

**XXVII Межрегиональный экономический фестиваль школьников
«Сибиряда. Шаг в мечту»
Олимпиада по экономике для учащихся 11х классов 26.02.2020
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

Продолжительность работы – 240 минут.

Максимальное количество баллов за тур – 100

Каждая задача оценивается из 20 баллов

Задача 1. Лекарство для борьбы с коронавирусом (20 баллов)

В стране Болезнии в прошлом году было налажено производство очень необходимой всем живой и мертвой воды, предназначенной для борьбы с коронавирусом. Для ее изготовления используется уникальное сырье, которое является единственным лимитирующим ресурсом. Ежемесячно местные жители добывают 1800 кг этого сырья, и все оно идет в дальнейшую переработку на местном заводике. Для изготовления одной бутылки с живой водой требуется 8 кг, а для изготовления одной бутылки с мертвой водой нужно 2 кг этого уникального сырья. Полезные свойства воды проявляются лишь тогда, когда одновременно используются одна бутылка с живой и две бутылки с мертвой водой, поэтому сам лечебный препарат комплектуется соответствующим образом — так получается одна порция лекарственного препарата.

А) Определите, сколько бутылей с живой и мертвой водой целесообразно производить на местном заводике из сырья, добываемого жителями Болезнии, чтобы получить своими силами максимальное число порций лекарственного препарата. Сколько порций лекарственного препарата при этом может быть получено?

Б) В этом году в соседней стране Хворобии тоже наладили производство живой и мертвой воды. Теперь Хворобия и Болезния могут обмениваться живой и мертвой водой. При этом 1 бутылка с живой водой всегда можно обменять на 3 бутылки с мертвой водой, и наоборот (Хворобия согласна на обмен любого количества бутылей в такой пропорции). Определите, сколько какой воды теперь следует производить местному заводу в Болезнии, сколько какой воды целесообразно использовать для обмена с Хворобией, и какое максимальное количество порций лекарственного препарата можно получить.

В) В целях обеспечения национальной безопасности правительством Болезнии было принято решение осуществлять производство 60 порций лекарственного препарата исключительно силами местного заводика с использованием только отечественного сырья. Определите, сколько какой воды теперь должен производить местный заводик в Болезнии, сколько какой воды в новых условиях будет использоваться для обмена с Хворобией, и какое максимальное количество порций лекарственного препарата можно будет получить.

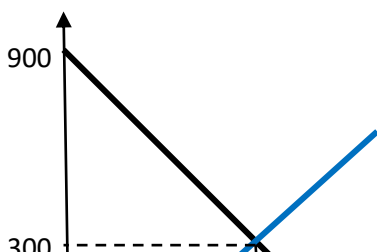
Решение:

А) Пусть X – это количество бутылей с живой водой, а Y – это количество бутылей с мертвой водой. Тогда можно записать ограничение, формирующее границу производственных возможностей заводика в Болезнии следующим образом: $8X+2Y=1800$, или $Y=900-4X$.

Комплектность лекарственного препарата, предназначенного для борьбы с коронавирусом, определяется уравнением $Y=2X$.

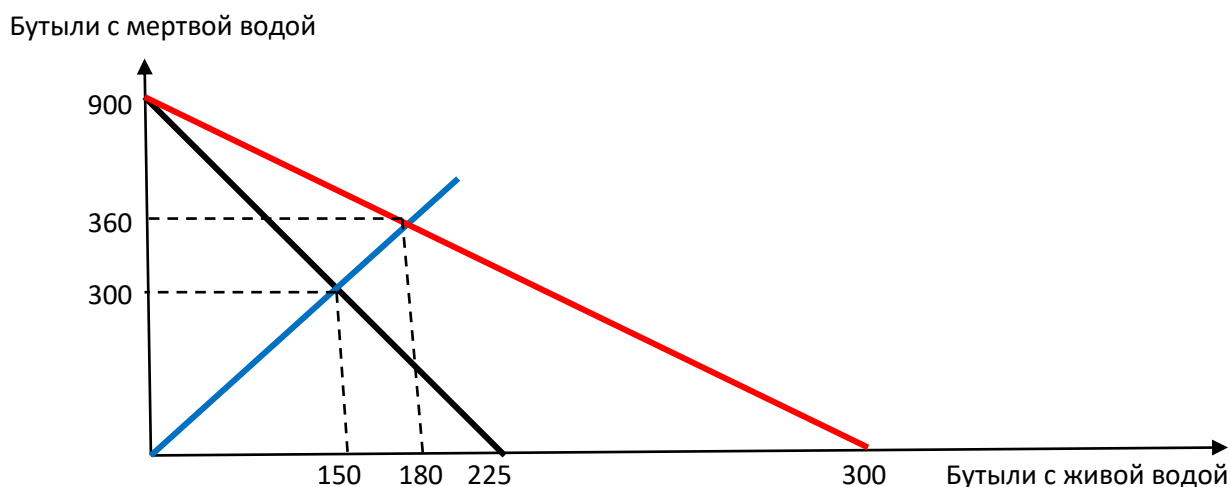
Из равенства $900-4X=2X$, находим, что $X=150$ бутылей с живой водой, а $Y=300$ бутылей с мертвой водой. Значит, количество комплектов с лечебным препаратом будет равно 150.

