

**XXXII Международный экономический фестиваль школьников
«Сибиряда. Шаг в мечту»**

Олимпиада по экономике для учащихся 9-х классов 24.02.2025

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. РЕШЕБНИК

Максимальная сумма баллов – 100.

Задача 1. Инновация в кредит

Царь Кощей, чахнувший над золотом, и его бессменный советник Змей Горыныч организовали фирму «К&Г» по производству игрушечных дракончиков – металлических и деревянных, используя один дефицитный ресурс: труд подданных царя Кощея. Зависимости годовых объемов производства дракончиков от количества используемого труда описываются функциями: $Q_m = \frac{L}{2}$ и $Q_d = \sqrt{L}$, где Q_m и Q_d – это количество произведенных дракончиков по видам в штуках, а L – это количество использованного труда в единицах труда.

Дракончики фирмы «К&Г» пользуются устойчивым спросом и всегда находят своего покупателя. Фирма «К&Г» дорожит своей репутацией и держит стабильные цены уже очень много лет: металлические дракончики всегда продаются по 10 золотых монет за штуку, а деревянные – по 20 золотых монет за штуку.

Работающие на фирме сотрудники формируют общий годовой фонд рабочего времени в размере 100 единиц труда. За использование каждой единицы труда фирма «К&Г» платит 3 золотые монеты в год. Все другие ресурсы, необходимые для производства дракончиков, достаются фирме «К&Г» бесплатно.

1. Горыныч уже доказал, что фирма «К&Г» получит максимальную годовую прибыль, если будет производить деревянных дракончиков в количестве 2 штуки (и вы это можете проверить сами, если захотите). Определите, сколько при этом будет производиться металлических дракончиков, и каким окажется размер максимальной прибыли.

2. Попав в царство Кощея, Иван предложил фирме «К&Г» купить у него за 1000 золотых монет инновационную технологию производства деревянных дракончиков, основанную на ИИ, которая позволяет в 2 раза повысить производительность каждой единицы труда. Выведите уравнение КПВ для фирмы «К&Г», если она внедрит новую технологию в производство, и оцените, на сколько золотых монет вырастет в этом случае её максимальная годовая прибыль.

3. Кощей отказался платить своим золотом за новую технологию, поэтому Горыныч, вдохновившись идеей внедрения инноваций, решил обратиться в Гномий банк за кредитом. Гномы согласились выдать требуемую сумму, но на следующих условиях. Во-первых, кредит выдается сроком на 10 лет под 10% годовых с использованием формулы простого процента. Во-вторых, согласно схеме погашения кредита и выплаты процентов по нему в конце каждого года обязательно должны быть выплачены:

а) проценты на непогашенную сумму кредита, которая числилась за фирмой на начало года (выплата процентов);

б) одна десятая часть первоначальной суммы кредита (гашение кредита).

Ежегодные расходы на погашение кредита и выплату процентов Горыныч рассчитывает осуществлять из прибыли фирмы.

Будет ли хватать этих денег, если на внедрение новой технологии потребуется целый год – то есть в первый год с момента покупки новой технологии производство деревянных дракончиков будет осуществляться по старой технологии, и только со второго года – по новой? Ответ обязательно обоснуйте. Сколько при этом составит переплата по кредиту, т.е. сумма выплаченных банку процентов?

4. Если гномы будут согласны, чтобы фирма «К&Г» досрочно погасила кредит, то за какое минимальное количество лет она сможет рассчитаться по кредиту? Какой в этом случае окажется экономия на процентах?

Примечание. При расчетах платежей банку все числа округляйте до целых в **БОЛЬШУЮ** сторону – Гномий банк не любит, когда ему недоплачивают даже половину золотой монеты.

Решение:

1. Горыныч уже доказал, что фирма «К&Г» получит максимальную годовую прибыль, если будет производить деревянных дракончиков в количестве 2 штуки (и вы это можете проверить сами, если захотите). Определите, сколько при этом будет производиться металлических дракончиков, и каким окажется размер максимальной прибыли.

Поскольку деревянных дракончиков производится всего 2, то количество потраченного на них труда составит (из соответствующей функции):

$$L_d = Q_d^2 = 2^2 = 4 \text{ единиц труда}$$

Значит на металлических дракончиков фирма тратит не более $100 - 4 = 96$ единиц труда.

Один вариант рассуждения: поскольку труд уже фактически закуплен, то максимум прибыли совпадает с максимумом выручки, которая прямо пропорционально зависит от числа произведенных дракончиков. Это означает, что оптимум будет тогда, когда фирма будет использовать весь труд и производить максимум металлических дракончиков.

$$Q_m = \frac{L_m}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ штук}$$

Второй вариант: более математический – записываем прибыль и максимизируем ее:

$$\pi_1 = P_m Q_m + P_d Q_d - 3 * (4 + L_m) = 10 * \frac{L_m}{2} + 20 * 2 - 12 - 3L_m = 28 + 2L_m$$

$\rightarrow \max$

$$\text{при } L_m \leq 96$$

Очевидно, что прибыль достигается при максимально возможном значении $L_m = 96$.

Значит

$$Q_m = \frac{L_m}{2} = \frac{96}{2} = 48$$

Прибыль составит:

$$\pi_1 = P_m Q_m + P_d Q_d - 3 * 100 = 10 * 48 + 20 * 2 - 300 = 520 - 300 = 220$$

золотых монет.

Искать КПВ в этом пункте не нужно, но мы укажем ее тут. На решение и баллы она не влияет:

- Количество труда, которое будет потрачено на металлических игрушечных дракончиков:

$$L_M = 2Q_M$$

- Количество труда, которое будет потрачено на деревянных игрушечных дракончиков:

$$L_D = Q_D^2$$

В сумме количество используемого труда составляет 100:

