсидии $S = 4T$;
3) Расходы бюджета на выплату субсидий не должны превышать сумму собранных штрафов более, чем на 200 млн ойро, то есть $SQ_2 - TQ_1 \leq 200$,
Из 2) и 3) следует $4T(15 - Q_1) - TQ_1 \leq 200$ или $60T - 5TQ_1 \leq 200$.
Так как фирма максимизирует прибыль, можем воспользоваться условием достижения максимума прибыли (*), из которого $T = 7 - 0{,}5Q_1$. Тогда $60(7 - 0{,}5Q_1) - 5(7 - 0{,}5Q_1)Q_1 \leq 200$ или $2{,}5Q_1^2 - 65Q_1 + 420 \leq 200$.
То есть превышение расходов над доходами бюджета (левая часть неравенства) - парабола с ветвями вверх, вершина которой $Q_1 = 65/5 = 13$, поэтому на участке $Q_1 \leq 10$ (требование экологов) это убывающая функция. Следовательно, превышение расходов над доходами бюджета *отрицательно зависит* от объемов экологически грязного выпуска. Значит минимальное сокращение загрязнений определяется требованиями экологов ($Q_1 = 10$), и оно допустимо с точки зрения требований Минфина: $60(7 - 0{,}5 \cdot 10) - 5(7 - 0{,}5 \cdot 10)10 = 20 \leq 200$. В этом случае $T = 7 - 0{,}5 \cdot 10 = 2$, $S = 4T = 8$, $Q_2 = 5$ и $\pi = (40 - 15) \cdot 15 - \left((3 + 2) \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 10^2\right) - \left((8 - 8) \cdot 5 + 5^2\right) = 275$, то есть прибыль не изменилась по сравнению с исходной ситуацией.
Максимально достижимое сокращение загрязнений ограничивается условиями Минфина: $60(7 - 0{,}5Q_1) - 5(7 - 0{,}5Q_1)Q_1 = 200$. После преобразований: $2{,}5Q_1^2 - 65Q_1 + 220 = 0$. Найдем корни: $D = (-65)^2 + 4 \cdot 2{,}5 \cdot 220 = 2025$, $\sqrt{D} = 45$, $Q_1^{(1)} = \frac{65+45}{2 \cdot 2{,}5} = 22$, $Q_1^{(2)} = \frac{65-45}{2 \cdot 2{,}5} = 4$. Первый корень, очевидно, отбрасывается, так как не удовлетворяет условию $Q_1 + Q_2 = 15$. Следовательно, на первом предприятии выпуск сократится до 4 единиц. Тогда $T = 7 - 0{,}5 \cdot 4 = 5$, $S = 4T = 20$, $Q_2 = 11$.
Прибыль фирмы при максимальном сокращении загрязнений:

$$\pi = (40 - 15) \cdot 15 - \left((3+5) \cdot 4 + 0{,}25 \cdot 4^2\right) - \left((8-20) \cdot 11 + 11^2\right) = 350$$

Замечание: можно просто решить неравенство $60(7 - 0{,}5Q_1) - 5(7 - 0{,}5Q_1)Q_1 \leq 200$ и получить тот же диапазон объемов выпуска на первом предприятии, который удовлетворяет требованиям экологов и Минфина одновременно.

Убедимся, что прибыль в диапазоне изменения ставки штрафа с 2 до 5 (или объемов выпуска на первом предприятии с 4 до 10) ведет себя монотонно. При постоянном общем выпуске изменение прибыли определяется изменением издержек на всех предприятиях: $TC = (3 + T)Q_1 + 0{,}25Q_1^2 + (8 - S)Q_2 + Q_2^2$

Учитывая, что $S = 4T$ (чтобы выпуск не изменился) и $T = 7 - 0{,}5Q_1$ (фирма максимизирует прибыль), получаем

$$TC = (3 + 7 - 0{,}5Q_1)Q_1 + 0{,}25Q_1^2 + \left(8 - 4 \cdot (7 - 0{,}5Q_1)\right) \cdot (15 - Q_1) + (15 - Q_1)^2$$
$$= -1{,}25Q_1^2 + 30Q_1 - 75$$

Это парабола с ветвями вниз и вершиной в $Q_1 = \frac{-30}{-2{,}5} = 12$. Следовательно, на промежутке от $Q_1 = 4$ до $Q_1 = 10$ издержки монотонно возрастают, а прибыль – убывает. Тогда ее максимальное значение достигается при $Q_1 = 4$ и других максимумов в этом диапазоне значений нет.