Бутылки с мертвой водой



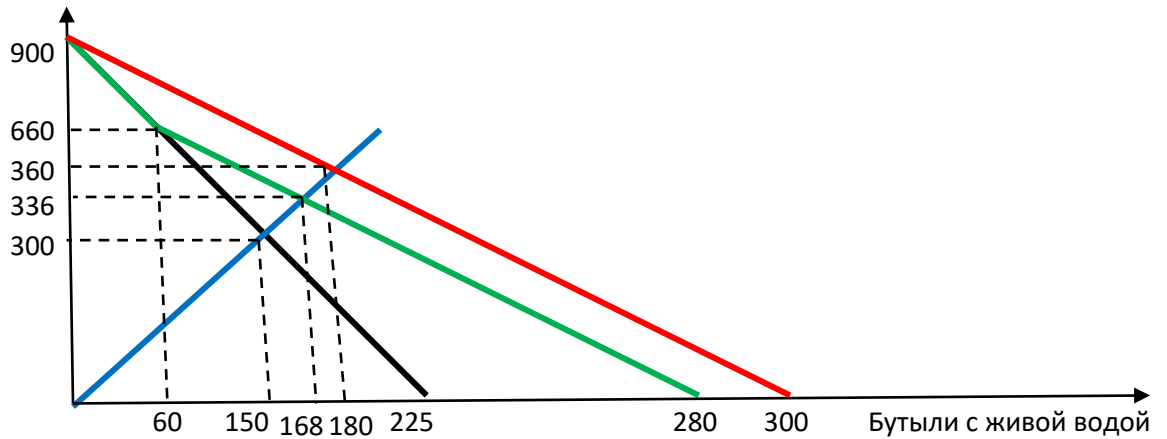
Б) Если на заводике в Болезнии самим произвести 1 бутылку с живой водой, то придется на 4 бутылки сократить производство мертвой воды, т.е. 1 бутылку с живой водой в Болезнии «стоит» 4 бутылки с мертвой водой. Но можно получить ту же 1 бутылку с живой водой, отдав за нее всего 3 бутылки с мертвой водой, вступая в торговые отношения с Хворобией. Граница производственных возможностей превращается в границу торговых возможностей. На местном заводике в Болезнии становится выгодным осуществлять производство только бутылей с мертвой водой, а потом обменивать часть этих бутылей на бутылки с живой водой, изготовленных в Хворобии. Граница торговых возможностей в этом случае будет иметь вид $Y=900-3X$.

Из равенства $900-3X=2X$, находим, что $X=180$, столько бутылей с живой воды надо будет закупить в Хворобии, отдав за них $180*3=540$ бутылей с мертвой водой из 900 произведенных. В итоге для формирования комплектов останется $(900-540)=360$ бутылей с мертвой водой. Таким образом, Болезнии удастся получить 180 комплектов лекарственного препарата.



В) Для получения 60 комплектов лекарственного препарата местному заводу в Болезнии требуется произвести 60 бутылей с живой водой, а это сократит производство мертвой воды на $(60*4)=240$ бутылей. Всего должно быть произведено $(900-240)=660$ бутылей с мертвой водой, которые частично будут обменены на бутылки с живой водой, поставляемые Хворобией. Новая линия торговых возможностей должна иметь такой же наклон, как и в случае Б), но проходить через точку с координатами (60, 660). Получаем, что при объемах производства живой воды, превышающих 60 бутылей, линия торговых возможностей теперь имеет вид $Y=840-3X$. Найдём количество комплектов, которое может быть сформировано в новых условиях. Из равенства $840-3X=2X$ получаем, что $X=168$ бутылей с живой водой (60 бутылей собственного производства и 108, полученные в результате обмена с Хворобией), и $Y=336$ бутылей с мертвой водой. Таким образом, в итоге будет получено 168 комплектов лекарственного препарата.