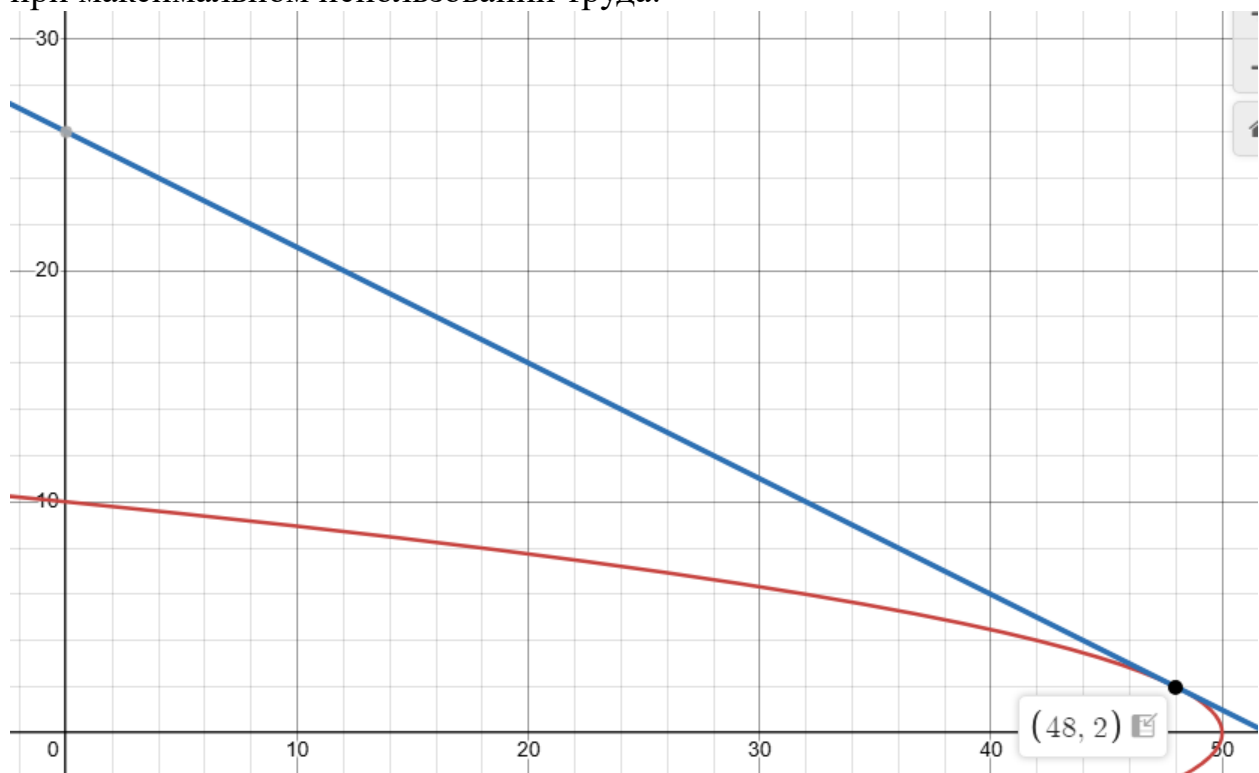
$$L_M + L_D = 100$$

Получаем КПВ:

$$2Q_M + Q_D^2 = 100$$

Или любая другая форма записи, например: $Q_D = \sqrt{100 - 2Q_M}$

Картинка для пункта 1 следующая: красная линия – КПВ, синяя – прибыль при максимальном использовании труда.



2. Выведите уравнение КПВ для фирмы «К&Г», если она внедрит новую технологию в производство, и оцените, на сколько золотых монет вырастет в этом случае её максимальная годовая прибыль.

Здесь нужно определить КПВ, подход тот же, что приведен выше.

Рост производительности труда в 2 раза означает, что количество произведенных деревянных дракончиков теперь определяется функцией

$$Q_D = 2\sqrt{L}$$

Тогда

- Количество труда, которое будет потрачено на металлических игрушечных дракончиков:

$$L_M = 2Q_M$$

- Количество труда, которое будет потрачено на деревянных игрушечных дракончиков:

$$L_d = \frac{Q_d^2}{4}$$

В сумме количество используемого труда составляет 100:

$$L_m + L_d = 100$$

Получаем новая КПВ:

$$2Q_m + \frac{Q_d^2}{4} = 100$$

Или любая другая форма записи, например:

$$Q_d = \sqrt{400 - 8Q_m} \text{ или } Q_m = 50 - \frac{Q_d^2}{8}$$

Запишем прибыль: опять-таки, очевидно, что максимум прибыли получаем, когда используется весь труд – все 100 единиц труда.

$$\begin{aligned} \pi_2 &= P_m Q_m + P_d Q_d - 3 * 100 = 10 * \left(50 - \frac{Q_d^2}{8}\right) + 20Q_d - 300 \\ &= 200 + 20Q_d - 1,25Q_d^2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

Это парабола ветвями вниз, ее максимум достигается в вершине:

$$Q_d = \frac{-20}{2 * (-1,25)} = 8 \text{ деревянных дракончиков}$$

Количество металлических дракончиков (это число не обязательно находить – про него не спрашивают) составит