Следовательно, директору фирмы не стоит тревожится, его прибыль не сократится при любых принятых решениях, и либо останется неизменной, либо увеличится, составив, таким образом, от 275 до 350 млн ойро.

Критерии (всего 20 баллов)	**Балл**
1) всего 5 баллов, в том числе	
Верное составление функции прибыли или запись условия максимизации прибыли	1 балл
Определение общего объема выпуска без указания выпуска на каждом предприятии	1 балл
Определение объемов выпуска на каждом предприятии	По 2 балла
2) всего 7 баллов, в том числе	
Верное составление функции прибыли или запись условия максимизации прибыли	1 балл
Соотношение ставок штрафа и субсидии, сохраняющее выпуск	3 балла
в том числе учет в решении условия сохранения выпуска (Q = 15)	1 балл
Учет условия сбалансированности бюджета	1 балл
Определение объемов выпуска на предприятиях	2 балла
3) всего 8 баллов, в том числе	
Диапазон изменения выпуска (на одном из предприятий)	3 балла
Диапазон изменения прибыли	2 балла
Проверка монотонности прибыли в диапазоне изменения выпуска	2 балла
Верный ответ	1 балл

Задача 4. Волшебный горшочек

В царстве Кощеевом был найден волшебный бездонный горшочек, который, если поместить в него в течение дня некоторую (любую) сумму золотых монет, в конце дня выдаст сумму в десять раз большую. Но беда – горшочек способен работать лишь три дня, а потом становится обычным горшком.

Царь Кощей, будучи в хорошем настроении, пригласил всех сказочных жителей, которых в царстве ровно сотня, на двухдневный съезд, чтобы они, взяв с собой ровно по 100 золотых монет, смогли «подзаработать». Третий день работы горшочка царь посвятит умножению своего злата.

На съезде жители договорились, что каждый из них в начале дня подойдет к горшочку один раз и положит в него золотые монеты (каждый житель может вложить любое количество своих золотых монет или не положить ничего), а в конце дня все монеты, которые горшочек выдаст, будут поделены поровну между всеми жителями.

1. Если каждый сказочный житель заботится только о своем кошельке, то какую, по вашему мнению, оптимальную стратегию вложений в горшочек он выберет? Каким будет количество монет у каждого жителя в конце первого дня съезда? Ответы поясните.

2. Реализовав стратегию пункта (1) и посмотрев на свое количество монет в конце первого дня, сказочные жители остались недовольны, а царь Кощей был особенно недоволен тем, что его подданные так бездарно потеряли один день, который он мог бы использовать на преумножение своего злата, если бы предвидел, что его подданные такие неразумные.

Поэтому в начале второго дня на съезде царь объявил: «Каждый должен положить в горшочек не меньше $\boldsymbol{A}$ золотых монет. Тот, кто вложит меньшую сумму, должен заплатить штраф 45 золотых монет», и попросил своего любимого советника Змея Горыныча следить и штрафовать. Если Горыныч заметил (а он все замечает – у него же три пары глаз), что житель положил меньше назначенной суммы, то штраф волшебным образом сразу взимается с жителя в Кощеев сундук. Какое максимальное значение может принимать $\boldsymbol{A}$, чтобы, следуя своей оптимальной стратегии, жители вкладывали в горшочек ненулевое количество монет. Сколько при этом золотых монет будет в конце второго дня у каждого жителя при условии, что они по-прежнему руководствуются своими личными интересами?

3. Определите, какой штраф должен был бы назначить Кощей, чтобы жители получили максимально возможное количество золотых монет от горшочка во второй день? Чему равен этот максимум?