Бутыли с мертвой водой



Критерии:

Пункт	Содержание	Баллы
А	Сколько и каких бутылей следует произвести местному заводу в Болезни.	2 балла
	Сколько получится комплектов.	2 балла
Б	Сколько и каких бутылей следует произвести местному заводу в Болезни.	2 балла
	Сколько и каких бутылей следует обменять в сделке с Хворобией.	3 балла
	Сколько получится комплектов.	2 балла
В	Сколько и каких бутылей следует произвести местному заводу в Болезни.	2 балла
	Сколько и каких бутылей следует обменять в сделке с Хворобией.	5 баллов
	Сколько получится комплектов.	2 балла

Задача 2. Спрос любителей классической музыки (20 баллов)

В деревне Весёлкино живут два друга – любителя классической музыки Андрей и Борис. Раз в месяц к ним приезжает распространитель Егор и предлагает приобрести билеты на симфонические концерты, которые регулярно проходят в соседнем городе. За много лет он хорошо изучил спрос жителей деревни и даже вывел функции зависимости ожидаемой выручки от устанавливаемой цены билета на одно место в зрительном зале для каждого покупателя. Для Андрея эта функция имеет вид $TR_A = 16P - 0,1P^2$, а для Бориса – $TR_B = 24P - 0,4P^2$, где TR – это месячная выручка Егора от продажи билетов, а P – цена билета в рублях.

Согласно условиям контракта с филармонией, Егор не может предлагать покупателям билеты по различающимся ценам, поэтому он всегда устанавливает единую цену, но такую, которая обеспечивает ему получение максимальной выручки.

А) Запишите функцию суммарного спроса Андрея и Бориса на билеты и определите, какую цену на билеты устанавливает расчетливый распространитель Егор. А также определите, сколько билетов ежемесячно покупает по этой цене каждый из любителей классической музыки из деревни Весёлкино и какую выручку получает Егор.

Б) В этом месяце филармония, организующая концерты, проводит акцию: на любой концерт по одному билету могут пройти два человека, и Егор привез в деревню только такие билеты. Посоветовавшись, друзья решили ездить на концерты вместе, раз других билетов все равно нет. Если исходить из предположения, что это никак не повлияло на индивидуальный спрос каждого любителя классической музыки, и этот спрос по-прежнему отражает истинное

восприятие ими ценности посещаемых концертов, а также их истинную готовность платить за них, то как теперь будет выглядеть функция суммарного спроса на такой вид билетов, и какую цену за такой билет установит расчетливый распространитель Егор? Какую выручку он получит?

Решение:

А) Сначала определим, какой вид имеют индивидуальные функции спроса Андрея и Бориса. Для этого разделим функции выручки на цену. Получим, что функция спроса Андрея на билеты имеет вид, $Q = 16 - 0,1P$ а функция спроса Бориса - $Q = 24P - 0,4P^2$, где Q – количество покупаемых билетов (штуки), а P – цена одного билета (рубли). Ясно, что количество покупаемых билетов может быть только целым числом (продажа дробного числа билетов противоречит здравому смыслу :-). Суммарный рыночный спрос определяется горизонтальным сложением функций индивидуального спроса. Андрей предъявляет спрос при ценах ниже 160 рублей за билет, а Борис – при ценах ниже 60 рублей за билет. Следовательно, функция суммарного спроса любителей классической музыки имеет вид:

$$Q = \begin{cases} 16 - 0,1P & \text{при } 60 < P \leq 160 \\ 40 - 0,5P & \text{при } 0 < P \leq 60 \end{cases}$$

Проанализировав оба участка кривой спроса, находим, что максимальная выручка достигается при цене 40 рублей и количестве билетов 20 штук. Выручка составит 800 рублей. Андрей при этом покупает 12 билетов, а Борис 8 билетов.

Б) В случае, когда на один билет может пройти 2 человека, то эти билеты, по сути, становятся для Андрея и Бориса общественным благом. Суммарный рыночный спрос в этом случае будет определяться вертикальным суммированием функций индивидуального спроса, предполагая, как было отмечено в условии задачи, что индивидуальный спрос у любителей классической музыки при этом не меняется, он по-прежнему отражает их истинное восприятие ценности концертов и их истинную готовность платить за возможность посещения концертов. Это значит, что никто из покупателей не ведет себя как безбилетник, и никто не готов заниматься благотворительностью в отношении другого.

Функция суммарного спроса теперь будет иметь вид:

$$P = \begin{cases} 220 - 12,5Q & \text{при } 0 < Q \leq 16 \\ 60 - 2,5Q & \text{при } 16 < Q \leq 24 \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что теперь удобнее было записать функцию спроса как $P=f(Q)$. Для функции выручки $TR = 60Q - 2,5Q^2$ максимум достигается при Q , равном 12, но это значение не принадлежит участку от 16 до 24. Значит, максимум выручки, соответствующей второму участку спроса, достигается при Q равном 16, цена равна 20, выручка 320 рублей.

Для первого участка функции суммарного спроса максимум выручки достигается при цене билета 110 рублей за билет. Однако в соответствии с функцией спроса этой цене соответствует объем продаж 8,8 билета. Поэтому надо оценить, какое количество билетов (8 или 9) даст Егору большую выручку. 8 билетов можно продать по 120 рублей. Выручка составит 960 рублей.