$$Q_m = 50 - \frac{8^2}{8} = 42 \text{ металлических дракончика}$$

Прибыль составит

$$\pi_2 = P_m Q_m + P_d Q_d - 3 * 100 = 10 * 42 + 20 * 8 - 300 = 280$$

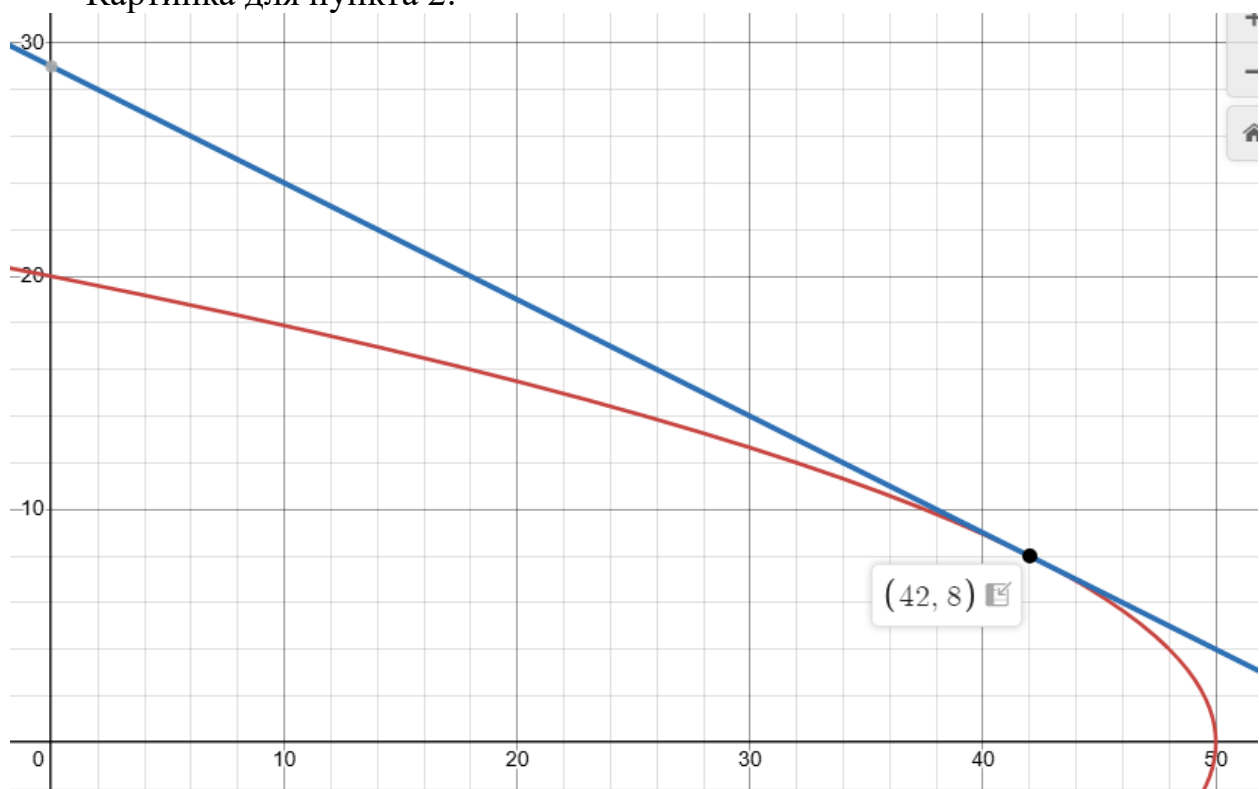
или

$$\pi_2 = 200 + 20Q_d - 1,25Q_d^2 = 200 + 20 * 8 - 1,25 * 8^2 = 280$$

Искомый прирост прибыли:

$$\pi_2 - \pi_1 = 280 - 220 = 60 \text{ золотых монет}$$

Картинка для пункта 2:



3. Будет ли хватать этих денег, если на внедрение новой технологии потребуется целый год – то есть в первый год с момента покупки новой технологии производство деревянных дракончиков будет осуществляться по старой технологии, и только со второго года – по новой? Ответ обязательно обоснуйте. Сколько при этом составит переплата по кредиту, т.е. сумма выплаченных банку процентов?

При указанной схеме очевидно, что платежи будут уменьшаться со временем, так как уменьшается непогашенная часть, на которую начисляются проценты. Поэтому для ответа на вопрос нужно лишь показать, что первый (самый большой – в нем проценты начисляются на максимальную сумму в 1000 золотых монет) платеж меньше прибыли, получаемой без использования новой технологии – меньше 220.

Тут все просто: в конце первого года нужно оплатить по кредиту:

$$10\% \cdot 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 200 \text{ золотых монет}$$

Поэтому предприятию хватит прибыли для обслуживания такого кредита (тем более, что со второго года прибыль будет составлять 280 монет).

Переплата по кредиту – это сумма выплаченных процентов:

- проценты за первый год: $10\% \cdot 1000 = 100$

- проценты за второй год: $10\% \cdot 900 = 90$

- проценты за третий год: $10\% \cdot 800 = 80$

и так далее...

- проценты за последний десятый год: $10\% \cdot 100 = 10$

Получаем сумму переплаты:

$$100 + 90 + 80 + 70 + 60 + 50 + 40 + 30 + 20 + 10 = 550 \text{ золотых монет}$$

4. Если гномы будут согласны, чтобы фирма «К&Г» досрочно погасила кредит, то за какое минимальное количество лет она сможет рассчитаться по кредиту? Какой в этом случае окажется экономия на процентах?

Чтобы погасить кредит за минимальное количество лет фирма должна направлять всю прибыль на его погашение.

Расчеты удобно представить в табличном виде:

Год	Величина кредита на начало года	Начисленный процент	Выплата по основной части кредита	Полный платеж за год	Величина кредита на конец года – после платежа
-	$(1)_{i+1} = (5)_i$	$(2) = 10\% \cdot (1)$	$(3) = 0,1 \cdot 1000$	$(4) = (2) + (3)$	$(5)_i = (1)_i - (3)$
1	1000	100	120	220	880
2	880	88	192	280	688
3	688	69	211	280	477
4	477	48	232	280	245
5	245	25	245	270	0
Сумма	–	330	1000	1330	–

Жирным курсивом выделены цифры, которые в соответствии с условием нужно «округлять»:

- процент третьего года $10\% \cdot 688 = 68,8$ – округляем до 69 – в большую сторону по требованию Гномьего банка.

- процент четвертого года $10\% \cdot 477 = 47,7$ – до 48.

- процент пятого года $10\% \cdot 245 = 24,5$ – до 25.

Получили, что минимальное необходимое количество лет – пять! Заметим также, что уже не вся прибыль пятого года нужна – у фирмы 10 золотых монет даже осталось.

Переплата составит 330 золотых монет – на 220 монет меньше, чем если бы погашали все 10 лет. Эти 220 монет и есть искомая экономия.

Критерии (всего 20 баллов)	Балл
1) всего 3 баллов	
Количество производимых металлических дракончиков (48 штук)	2 балла
Прибыль (220 золотых монет)	1 балл
2) всего 6 баллов	
Уравнение КПВ	3 балла
Определение Q_d (и/или Q_m) ($Q_d = 8$, $Q_m = 42$)	2 балла
Прирост прибыли (60 золотых монет) - за саму прибыль (280 монет) без указания прироста – балл не ставится	1 балл
3) всего 5 баллов	
Ответ и обоснование – будет ли хватать денег	2 балла
Расчет всех процентов	2 балла
Сумма переплаты (550 монет)	1 балл
4) всего 6 баллов	
Составление графика платежей - забыли округлить – ставим только 1 балл из трех!	3 балла
Количество лет (5 лет)	1 балл
Сумма переплаты (330 монет)	1 балл
Экономия (220 монет)	1 балл

Задача 2. Ювелирный бизнес Бельчонок

Летом Бельчонок собрал хороший урожай орешков с золотыми скорлупками - целых 200 кг! 75% орешков он продал по цене 40 тугриков за килограмм. Он мог бы, да и сейчас может, по этой цене продать все орешки, но по совету мамы решил в осенне-зимний сезон попробовать наладить производство золотых браслетов, используя ценные скорлупки.