Решение

1. Если каждый сказочный житель заботится только о своем кошельке, то какую, по вашему мнению, оптимальную стратегию вложений в горшочек он выберет? Каким будет количество монет у каждого жителя в конце первого дня съезда? Ответы поясните.

Один вариант решения – рассуждения:

Согласно условию задачи, каждый житель заботится о своем кошельке – хочет иметь в нем максимум монет. То, сколько будут вкладывать другие, будет восприниматься жителем как некоторая данность:

«*Я не могу повлиять на стратегии других. Если вложу* ***C****, то обратно получу* (*с учетом распределения этого* ***C*** *равномерно по всем*) ***0,1C****, то есть «имею» от вложения* ***–0,9C*** *– при любом положительном* ***C*** *я теряю, поэтому вкладывать не захочу. Моя оптимальная стратегия* «***вложить 0***».

Второй вариант решения – математический:

Пусть c_i – величина вклада i-ого жителя. Тогда общее его количество монет к концу дня составит:

$$100 - c_i + \frac{10 \text{ раз}}{100 \text{ жителей}} * \sum_{j=1}^{100} c_j$$

Немного перегруппируем слагаемые:

$$100 - c_i + \frac{10 \text{ раз}}{100 \text{ жителей}} * \sum_{j=1}^{100} c_j = 100 - c_i + \frac{1}{10} * \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{100} c_j + \frac{1}{10} c_i =$$

$$= 100 + \frac{1}{10} * \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} c_i \to \max_{c_i}$$

Эта величина линейно (отрицательно) зависит от c_i, значит максимум этой величины достигается при $c_i = 0$ – i-ому жителю не нужно ничего вкладывать в горшочек – это и есть оптимальная стратегия.

Ответ на второй вопрос пункта сформулируем так:
Поскольку рассматривался «любой» житель, то все поступят также – вложат 0. Горшочек выдаст 0. У каждого в конце дня останется 100 монет.

2. Какое максимальное значение может принимать ***A***, чтобы, следуя своей оптимальной стратегии, жители вкладывали в горшочек ненулевое количество монет. Сколько при этом золотых монет будет в конце второго дня у каждого жителя при условии, что они по-прежнему руководствуются своими личными интересами?

Пусть c_i – величина вклада i-ого жителя. ***A*** – это величина, начиная с которой по задумке царя Горыныч начинает штрафовать. Тогда количество монет у жителя к концу дня составит:

$$\pi_i = \begin{cases} 100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} c_i, & \text{если } c_i \geq A \\ 100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} c_i - 45, & \text{если } c_i < A \end{cases}$$

Жители знают, что их оптимальная стратегия – вкладывать как можно меньше (следует из первого пункта задачи), а также знают границу ***A***. Поэтому их оптимальные стратегии: чтобы не получить штраф, нужно вложить в точности ***A*** (из первого выражения – минимальное значение c_i), а при штрафе – ничего не вкладывать (аналогично из второго выражения).

Царь хочет, чтобы жители вкладывали деньги в горшочек, то есть чтоб их количество монет при вложении *A* без штрафа было больше (не меньше), чем если бы они решили все же платить штраф.

$$100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} A \geq 100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - 45$$

Отсюда

$$\frac{9}{10}A \leq 45$$
$$A \leq 50$$

Получаем, что **максимальная** сумма денег, которую при штрафе 45 назначил царь, должна составлять 50 золотых монет. В ситуации $A = 50$, царь фактически предлагает жителям две стратегии ($c_i = 0$ и $c_i = 50$), при которых они будут получать одинаковое количество монет. Ненулевое вложение равно 50 золотых монет.

Значит, итоговая оптимальная стратегия тут «вкладывать в горшочек 50 монет». К концу дня каждый житель будет иметь

$$100 - 50 + \frac{10 * (100 * 50)}{100} = 550 \text{ монет.}$$

В следующей таблице (она не обязательна) показано, как в зависимости от величины А меняется количество монет у жителя i, если он решает не вкладывать ничего, в то время как остальные вкладывают А, и если он вкладывает как и все А монет.