9 билетов можно продать за 107,5 рублей. Выручка составит 967,5 рублей.

$967,5 > 960$. Значит, Егор продаст 9 билетов по 107,5 рублей.

Ответ:

А) $Q = \begin{cases} 16 - 0,1P & \text{при } 60 < P \leq 160 \\ 40 - 0,5P & \text{при } 0 < P \leq 60 \end{cases}$

Цена билета 40 рублей. Выручка составит 800 рублей. Андрей покупает 12, а Борис 8 билетов.

$$P = \begin{cases} 220 - 12,5Q & \text{при } 0 < Q \leq 16 \\ 60 - 2,5Q & \text{при } 16 < Q \leq 24 \end{cases}$$

Цена билета 107,5 рублей. Выручка составит 967,5 рублей.

Критерии:

Пункт	Содержание	Баллы
А	Определение функции суммарного спроса	За индивидуальные функции спроса - по 1 баллу. За суммарный спрос - если указан только 1 участок (простая сумма двух линий спроса) - 0 баллов; - если указаны два участка - 2 балла. <i>Всего 4 балла</i>
	Вывод об участке, на котором достигается максимум выручки (плюс расчет цены и выручки)	Если суммарного спроса не было записано, и функция выручки записана просто как сумма двух индивидуальных выручек - 2 балла. Если суммарный спрос записан как один участок, и суммарная выручка записана из него - 2 балла. Если суммарный спрос записан верно (из двух участков), а функция выручки определена как сумма двух индивидуальных выручек - 1 балл. Если суммарный спрос записан верно (из двух участков), и проанализированы оба участка - 4 балла. <i>Максимум за пункт 4 балла</i>
	Определение количества купленных билетов каждым из покупателей	1 балл
Б	Определение функции суммарного спроса	Если суммарный спрос (сумма по цене) посчитан просто как сумма двух индивидуальных функций спроса (по сути 1 участок) - 3 балла. Если указаны оба участка суммарного спроса - 6 баллов. <i>Максимум за пункт 6 баллов</i>
	Вывод об участке, на котором достигается максимум выручки (плюс расчет цены и выручки)	Если суммарный спрос записан верно (из двух участков), и проанализированы оба участка - 2 балла. Если выручка записана из функции суммарного спроса, состоящей из одного участка, - 1 балл. <i>Максимум за пункт 2 балла</i>
	Учет целочисленности (вывод относительно количества, расчет цены и выручки)	3 балла
За арифметическую ошибку (не приводящую к существенному упрощению решения) - штраф - минус 1 балл.		
За отсутствие указаний (достаточно проверить один раз) на достаточное условие максимума (например, ветви параболы направлены вниз, или производная из положительной в точке максимума становится отрицательной, или вторая производная		

меньше нуля, или иное) - штраф - минус 1 балл.

Задача 3. Укрепление валюты и рост экономики (20 баллов)

В числе негативных последствий укрепления национальной валюты для экономики обычно называют рост импорта, снижение доходов от экспорта, а также возможное сокращение его физического объема. В результате может снизиться и объем внутреннего производства. Однако эмпирические исследования, проведенные во многих странах, приходят к выводу, что типичная величина ценовой эластичности спроса на импорт лежит в диапазоне от $-0,5$ до -1 , то есть спрос на импорт является неэластичным по цене. Объясните, как при таких значениях эластичности укрепление национальной валюты может увеличить внутреннее производство.

Решение:

В результате укрепления национальной валюты прибыль импортеров возрастает. Рост прибыли импортеров приводит к расширению импорта, то есть росту предложения импортных товаров. Для увеличения объема продаж необходимо снижение цены (это закон спроса). Но если спрос неэластичный, то снижение цены приводит к снижению выручки (при неэластичном спросе изменения цены и выручки сонаправлены), или, что то же самое, снижению совокупных расходов покупателей на данные товары. А раз так, то при неизменном доходе доля расходов на импортные товары сокращается, и у потребителей остается больше денег для покупки, например, товаров отечественного производства. Следовательно, возможно его увеличение.