Необходимый инструмент Бельчонок купил еще весной за 500 тугриков. По заверениям продавца этот инструмент очень хороший и точно прослужит 5 рабочих сезонов.

Бельчонок также предварительно договорился с Лешим об изготовлении партии специальных застежек ко всем браслетам, однако Леший требует стопроцентную предоплату в размере 800 тугриков. У Бельчонка есть немного денег на накопительном счете в Лесном банке, но только 200 тугриков он готов снять, чтобы заплатить Лешему, поэтому остальную сумму придется занимать у Кикиморы, пообещав ей погасить долг полностью через полгода с процентами (за это время Бельчонок намерен произвести и реализовать все браслеты).

Лесные феи готовы помогать Бельчонку в изготовлении браслетов, с ними он договорился, что заплатит за работу 700 тугриков, но только после того, как продаст браслеты.

Папа Бельчонка отговаривает сына от занятия собственным бизнесом, и даже нашел для него на выбор две отличные вакансии на этот период – инструктором по прыжкам с дерева на дерево за 560 тугриков или менеджером в цех по фасовке орехов за 440 тугриков. Но оплата только по завершению осенне-зимнего сезона.

Когда браслеты будут готовы (их должно получиться 1000 штук) Бельчонок оптом хочет продать их Кощею, но они пока не согласовали цену готового браслета.

Примечание. Свободные деньги Бельчонок всегда хранит на накопительном счете. За сезон (6 месяцев) накопительный счет обеспечивает доходность 10%. Проценты по долгу Кикиморе составят 20% от суммы займа.

А) Рассчитайте бухгалтерские издержки Бельчонка за осенне-зимний сезон, оформив сам расчет и результаты расчета **ОБЯЗАТЕЛЬНО** в виде таблицы:

Название статьи (вида) бухгалтерских издержек	Величина бухгалтерских издержек соответствующего вида (в тугриках)

Б) Рассчитайте неявные издержки Бельчонка за осенне-зимний сезон, оформив сам расчет и результаты расчета **ОБЯЗАТЕЛЬНО** тоже в виде таблицы:

Название статьи (вида) неявных издержек	Величина неявных издержек соответствующего вида (в тугриках)

В) Рассчитайте и обоснуйте, какой должна быть минимальная цена браслета, чтобы данный вид бизнеса Бельчонок однозначно назвал бы выгодным для себя.

Решение

А) Расчет бухгалтерских (явных) издержек.

Название статьи (вида) бухгалтерских издержек	Величина бухгалтерских издержек соответствующего вида (в тугриках)
Материальные затраты (стоимость застежек, купленных у Лешего)	800
Оплата труда (зарплата фей)	700
Амортизация (износ инструмента)	$500/5=100$
Прочие (проценты Кикиморе)	$600*0,2=120$
ВСЕГО	1720

Б) Расчет неявных издержек.

Название статьи (вида) неявных издержек	Величина неявных издержек соответствующего вида (в тугриках)
Неполученная плата за орешки	$200*0,25*40=2000$

Неполученные проценты за неполученную плату за орешки	$2000 \cdot 0,1 = 200$
Неполученные проценты за свои деньги, снятые с накопительного счета и переданные Лешему за застежки	$200 \cdot 0,1 = 20$
Неполученная зарплата по лучшему варианту трудоустройства	$\max(560; 440) = 560$
ВСЕГО	2780

В) Общая сумма экономических издержек составит $1720 + 2780 = 4500$ тугриков.

Чтобы бизнес оказался выгодным необходимо, чтобы **выручка покрывала все экономические издержки, т.е. и явные, и неявные**. А это значит, что должно выполняться строгое неравенство: $P \cdot 1000 > 4500$, где P – это цена браслета в тугриках. Отсюда следует, что $P > 4,5$, или цена должна быть больше 4,5 тугриков, например, 4,6 тугриков.

Критерии

А) За каждый правильный элемент бухгалтерских издержек с их названием (материальные затраты и оплата труда) по 1 баллу, (амортизация и проценты за кредит) по 2 балла, за верную сумму бухгалтерских издержек 1 балл, (за отнесение расходов на погашение кредита к бухгалтерским издержкам – штраф 1 балл).	7 баллов
Б) За каждый правильный элемент неявных издержек с их названием и расчетом по 2 балла, за верную сумму неявных издержек 1 балл.	9 баллов
В) Обоснование соотношения, определяющего выгодность бизнеса (2 балла). Расчет минимальной цены браслета (2 балла). P.S. Если расчет сумм бухгалтерских и неявных издержек делался в пункте В, то соответствующие баллы (2 балла) могут быть учтены в пункте В.	4 балла

Задача 3. Вкусные наборы от Глафиры (7-8-9 классы)

Глафира по оптовым ценам закупает коробки с пирожными у кондитера Полины, а коробки с кексиками у кондитера Кристины. И пирожные, и кексики кондитеры пакуют в стандартные коробки одинаковой вместимости, т.е. в стандартную коробку вмещается одинаковое количество или пирожных, или кексиков. Оптовая цена такой коробки с пирожными равна 40 тугриков, а коробки с кексиками – 50 тугриков.

Каждое утро коробки со свежими пирожными Глафире привозит курьер Петя, за услугу доставки он получает 380 тугриков. Коробки с кексиками также каждое утро Глафире привозит курьер Коля, получая за услугу доставки 200 тугриков. Известно, что каждый из курьеров может ежедневно привозить не более 12 стандартных коробок с кондитерскими изделиями.

Из пирожных и кексиков Глафира формирует фирменные ассорти-наборы, упаковывает их в красивые подарочные коробки и продает по цене 60 тугриков за

коробку. Вместимость такой подарочной коробки ровно в два раза меньше вместимости стандартных коробок, в которых Глафира получает пирожные и кексики от кондитеров.

Соотношение видов кондитерских изделий в подарочной коробке «от Глафиры» – 60% изделий одного вида и 40% другого.

Определите, какую максимальную прибыль ежедневно получает расчетливая Глафира от торговли ассорти-наборами, если известно, что к концу дня все эти наборы всегда оказываются распроданы.

Решение

Пусть P – это количество коробок с пирожными, которые ежедневно закупает Глафира, тогда затраты на их покупку будут равны $(40P+380)$ тугриков.