Штраф	Граница А	Все А, житель 0 и штраф	Все А
45	0	55	100
45	1	64,9	109
45	2	74,8	118
45	3	84,7	127
45	42	470,8	478
45	43	480,7	487
45	44	490,6	496
45	45	500,5	505
45	46	510,4	514
45	47	520,3	523
45	48	530,2	532
45	49	540,1	541
45	50	550	550
45	51	559,9	559
45	52	569,8	568
45	98	1025,2	982
45	99	1035,1	991
45	100	1045	1000

Как раз получается, что если при штрафе 45 устанавливать максимальное значение больше 50, то жителю точно «выгоднее» ничего не вкладывать и заплатить штраф, а до 50 наоборот – выгодно платить по указанной «границе» (при А = 50 – жителю безразлично, по условию – он вложит ненулевое).

3. Определите, какой штраф должен был бы назначить Кощей, чтобы жители получили максимально возможное количество золотых монет от горшочка во второй день? Чему равен этот максимум?

Чтобы получить максимально возможное количество золотых монет, нужно, чтобы каждый житель вложил максимальное количество монет – на начало второго дня это 100 монет. То есть значение A должно равняться 100.

Тогда величину штрафа T Кощей должен назначить из условия, чтобы количество монет у жителя при вложении 100 монет без штрафа было больше (не меньше), чем если бы они решили все же платить штраф.

$$100 + \frac{1}{10}\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10}\cdot 100 \geq 100 + \frac{1}{10}\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{100} c_j - T$$

$$-90 \geq -T$$

$$T \geq 90$$

Получили, что штраф не должен быть меньше 90 золотых монет – при таком штрафе выгоднее каждому (и в результате всем) вкладывать все 100 монет.

Максимум, который в результате получит каждый житель, составит 1000 золотых монет (суммарно 100 тыс. монет).

В следующей таблице (она не обязательна) показано, что при значении А = 100 начиная с величины штрафа 90 каждый житель будет получать от вложения А монет в горшочек не меньше монет, чем в ситуации оплаты штрафа (при 90 – ситуация безразличия, при 91 и выше – получает строго больше).

Штраф	Граница А	Все А, житель 0 и	Все А
88	100	1002	1000
89	100	1001	1000
90	100	1000	1000
91	100	999	1000
92	100	998	1000
93	100	997	1000
94	100	996	1000
95	100	995	1000
96	100	994	1000
97	100	993	1000
98	100	992	1000
99	100	991	1000
100	100	990	1000

Критерии (всего 20 баллов)	**Балл**
1) всего 5 баллов	
Полное решение	5 баллов
Если обоснование стратегии неполное, то за пункт только	3 балла
Забыли указать стратегию жителя	–1 балл
Забыли указать сколько монет у жителя	–1 балл
2) всего 10 баллов	
Полное решение:	10 баллов
число А количество монет	8 баллов 2 балла
Если не указано, что «всем вкладывать А – это оптимальная	1 из 8 баллов

стратегия при отсутствии штрафа»	
Если вышли на 50 без неравенства – нет обоснования, что это максимальное значение	4 из 8 баллов
Если (при вычислении А) сопоставляли «количество денег», но оно не учитывало вложений других – смысловая ошибка, почти всегда приводящая не к числу 50	0 из 8 баллов
3) всего 5 баллов	
Полное решение:	5 баллов
вычисление штрафа (неравенство / диапазон) указание полученного жителем/-ями максимума монет	3 балла 2 балла
Если указали «штраф равен 100», то за соответствующий пункт	0 из 3 баллов
Если вышли на 90 без неравенства – нет указания, что это только одно из возможных значений штрафа	2 из 3 баллов
Ошибка, приводящая к 1 или 0 баллов из 8 во втором пункте – здесь не учитывалась (учли один раз)	–
Указали, что нужно вложить максимум (100 монет), но не написали – сколько монет в результате будет у жителя/жителей	–1 балл

Задача 5. Загрузка самолета

К владельцу небольшого частного самолета обратились два предпринимателя (X и Y) с просьбой доставить их грузы из пункта А и пункт Б. Общий вес груза, который хочет отправить предприниматель X, составляет 15 тонн, и за доставку каждой тонны груза X он готов заплатить 90 тугриков. У предпринимателя Y 12 тонн груза, готового к отправке, и за доставку каждой тонны своего груза он готов заплатить 100 тугриков. Известно, что самолет может взять на борт до 18 тонн груза, при этом объем грузового отсека составляет всего 80 кубических метров. Объем, занимаемый одной тонной груза предпринимателя X, равен 4-м кубическим метрам, а предпринимателя Y – 5-ти кубическим метрам.