Критерии:

Содержание	Баллы
Указание на связь “снижение цены + неэластичный спрос -> снижение выручки (то есть расходов покупателей на импорт)”	10 баллов
Указание на связь “сокращение расходов на импорт -> рост спроса на товары внутреннего производства -> его увеличение”	10 баллов

Задача 4. Акакий и пираты (20 баллов)

На острове Южный климатические условия исключительно благоприятны для выращивания ЧудоФрукта, обладающего уникальными целительными свойствами. Растет ЧудоФрукт в естественных условиях, специальных расходов на выращивание не требует, плодоносит круглый год. Все крестьяне, занимающиеся его сбором, используют одинаковую технологию сбора, при которой издержки описываются функцией $ТС(q) = q^2 + 8q + 1$, где q — количество собранного ЧудоФрукта (тонн), $ТС$ – издержки сбора этого количества (тыс. руб). Чудофрукт собирают каждую неделю, весь сбор сразу поступает в продажу и полностью распродается в течение этой же недели. Дольше ЧудоФрукт не хранится. Продают крестьяне ЧудоФрукт на острове Южный по цене 40 руб./кг, на которую каждый из них в отдельности повлиять не может.

Акакий, один из крестьян, по совету брата, купца-мореплавателя, начал продавать ЧудоФрукт на острове Северном, где он не растет. За транспортировку ЧудоФрукта Акакий платит брату 50 тыс. руб. независимо от количества перевозимого груза, груз всегда перевозится на одном торговом судне. Плата за транспортировку взимается до начала путешествия, а сроки транспортировки позволяют доставить ЧудоФрукт и продать его на

острове Северном в течение недели. Прибыль Акакия от продажи ЧудоФрукта на островах Южном и Северном в сумме составляет 525 тыс. руб.

А) Какое количество ЧудоФрукта собирает и продает Акакий на каждом острове, если:

- его прибыль максимально возможная,
- на острове Северном он пока является единственным продавцом,
- спрос на ЧудоФрукт на острове Северном описывается линейной функцией, и по цене 200 руб/кг и выше никто ЧудоФрукт там не покупает?

Б) На пути от острова Южный к острову Северный стали промышленлять разбоем пираты. Опыт показал, что их нападению подвергается в среднем каждое второе торговое судно. Как следует Акакию теперь изменить объем сбора ЧудоФрукта и объем его продаж на каждом острове, если при нападении на торговое судно пираты отнимают весь товар, плата за транспортировку груза в случае нападения пиратов не возвращается, а Акакий стремится максимизировать среднюю прибыль с учетом возможных нападений пиратов?

В) Брат Акакия из-за риска встречи с пиратами просит увеличения платы за транспортировку груза. На какое максимальное увеличение платы может согласиться Акакий?

Г) На пути от острова Южный к острову Северный торговые суда стали подвергаться нападению пиратов все чаще и чаще. Определите максимально допустимую долю потерь груза, направляемого на остров Северный, при которой Акакий согласен продолжать там торговлю, если за транспортировку груза он по-прежнему платит 50 тыс. руб.

Решение:

А) Обозначим q_s – количество ЧудоФрукта, которое продается на острове Южном, q_n – количество ЧудоФрукта, которое продается на острове Северном, $q = q_s + q_n$, P_s – цена ЧудоФрукта на острове Южном ($P_s = 40$), P_n – цена на острове Северном ($P_n = 200 - a \cdot q_n$ ($a > 0$)).

Если фирма производит продукт на одном предприятии, а продает на разных изолированных рынках, то ее прибыль достигнет максимума, если общий объем продаж будет так распределен между рынками, что предельные доходы от продажи на всех рынках будут равны: $MR_s = MR_n \rightarrow 40 = 200 - 2a \cdot q_n \rightarrow q_n = 160/2a = 80/a$.

Запишем функцию прибыли:

$$\pi(q) = 40 \left(q - \frac{80}{a} \right) + \left(200 - a \cdot \frac{80}{a} \right) \cdot \frac{80}{a} - q^2 - 8q - 1 - 50$$

$$\pi(q) = 40q - \frac{3200}{a} + \frac{9600}{a} - q^2 - 8q - 51$$

$$\pi(q) = 32q - q^2 + \frac{6400}{a} - 51$$

Функция прибыли – парабола, ветви которой направлены вниз (a – константа), поэтому для определения объема производства, максимизирующего значение функции прибыли, достаточно приравнять первую производную функции прибыли к нулю:

$$\frac{d\pi}{dq} = 32 - 2q = 0 \rightarrow q = 16$$

По условию максимальная прибыль составляет 525 тыс. руб. Поэтому

$$525 = 32 \cdot 16 - 16^2 + \frac{6400}{a} - 51 \rightarrow a = 20$$

$$q_n = \frac{80}{20} = 4, \quad q_s = 16 - 4 = 12$$

Ответ: Акакий производит 16 тонн, из них 12 тонн продает на Южном острове, а 4 тонны – на Северном.