Пусть K – это количество коробок с кексиками, которые ежедневно закупает Глафира, тогда затраты на их покупку будут равны $(50K+200)$ тугриков.

Чтобы сделать как можно большее количество коробок с ассорти-наборами, Глафире нужно закупать 12 стандартных коробок кондитерских изделий того вида, которое обеспечивает 60% содержимого подарочной коробки. Значит, кондитерских изделий другого вида надо закупать $((12/0,6) \cdot 0,4) = 8$ стандартных коробок. Всего тогда будет закуплено $12+8=20$ стандартных коробок, а из них сформировано $20 \cdot 2 = 40$ ассорти-наборов. Дневная выручка от их продажи составит $60 \cdot 40 = 2400$ тугриков.

Возможны два варианта формирования ассорти-наборов.

1-й вариант: 60% пирожных и 40% кексиков.

Расходы на формирование этого набора $(40 \cdot 12 + 380) + (50 \cdot 8 + 200) = 860 + 600 = 1460$ тугриков

2-й вариант: 40% пирожных и 60% кексиков.

Расходы на формирование этого набора $(40 \cdot 8 + 380) + (50 \cdot 12 + 200) = 700 + 800 = 1500$ тугриков

Более дешевым является 1-й вариант, значит, Глафира может получить максимум прибыли $2400 - 1460 = 940$ тугриков.

Обоснование выгоды 1-го варианта можно было сделать другим способом. Запишем функцию прибыли Глафиры как $Pr = 2400 - (40P + 50K + 380 + 200) \rightarrow \max$. Теперь необходимо понять, чего Глафире следует закупать больше - пирожных или кексиков. Сразу отметим, что стоимость доставки на выбор не влияет, так как в любом случае за обе доставки надо платить фиксированную сумму. А чтобы прибыль была максимальной надо закупать больше таких коробок, цена которых меньше, т.е. надо закупать больше коробок с пирожными. Этот вывод становится очевидным, если записать функцию прибыли следующим образом $Pr = 2400 - (40P + 50(20 - P) + 380 + 200) \rightarrow \max$, или $Pr = 820 + 10P \rightarrow \max$, т.е.

Критерии

Определение общего количества реализуемых ассорти-наборов	5 баллов
Расчет выручки от продажи ассорти-наборов	2 балла
Расчет затрат по 1-му варианту формирования набора	5 баллов
Расчет затрат по 2-му варианту формирования набора или другое обоснование выгоды 1-го варианта	5 баллов
Расчет максимальной прибыли	3 балла

Задача 4. Волшебный горшочек

В царстве Кощеевом был найден волшебный бездонный горшочек, который, если поместить в него в течение дня некоторую (любую) сумму золотых монет, в конце дня выдаст сумму в десять раз большую. Но беда – горшочек способен работать лишь три дня, а потом становится обычным горшком.

Царь Кощей, будучи в хорошем настроении, пригласил всех сказочных жителей, которых в царстве ровно сотня, на двухдневный съезд, чтобы они, взяв с собой ровно по 100 золотых монет, смогли «подзаработать». Третий день работы горшочка царь посвятит умножению своего злата.

На съезде жители договорились, что каждый из них в начале дня подойдет к горшочку один раз и положит в него золотые монеты (каждый житель может вложить любое количество своих золотых монет или не положить ничего), а в конце дня все монеты, которые горшочек выдаст, будут поделены поровну между всеми жителями.

1. Если каждый сказочный житель заботится только о своем кошельке, то какую, по вашему мнению, оптимальную стратегию вложений в горшочек он выберет? Каким будет количество монет у каждого жителя в конце первого дня съезда? Ответы поясните.

2. Реализовав стратегию пункта (1) и посмотрев на свое количество монет в конце первого дня, сказочные жители остались недовольны, а царь Кощей был особенно недоволен тем, что его подданные так бездарно потеряли один день, который он мог бы использовать на преумножение своего злата, если бы предвидел, что его подданные такие неразумные.

Поэтому в начале второго дня на съезде царь объявил: «Каждый должен положить в горшочек не меньше A золотых монет. Тот, кто вложит меньшую сумму, должен заплатить штраф 45 золотых монет», и попросил своего любимого советника Змея Горыныча следить и штрафовать. Если Горыныч заметил (а он все замечает – у него же три пары глаз), что житель положил меньше назначенной суммы, то штраф волшебным образом сразу взимается с жителя в Кощеев сундук. Какое максимальное значение может принимать A , чтобы, следуя своей оптимальной стратегии, жители вкладывали в горшочек ненулевое количество монет. Сколько при этом золотых монет будет в конце второго дня у каждого жителя при условии, что они по-прежнему руководствуются своими личными интересами?

3. Определите, какой штраф должен был бы назначить Кощей, чтобы жители получили максимально возможное количество золотых монет от горшочка во второй день? Чему равен этот максимум?

Решение.

1. Если каждый сказочный житель заботится только о своем кошельке, то какую, по вашему мнению, оптимальную стратегию вложений в горшочек он выберет? Каким будет количество монет у каждого жителя в конце первого дня съезда? Ответы поясните.

Один вариант решения – рассуждения:

Согласно условию задачи, каждый житель заботится о своем кошельке – хочет иметь в нем максимум монет. То, сколько будут вкладывать другие, будет восприниматься жителем как некоторая данность:

«Я не могу повлиять на стратегии других. Если вложу C , то обратно получу (с учетом распределения этого C равномерно по всем) $0,1C$, то есть «имею» от вложения $-0,9C$ – при любом положительном C я теряю, поэтому вкладывать не захочу. Моя оптимальная стратегия «**вложить 0**».

Второй вариант решения – математический:

Пусть c_i – величина вклада i -ого жителя. Тогда общее его количество монет к концу дня составит:

$$100 - c_i + \frac{10 \text{ раз}}{100 \text{ жителей}} * \sum_{j=1}^{100} c_j$$

Немного перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} 100 - c_i + \frac{10 \text{ раз}}{100 \text{ жителей}} * \sum_{j=1}^{100} c_j &= 100 - c_i + \frac{1}{10} * \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{100} c_j + \frac{1}{10} c_i = \\ &= 100 + \frac{1}{10} * \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} c_i \rightarrow \max_{c_i} \end{aligned}$$

Эта величина линейно (отрицательно) зависит от c_i , значит максимум этой величины достигается при $c_i = 0$ – i -ому жителю не нужно ничего вкладывать в горшочек – это и есть оптимальная стратегия.