Самолету требуется топливо – керосин, при этом расход топлива при разной загрузке самолета различается: если общий вес груза 10 тонн и меньше то самолету на полет из пункта А в пункт Б хватит 10 тонн керосина, а если общий вес груза больше 10 тонн, то нужно уже 20 тонн топлива. Керосин для полета нужно покупать у владельца аэропорта, по цене $P_т$ тугриков за тонну, которую он устанавливает, руководствуясь своими интересами. Предполагается, что других расходов, кроме расходов на закупку топлива, у владельца самолета нет.

А) Владелец аэропорта очень хочет заполучить весь груз предпринимателя X, однако тот готов продать ему только ту часть груза, которая останется после отправки самолета. Определите, какую цену на топливо стоит назначить владельцу аэропорта, чтобы весь груз X достался ему.

Б) Если цена на топливо будет установлена на уровне 74 тугрика за тонну, то сколько груза от каждого из предпринимателей будет доставлено в пункт Б, и какую прибыль от этого полета получит владелец самолета?

В) В условиях предыдущего пункта, когда владелец самолета практически принял решение о том, как загрузить самолет, обеспечивая себе при этом получение максимальной прибыли, из пункта Б пришла радиограмма, что груз от предпринимателя X срочно требуется жителям этого населенного пункта, поэтому этого груза следует привезти в количестве не меньшем, чем груза от предпринимателя Y. Потерю прибыли, если она будет, владельцу самолета обещано компенсировать из бюджетных средств. Рассчитайте, как следует загрузить самолет, учитывая просьбу жителей поселка Б, и какую прибыль теперь может получить владелец самолета.

Г) Оцените, каким должен быть размер компенсации потери прибыли.

Решение

А) Владелец аэропорта очень хочет получить груз X, однако предприниматель X готов продать ему только ту часть груза, что не увезет самолет. Определите, какую цену на топливо стоит назначить владельцу аэропорта, чтобы весь груз X достался ему.

Владелец самолета фактически решает две задачи максимизации своей прибыли – одна, если загрузка не превысит 10 тонн, вторая при загрузке, превышающей 10 тонн, – так как в этих ситуациях разный расход топлива.

Первая задача простая:

$X \leq 15$ (ограничение на вес груза от предпринимателя X)

$Y \leq 12$ (ограничение на вес груза от предпринимателя Y)