Б) Теперь возможны два исхода торговли на о-ве Северном: встретить в пути пиратов и ничего не продать или избежать встречи с пиратами и продать ЧудоФрукт на острове. Поэтому средний доход от продажи на Северном острове (TR_n^e) с учетом возможного нападения пиратов определяется как среднее доходов при каждом исходе – когда встреча с пиратами состоялась ($TR_1 = 0$) и когда не состоялась ($TR_2 = (200 - 20q_n)q_n$), при этом доля каждого исхода в общем их количестве равна 0,5:

$$TR_n^e = 0.5 \cdot (200 - 20q_n)q_n + 0.5 \cdot 0 = 100 \cdot q_n - 10q_n^2 \rightarrow MR_n^e = 100 - 20q_n$$

Как и ранее, можем теперь определить объем продаж на острове Северном:

$$MR_s = MR_n^e \rightarrow 40 = 100 - 20q_n \rightarrow q_n = 3 \text{ (объем уменьшился ввиду возникших рисков).}$$

Запишем функцию средней прибыли с учетом возможности нападения пиратов:

$$\pi^e = 40(q - 3) + (100 - 10 \cdot 3) \cdot 3 - q^2 - 8q - 51$$

Это парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому для определения объема производства, максимизирующего значение функции прибыли, достаточно приравнять первую производную функции к нулю:

$$32 - 2q = 0 \rightarrow q = 16 \rightarrow q_s = 16 - 3 = 13$$

То есть объем производства остался прежним (заметим, что он определяется ценой на о-ве Южном и функцией издержек), произошло перераспределение объема продаж с учетом возникших рисков.

Ответ: объем производства = 16 т, на о-ве Северный продается теперь 3 т, на о-ве Южном продается 13 т.

В) Заметим, что при неизменной вероятности встречи с пиратами объемы производства и продаж на каждом острове не зависят от стоимости транспортировки.

Размер платы за транспортировку определяется целесообразностью торговли на о-ве Северном. А самый простой способ решить вопрос о целесообразности торговли – сравнить среднюю прибыль Акакия с учетом возможного нападения пиратов с прибылью, которую он получал бы в отсутствие торговли. Ожидаемая прибыль при наличии торговли с островом Северный:

$$\pi_1^e = 40 \cdot 13 + (100 - 10 \cdot 3) \cdot 3 - 16^2 - 8 \cdot 16 - T - 1 = 345 - T, \text{ где } T \text{ – плата за транспортировку.}$$

Прибыль при торговле только на острове Южном (затраты на транспортировку отсутствуют):

$$40 = 2q + 8 \rightarrow q = 16 \rightarrow \pi = 40 \cdot 16 - 16^2 - 8 \cdot 16 - 1 = 255 \text{ тыс. руб.}$$

$$\text{Торговля выгодна, если } \pi_1^e > \pi \rightarrow 345 - T > 255 \rightarrow T < 90$$

Ответ: плата за транспортировку должна быть меньше 90 (ответ «не должна превышать 90» тоже приемлем).

Г) Пусть p – доля груза, направляемого на о-в Северный, который будет туда доставлен (то есть встреча с пиратами не произойдет), соответственно $(1 - p)$ – доля груза, который будет потерян из-за встречи с пиратами. Чтобы определить p следует руководствоваться следующими соображениями. Во-первых, рассчитываемый на первом шаге решения объем продаж на о-ве Северном должен быть положительным ($q_n > 0$). Во-вторых, ожидаемая прибыль в случае торговли должна превышать прибыль при ее отсутствии.

Определим, при какой доли груза, достигшего о-ва Северный, $q_n > 0$.

$$TR_n^e = p \cdot (200 - 20q_n)q_n + (1 - p) \cdot 0 = p \cdot 200 \cdot q_n - p \cdot 20q_n^2 \rightarrow$$

$$MR_n^e = p \cdot 200 - 40 \cdot p \cdot q_n$$

Объем продаж на острове Северном определяется исходя из равенства предельных доходов на двух рынках ($MR_s = MR_n^e$):

$$40 = p \cdot 200 - 40 \cdot p \cdot q_n \rightarrow q_n = \frac{200p - 40}{40p} = \frac{5p - 1}{p} > 0 \rightarrow p > 0.2$$

Заметим, что при любой фиксированной доле груза, доставляемого на Северный остров, ($p > 0.2$) общий объем производства ЧудоФрукта всегда равен 16 (см. п.2), а значит издержки производства равны $16^2 + 8 \cdot 16 + 1 = 385$.

Теперь запишем условие для величины прибыли:

$$\pi_1^e = 40(16 - q_n) + p(200 - 20q_n)q_n - 385 - 50 > 255 = \pi$$

Произведем замену $q_n = \frac{5p-1}{p}$ и после преобразований получаем:

$$\frac{500p^2 - 200p + 20}{p} > 50$$

$$500p^2 - 250p + 20 > 0$$

$$50p^2 - 25p + 2 > 0$$

Решаем неравенство и получаем, что средняя прибыль от торговли на двух островах с учетом встречи пиратов будет выше, чем прибыль от торговли только на одном острове если доля груза, доставляемого на о-в Северный $p > 0.4$ или $0 < p < 0.1$. Однако во втором случае $q_n < 0$. Поэтому торговля на о-ве Северном выгодна только если острова будет достигать не менее 40% направляемого туда груза, или иначе, доля потерь груза не превышает 60%.