Ответ на второй вопрос пункта сформулируем так:

Поскольку рассматривался «любой» житель, то все поступят также – вложат 0. Горшочек выдаст 0. У каждого в конце дня останется 100 монет.

2. Какое максимальное значение может принимать A , чтобы, следуя своей оптимальной стратегии, жители вкладывали в горшочек ненулевое количество монет. Сколько при этом золотых монет будет в конце второго дня у каждого жителя при условии, что они по-прежнему руководствуются своими личными интересами?

Пусть c_i – величина вклада i -ого жителя. A – это величина, начиная с которой по задумке царя Горыныч начинает штрафовать. Тогда количество монет у жителя к концу дня составит:

$$\pi_i = \begin{cases} 100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} c_i, & \text{если } c_i \geq A \\ 100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} c_i - 45, & \text{если } c_i < A \end{cases}$$

Жители знают, что их оптимальная стратегия – вкладывать как можно меньше (следует из первого пункта задачи), а также знают границу A . Поэтому их оптимальные стратегии: чтобы не получить штраф, нужно вложить в точности A (из первого выражения – минимальное значение c_i), а при штрафе – ничего не вкладывать (аналогично из второго выражения).

Царь хочет, чтобы жители вкладывали деньги в горшочек, то есть чтоб их количество монет при вложении A без штрафа было больше (не меньше), чем если бы они решили все же платить штраф.

$$100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} A \geq 100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - 45$$

Отсюда

$$\frac{9}{10} A \leq 45$$

$$A \leq 50$$

Получаем, что **максимальная** сумма денег, которую при штрафе 45 назначил царь, должна составлять 50 золотых монет. В ситуации $A = 50$, царь фактически предлагает жителям две стратегии ($c_i = 0$ и $c_i = 50$), при которых они будут получать одинаковое количество монет. Ненулевое вложение равно 50 золотых монет.

Значит, итоговая оптимальная стратегия тут «вкладывать в горшочек 50 монет». К концу дня каждый житель будет иметь

$$100 - 50 + \frac{10 * (100 * 50)}{100} = 550 \text{ монет.}$$

В следующей таблице (она не обязательна) показано, как в зависимости от величины A меняется количество монет у жителя i , если он решает не вкладывать ничего, в то время как остальные вкладывают A , и если он вкладывает как и все A монет.

Штраф	Граница A	Все A, житель 0 и штраф	Все A
45	0	55	100
45	1	64,9	109
45	2	74,8	118
45	3	84,7	127
45	42	470,8	478
45	43	480,7	487
45	44	490,6	496
45	45	500,5	505
45	46	510,4	514
45	47	520,3	523
45	48	530,2	532
45	49	540,1	541
45	50	550	550
45	51	559,9	559
45	52	569,8	568
45	98	1025,2	982
45	99	1035,1	991
45	100	1045	1000

Как раз получается, что если при штрафе 45 устанавливать максимальное значение больше 50, то жителю точно «выгоднее» ничего не вкладывать и

заплатить штраф, а до 50 наоборот – выгодно платить по указанной «границе» (при $A = 50$ – жителю безразлично, по условию – он вложит ненулевое).

3. Определите, какой штраф должен был бы назначить Кощей, чтобы жители получили максимально возможное количество золотых монет от горшочка во второй день? Чему равен этот максимум?

Чтобы получить максимально возможное количество золотых монет, нужно, чтобы каждый житель вложил максимальное количество монет – на начало второго дня это 100 монет. То есть значение A должно равняться 100.

Тогда величину штрафа T Кощей должен назначить из условия, чтобы количество монет у жителя при вложении 100 монет без штрафа было больше (не меньше), чем если бы они решили все же платить штраф.

$$100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - \frac{9}{10} \cdot 100 \geq 100 + \frac{1}{10} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{100} c_j - T$$

$$-90 \geq -T$$

$$T \geq 90$$

Получили, что штраф не должен быть меньше 90 золотых монет – при таком штрафе выгоднее каждому (и в результате всем) вкладывать все 100 монет.

Максимум, который в результате получит каждый житель, составит 1000 золотых монет (суммарно 100 тыс. монет).

В следующей таблице (она не обязательна) показано, что при значении $A = 100$ начиная с величины штрафа 90 каждый житель будет получать от вложения A монет в горшочек не меньше монет, чем в ситуации оплаты штрафа (при 90 – ситуация безразличия, при 91 и выше – получает строго больше).

Штраф	Граница A	Все A , житель 0 и	Все A
88	100	1002	1000
89	100	1001	1000
90	100	1000	1000
91	100	999	1000
92	100	998	1000
93	100	997	1000
94	100	996	1000
95	100	995	1000
96	100	994	1000
97	100	993	1000
98	100	992	1000
99	100	991	1000
100	100	990	1000

Критерии (всего 20 баллов)	Балл
1) всего 5 баллов	
Полное решение	5 баллов
Если обоснование стратегии неполное, то за пункт только	3 балла
Забыли указать стратегию жителя	-1 балл

Забыли указать сколько монет у жителя	–1 балл
2) всего 10 баллов	
Полное решение:	10 баллов
число А	8 баллов
количество монет	2 балла
Если не указано, что «всем вкладывать А – это оптимальная стратегия при отсутствии штрафа»	1 из 8 баллов
Если вышли на 50 без неравенства – нет обоснования, что это максимальное значение	4 из 8 баллов
Если (при вычислении А) сопоставляли «количество денег», но оно не учитывало вложений других – смысловая ошибка, почти всегда приводящая не к числу 50	0 из 8 баллов
3) всего 5 баллов	
Полное решение:	5 баллов
вычисление штрафа (неравенство / диапазон)	3 балла
указание полученного жителем/-ями максимума монет	2 балла
Если указали «штраф равен 100», то за соответствующий пункт	0 из 3 баллов
Если вышли на 90 без неравенства – нет указания, что это только одно из возможных значений штрафа	2 из 3 баллов
Ошибка, приводящая к 1 или 0 баллов из 8 во втором пункте – здесь не учитывалась (учли один раз)	–
Указали, что нужно вложить максимум (100 монет), но не написали – сколько монет в результате будет у жителя/жителей	–1 балл

Задача 5. Загрузка самолета 9-11

К владельцу небольшого частного самолета обратились два предпринимателя (X и Y) с просьбой доставить их грузы из пункта А и пункт Б. Общий вес груза, который хочет отправить предприниматель X, составляет 15 тонн, и за доставку каждой тонны груза X он готов заплатить 90 тугриков. У предпринимателя Y 12 тонн груза, готового к отправке, и за доставку каждой тонны своего груза он готов заплатить 100 тугриков. Известно, что самолет может взять на борт до 18 тонн груза, при этом объем грузового отсека составляет всего 80 кубических метров. Объем, занимаемый одной тонной груза предпринимателя X, равен 4-м кубическим метрам, а предпринимателя Y – 5-ти кубическим метрам.