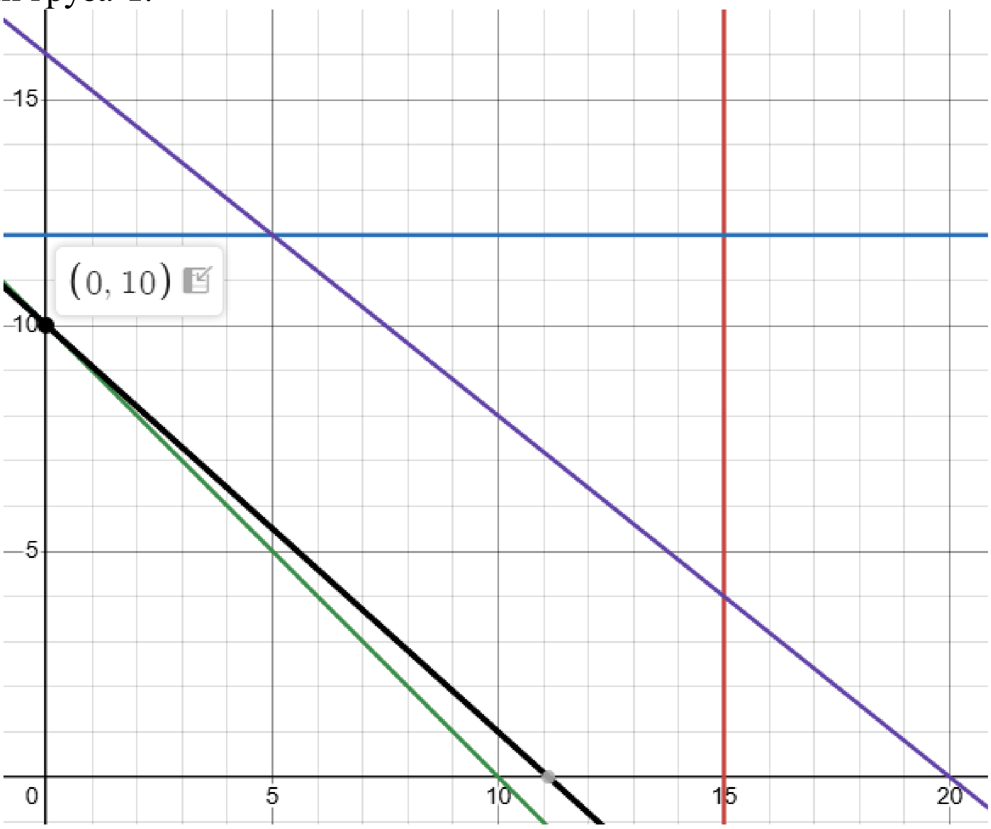
$X+Y \leq 10$ (ограничение на вес груза для величины топлива – 10 тонн)

$4X+5Y \leq 80$ (ограничение на объем груза)

При этом целевая функция – максимум прибыли будет иметь вид.

$90X + 100Y – P_т*10 \rightarrow \max$

В зависимости от цены на топливо меняется прибыль, но наклон линии остается неизменным и оптимальной загрузкой самолета в этом случае будет: 0 тонн груза X и 10 тонн груза Y.



Вторая задача тоже достаточно простая:

$X \leq 15$ (ограничение на вес груза от предпринимателя X)

$Y \leq 12$ (ограничение на вес груза от предпринимателя Y)

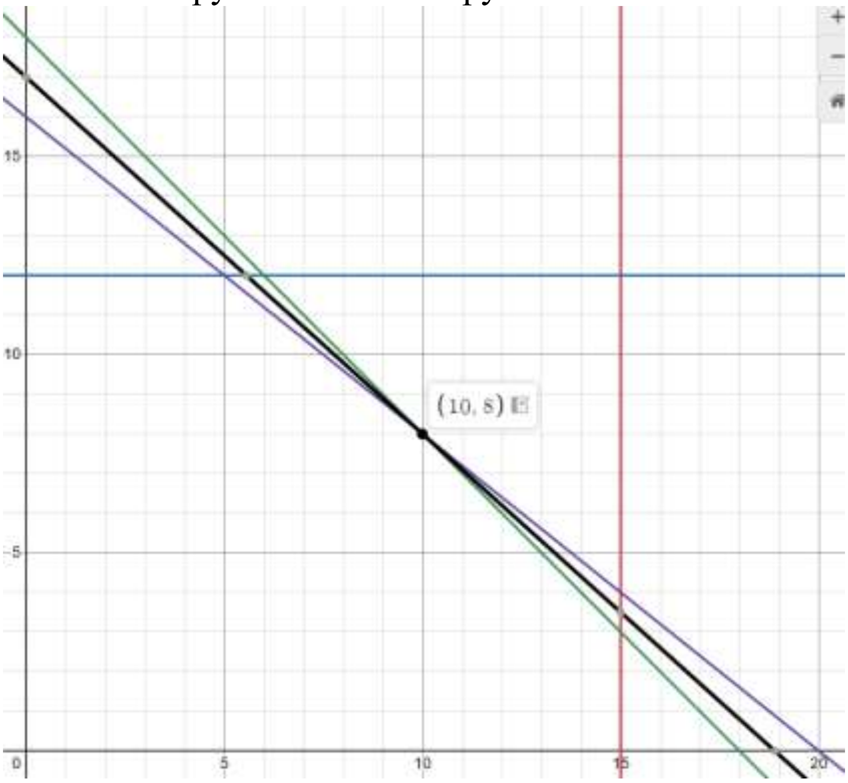
$X+Y \leq 18$ (ограничение на вес груза для самолета и для величины топлива – 20 тонн)

4X+5Y≤80 (ограничение на объем груза)

При этом целевая функция – максимум прибыли будет иметь вид.