Ответ: Если доля потерянного груза превышает 60%, продавать ЧудоФрукт на о-ве Северном нет смысла.

Критерии:

Пункт	Содержание	Баллы
А	- Верное составление функции прибыли (или использование правила равенства предельных издержек и предельных доходов на двух рынках $MR_S = MR_n = MC$). Если функция прибыли записана не верно - за весь пункт ставится 0 баллов.	2 балла
	- Верное определение общего объема производства/сбора ЧудоФрукта, объемов продаж на каждом острове.	4 балла
	За отсутствие проверки достаточного условия максимума прибыли снимается 1 балл.	
Б	- Верное составление функции прибыли (или использование правила равенства предельных издержек и предельных доходов на двух рынках $MR_S = MR_n = MC$). Если функция прибыли записана не верно - за весь пункт ставится 0 баллов.	3 балла
	- Верное определение общего объема производства/сбора ЧудоФрукта, объемов продаж на каждом острове	3 балла
	За отсутствие проверки достаточного условия максимума прибыли снимается 1 балл.	
В	- Указание на критерий выбора: сравнение прибыли в двух ситуациях (с торговлей на о-ве Северном и без нее).	1 балл
	- Получен верный ответ.	1 балл
Г	- Верная запись функции прибыли при переменной доле груза, доставляемого на о-в Северный (или доле теряемого груза). Если функция прибыли записана не верно - за весь пункт ставится 0 баллов.	2 балла
	- Указание на критерий выбора: сравнение прибыли в двух ситуациях (с торговлей на о-ве Северном и без нее).	1 балл
	- Выбор одного промежутка из 2-х для доли товара, доставляемого на о-в Северный (или теряемого), то есть использование критерия $q_n > 0$	3 балла

Задача 5. Как повысить налоговые поступления? (20 баллов)

На рынке некоторого товара спрос и предложение описываются линейными функциями, объем спроса и предложения измеряются в тыс. тонн, а цены – в тугриках за тонну. В точке равновесия коэффициент эластичности спроса по цене равен $E_D^P = -\frac{11}{9}$. Государство ввело налог, который уплачивают продавцы с каждой тонны товара в размере 75% от его рыночной цены, то есть цены, которую уплачивают покупатели. В результате цена товара на рынке выросла на 33 тугрика, а объём налоговых поступлений составил 792 тыс. тугриков. Коэффициент эластичности спроса по цене в точке нового равновесия стал равен $E_D^P = -\frac{22}{3}$.

А) Восстановите исходные функции спроса и предложения.

Б) Есть мнение, что действующая налоговая ставка не оптимальна и можно собрать большую сумму налога. Определите налоговую ставку (в процентах), которая обеспечит максимум налоговых поступлений. Сравните эту ставку с действующей и содержательно поясните, почему такое изменение (повышение/снижение) ставки приведет к росту налоговых поступлений.

Решение:

Введем обозначения:

P_0 – равновесная цена до введения налога;

Q_0 – равновесный объем до введения налога;

P_{1s} – цена продавца (сколько получает продавец после уплаты налога) после введения налога;

P_{1d} – рыночная цена (она же цена покупателя) после введения налога;

Q_1 – равновесный объем после введения налога;

Функция спроса $Q_d = a - bP$

Функция предложения $Q_s = c + dP$

А) Так как налог равен 75%, то $0,25P_{1d} = P_{1s}$. Также нам известно, что рыночная цена выросла на 33 тугрика, следовательно $P_{1d} = P_0 + 33$.

Рассчитаем коэффициент эластичности спроса по цене методом отрезков (по оси цен) в старом и новом равновесии.

$$\text{Старое равновесие: } E_d^p = \frac{P_0}{\frac{a}{b} - P_0} = \frac{11}{9} = \frac{P_{1d} - 33}{\frac{a}{b} - P_{1d} + 33}$$

$$\text{Новое равновесие: } E_d^p = \frac{P_{1d}}{\frac{a}{b} - P_{1d}} = \frac{22}{3}$$

Запишем систему уравнений и частично решим её:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{1d} - 33}{\frac{a}{b} - P_{1d} + 33} = \frac{11}{9} \\ \frac{P_{1d}}{\frac{a}{b} - P_{1d}} = \frac{22}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{1d} - 33}{\frac{P_{1d}}{0.88} - P_{1d} + 33} = \frac{11}{9} \\ \frac{P_{1d}}{0.88} = \frac{a}{b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_{1d} = 88 \\ \frac{a}{b} = 100 \end{array} \right.$$

Зная, что $0,25P_{1d} = P_{1s}$; $P_{1d} = P_0 + 33$ и что $P_{1d} = 88$, получим:

$$P_{1s} = 22$$

$$P_0 = 55$$

Поскольку $P_{1d} = 88$ тугриков, величина налога будет равна 66 тугриков (75% от 88). Так как налоговые поступления: $66 * Q_1 = 792$, то $Q_1 = 12$ тыс. единиц.