Самолету требуется топливо – керосин, при этом расход топлива при разной загрузке самолета различается: если общий вес груза 10 тонн и меньше то самолету на полет из пункта А в пункт Б хватит 10 тонн керосина, а если общий вес груза больше 10 тонн, то нужно уже 20 тонн топлива. Керосин для полета нужно покупать у владельца аэропорта, по цене P_T тугриков за тонну, которую он устанавливает, руководствуясь своими интересами. Предполагается, что других расходов, кроме расходов на закупку топлива, у владельца самолета нет.

А) Владелец аэропорта очень хочет заполучить весь груз предпринимателя X, однако тот готов продать ему только ту часть груза, которая останется после отправки самолета. Определите, какую цену на топливо стоит назначить владельцу аэропорта, чтобы весь груз X достался ему.

Б) Если цена на топливо будет установлена на уровне 74 тугрика за тонну, то сколько груза от каждого из предпринимателей будет доставлено в пункт Б, и какую прибыль от этого полета получит владелец самолета?

В) В условиях предыдущего пункта, когда владелец самолета практически принял решение о том, как загрузить самолет, обеспечивая себе при этом получение максимальной прибыли, из пункта Б пришла радиограмма, что груз от предпринимателя X срочно требуется жителям этого населенного пункта, поэтому этого груза следует привезти в количестве не меньшем, чем груза от предпринимателя Y. Потерю прибыли, если она будет, владельцу самолета обещано компенсировать из бюджетных средств. Рассчитайте, как следует загрузить самолет, учитывая просьбу жителей поселка Б, и какую прибыль теперь может получить владелец самолета.

Г) Оцените, каким должен быть размер компенсации потери прибыли.

Решение

А) Владелец аэропорта очень хочет получить груз X, однако предприниматель X готов продать ему только ту часть груза, что не увезет самолет. Определите, какую цену на топливо стоит назначить владельцу аэропорта, чтобы весь груз X достался ему.

Владелец самолета фактически решает две задачи максимизации своей прибыли – одна, если загрузка не превысит 10 тонн, вторая при загрузке, превышающей 10 тонн, – так как в этих ситуациях разный расход топлива.

Первая задача простая:

$X \leq 15$ (ограничение на вес груза от предпринимателя X)

$Y \leq 12$ (ограничение на вес груза от предпринимателя Y)

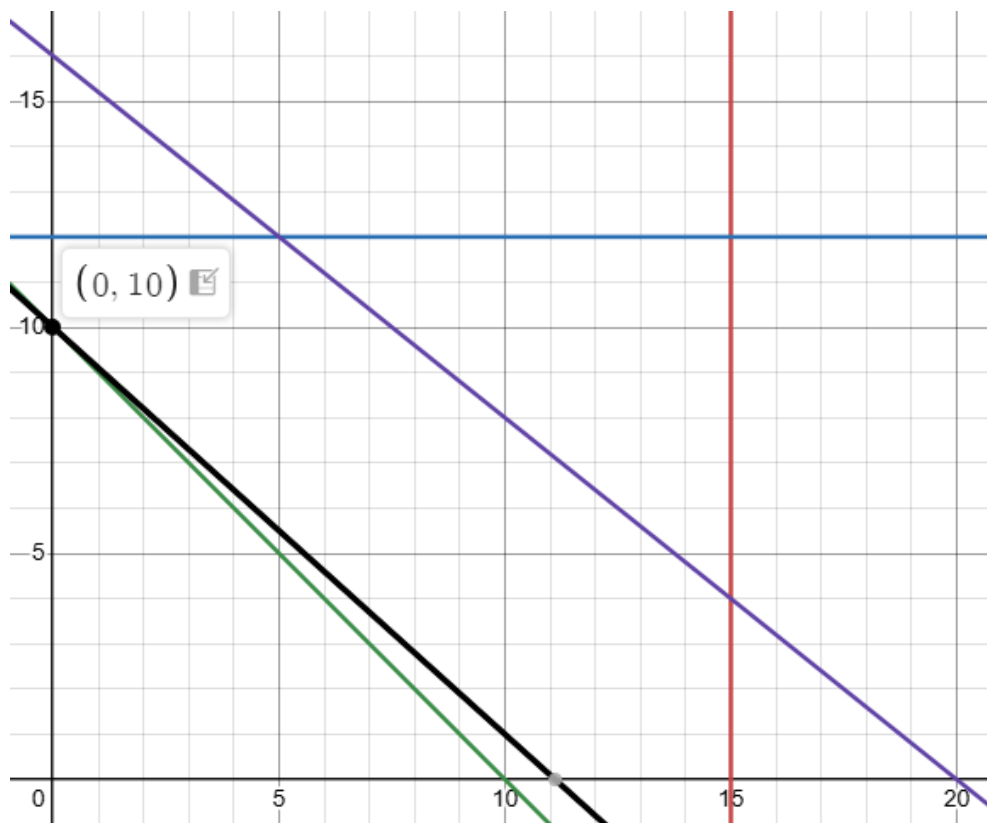
$X + Y \leq 10$ (ограничение на вес груза для величины топлива – 10 тонн)

$4X + 5Y \leq 80$ (ограничение на объем груза)

При этом целевая функция – максимум прибыли будет иметь вид.

$90X + 100Y - P_T * 10 \rightarrow \max$

В зависимости от цены на топливо меняется прибыль, но наклон линии остается неизменным и оптимальной загрузкой самолета в этом случае будет: 0 тонн груза X и 10 тонн груза Y.