$90X + 100Y - P_т*20 \rightarrow max$

Также в зависимости от цены на топливо меняется прибыль, но оптимальной будет одна точка: 10 тонн груза X и 8 тонн груза Y.



Первая точка, отвечающая интересам владельца аэропорта, будет выбрана владельцем самолета, если прибыль в ней будет не меньше (а лучше – больше), чем во второй:

$$90*0+100*10-10*P_т > 90*10+100*8-20*P_т$$
$$1000-10*P_т > 1700-20*P_т$$
$$10*P_т > 700$$
$$P_т > 70$$

Получили, что владельцу аэропорта, если он хочет получать весь груз X, нужно установить цену выше 70 тугриков за тонну керосина.

Б) Если цена на топливо будет установлена на уровне 74 тугриков, то сколько груза X и Y будет доставлено в пункт Б, и какую прибыль получит владелец самолета.

Поскольку цена 74 выше 70, то самолет будет недозагружен: в пункт Б будет отправлено только 10 тонн груза Y, прибыль составит

$$1000-10*P_т = 1000-10*74 = 260 \text{ тугриков.}$$

В) В условиях предыдущего пункта, когда владелец самолета практически принял решение о том, как загрузить самолет, обеспечивая себе при этом получение максимальной прибыли, из пункта Б пришла радиограмма, что груз от предпринимателя X срочно требуется жителям этого населенного пункта, поэтому этого груза следует привезти в количестве не меньшем, чем груза от предпринимателя Y. Потерю прибыли, если она будет, владельцу самолета обещано компенсировать из бюджетных средств пункта Б. Как следует загрузить самолет, учитывая требование жителей поселка Б и какую прибыль теперь может получить владелец самолета?

Требование выполнить условие, сформулированное в радиограмме, добавляет в задачу новое ограничение: X≥Y. Снова нужно проверять две (!) задачи: если загрузка до 10 тонн и если загрузка свыше 10 тонн.

В первом случае было выгодно везти 10 тонн Y, значит, для выполнения условия требуется увеличить X, сокращая Y до тех пор, пока они не сравняются. Согласно ограничению по весу – это будет достигнуто тогда, когда окажется, что X=Y=5.

Прибыль владельца самолета составит в этом случае 90*5+100*5 – 74*10 = 210 тугриков.

Во втором случае в оптимуме 10 тонн X и 8 тонн Y условие жителей пункта Б уже выполнено. Именно это соотношение и будет загрузкой. Прибыль составит:

90*10+100*8 – 74*20 = 220 тугриков.

Получили, что самолет повезет 10 тонн груза X и 8 тонн груза Y, получит прибыль 220 тугриков.

Г) Каким должен быть размер компенсации прибыли?

Из бюджетных средств пункта Б на компенсацию прибыли нужно будет выделить 260-220=40 тугриков.

Критерии (всего 20 баллов)	**Балл**
А) всего 8 баллов	
Определение первой оптимальной точки (0; 10)	3 балла
Определение второй оптимальной точки (10; 8)	3 балла
Получение неравенства для цены топлива ($P_т > 70$) из сравнения прибылей для найденных оптимальных точек	2 балла
Б) всего 4 балла	
Указание, что оптимальной загрузкой самолета будет точка (0; 10)	1 балл
Пояснение выбора указанной точки	2 балла
Вычисление прибыли при этой загрузке (260 тугриков)	1 балл
В) всего 7 баллов	
Определение первой оптимальной точки (5; 5) и прибыли (210)	3 балла
Определение второй оптимальной точки (10; 8) и прибыли (220)	3 балла
Указание – как следует загрузить самолет	1 балл
Г) всего 1 балл	
Определение размера компенсации	1 балл

Председатель оргкомитета,
заместитель министра — В.Н. Щукин

М.П.

ДЛЯ ДОКУМЕНТОВ