Зная, что $a = 100b$, $P_{1d} = 88$ и что $Q_1 = 12$, получим: $12 = 100b - 88b$, следовательно:

$$b = 1; a = 100; Q_d = 100 - P; Q_0 = 45$$

Функция предложения проходит через точки: (12;22) и (45;55), следовательно: $c = -10$;

$$d = 1; Q_s = -10 + P$$

Б) Введем следующие обозначения:

T – налоговые поступления

t – ставка налога в долях

t' - величина налога, фактически уплачиваемая с единицы товара в тугриках.

Определить налоговую ставку, обеспечивающую максимум доходов, можно тремя способами:

Способ 1: вывести функцию кривой Лаффера и найти её максимум. Вот как будет выглядеть эта функция:

$$T = t \left(100 - \frac{90 - 100t}{2 - t} \right) * \frac{90 - 100t}{2 - t}$$

Далее считаем первую производную, приравниваем её к нулю, находим t и проверяем достаточное условие максимума, то есть что вторая производная отрицательна.

Способ 2: т.к. параметры максимума налоговых сборов одинаковы при любой форме налога, можно вывести функцию кривой Лаффера для потоварного налога, найти t' , а потом найти t . В данном случае:

$$Q = \frac{-10 + 100 - t'}{2} = 45 - 0.5t'$$

$$T = t' * Q = -0.5t'^2 + 45t'$$

Парабола, ветви вниз, максимум в вершине: $t' = \frac{45}{2*0.5} = 45$

$$Q = 22.5 \Rightarrow P_d = 77.5$$

$$t' = P_d * t \Rightarrow t = \frac{t'}{P_d} = \frac{45}{77.5} = \frac{18}{31} \approx 58,06\%$$

Способ 3: т.к. максимум налоговых сборов достигается при объеме продаж равном половине от равновесного, в нашем случае:

$Q = \frac{45}{2} = 22.5$, то зная новый объём продаж мы можем сразу определить ставку

$$\text{налога: } t = \frac{P_d(22.5) - P_s(22.5)}{P_d} = \frac{77.5 - 32.5}{77.5} = \frac{18}{31} \approx 58,06\%$$

Оптимальная налоговая ставка выше действующей, то есть чтобы увеличить налоговые поступления, необходимо снизить ставку налога. Ее уменьшение позволяет снижать цену (и сумма налога с единицы товара также уменьшается), но высокая эластичность спроса обеспечивает значительный прирост объема продаж. В результате налоговые поступления возрастают.

Критерии:

Пункт	Содержание	Баллы
А	Верно и обоснованно определена функция спроса.	6 баллов
	Верно и обоснованно определена функция предложения.	4 балла
	<i>Функция спроса определена неверно, но сделаны следующие шаги:</i>	
	• верно определена начальная цена потребителя;	1 балл
	• верно определена конечная цена потребителя;	1 балл
	• верно определен начальный объем продаж;	1 балл
	• верно определен конечный объем продаж;	1 балл
	• верно определена функция спроса для полученных значений цен и объёмов.	2 балла
	<i>Функция предложения определена неверно, но сделаны следующие шаги:</i>	
• верно определена конечная цена производителя;	1 балл	

	<ul style="list-style-type: none"> • верно определена функция предложения для полученных значений цен и объёмов. 	3 балла
Б	Верно и обоснованно определена оптимальная налоговая ставка в процентах.	6 баллов
	Дано верное экономическое обоснование необходимости снижения ставки.	4 балла
	<i>Ставка налога определена неверно, но сделаны следующие шаги:</i>	
	<ul style="list-style-type: none"> • верно выведена функция кривой Лаффера для адвалорного налога 	2 балла
	<ul style="list-style-type: none"> • верно найдена первая производная и её нули 	1 балл
	<ul style="list-style-type: none"> • верно найдена вторая производная и её нули 	1 балл
	<ul style="list-style-type: none"> • обосновано найден максимум данной функции 	2 балла
	<ul style="list-style-type: none"> • верное решение любым другим способом при котором было допущено не более одной арифметической ошибки 	5 баллов
	<p>В случае наличия в решении принципиально неверных математических выкладок за нахождение оптимальной налоговой ставки можно получить не более 3 баллов.</p>	