Вторая задача тоже достаточно простая:

$X \leq 15$ (ограничение на вес груза от предпринимателя X)

$Y \leq 12$ (ограничение на вес груза от предпринимателя Y)

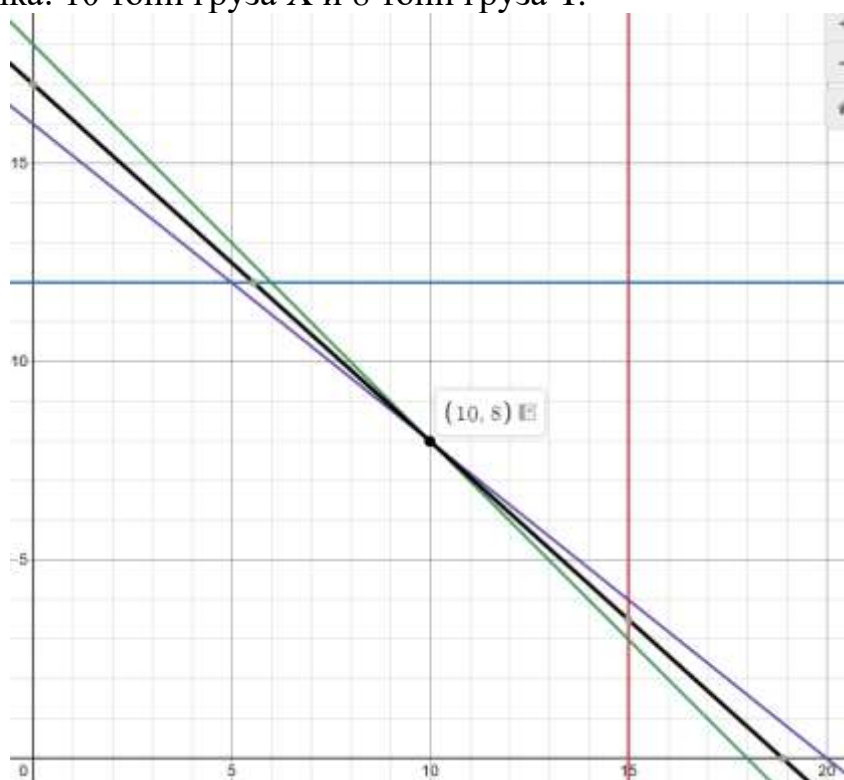
$X + Y \leq 18$ (ограничение на вес груза для самолета и для величины топлива – 20 тонн)

$4X + 5Y \leq 80$ (ограничение на объем груза)

При этом целевая функция – максимум прибыли будет иметь вид.

$90X + 100Y - P_T * 20 \rightarrow \max$

Также в зависимости от цены на топливо меняется прибыль, но оптимальной будет одна точка: 10 тонн груза X и 8 тонн груза Y.



Первая точка, отвечающая интересам владельца аэропорта, будет выбрана владельцем самолета, если прибыль в ней будет не меньше (а лучше – больше), чем во второй:

$$\begin{aligned}90 * 0 + 100 * 10 - 10 * P_T &> 90 * 10 + 100 * 8 - 20 * P_T \\1000 - 10 * P_T &> 1700 - 20 * P_T \\10 * P_T &> 700 \\P_T &> 70\end{aligned}$$

Получили, что владельцу аэропорта, если он хочет получать весь груз X, нужно установить цену выше 70 тугриков за тонну керосина.

Б) Если цена на топливо будет установлена на уровне 74 тугриков, то сколько груза X и Y будет доставлено в пункт Б, и какую прибыль получит владелец самолета.

Поскольку цена 74 выше 70, то самолет будет недозагружен: в пункт Б будет отправлено только 10 тонн груза Y, прибыль составит

$$1000 - 10 * P_T = 1000 - 10 * 74 = 260 \text{ тугриков.}$$

В) В условиях предыдущего пункта, когда владелец самолета практически принял решение о том, как загрузить самолет, обеспечивая себе при этом получение максимальной прибыли, из пункта Б пришла радиграмма, что груз от предпринимателя X срочно требуется жителям этого населенного пункта, поэтому этого груза следует привезти в количестве не меньшем, чем груза от предпринимателя Y. Потерю прибыли, если она будет, владельцу самолета обещано компенсировать из бюджетных средств пункта Б. Как следует загрузить самолет, учитывая требование жителей поселка Б и какую прибыль теперь может получить владелец самолета?

Требование выполнить условие, сформулированное в радиграмме, добавляет в задачу новое ограничение: $X \geq Y$. Снова нужно проверять две (!) задачи: если загрузка до 10 тонн и если загрузка свыше 10 тонн.

В первом случае было выгодно возить 10 тонн Y, значит, для выполнения условия требуется увеличить X, сокращая Y до тех пор, пока они не сравняются. Согласно ограничению по весу – это будет достигнуто тогда, когда окажется, что $X=Y=5$.

Прибыль владельца самолета составит в этом случае $90*5+100*5 - 74*10 = 210$ тугриков.

Во втором случае в оптимуме 10 тонн X и 8 тонн Y условие жителей пункта Б уже выполнено. Именно это соотношение и будет загрузкой. Прибыль составит:

$$90*10+100*8 - 74*20 = 220 \text{ тугриков.}$$

Получили, что самолет повезет 10 тонн груза X и 8 тонн груза Y, получит прибыль 220 тугриков.

Г) Каким должен быть размер компенсации прибыли?

Из бюджетных средств пункта Б на компенсацию прибыли нужно будет выделить $260-220=40$ тугриков.

Критерии (всего 20 баллов)

Балл

А) всего 8 баллов	
Определение первой оптимальной точки (0; 10)	3 балла
Определение второй оптимальной точки (10; 8)	3 балла
Получение неравенства для цены топлива ($P_T > 70$) из сравнения прибылей для найденных оптимальных точек	2 балла
Б) всего 4 балла	
Указание, что оптимальной загрузкой самолета будет точка (0; 10)	1 балл
Пояснение выбора указанной точки	2 балла
Вычисление прибыли при этой загрузке (260 тугриков)	1 балл
В) всего 7 баллов	
Определение первой оптимальной точки (5; 5) и прибыли (210)	3 балла
Определение второй оптимальной точки (10; 8) и прибыли (220)	3 балла
Указание – как следует загрузить самолет	1 балл
Г) всего 1 балл	
Определение размера компенсации	1 балл

Председатель оргкомитета,
заместитель министра



В.Н. Щукин