Maxwell PhO

Всероссийская олимпиада по физике имени Дж. Кл. Максвелла

Заключительный этап
Теоретический тур

2024

Комплект задач подготовлен
центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

7 класс

- **7-Т1**. Евсеев А.
- **7-Т2**. Инишева О.
- **7-Т3**. Евсеев А.
- **7-Т4**. Порошин О.

8 класс

- **8-Т1**. Богословский Н.
- **8-Т2**. Рубцов Д.
- **8-Т3**. Евсеев А.
- **8-Т4**. Евсеев А.

7 класс

Задача 7.1. Круговой маршрут

Мимо домов Вани и Маши проходит круговой велосипедный маршрут. Перед сном дети любят прокатиться на велосипедах. Ездят они строго по маршруту с постоянной, комфортной для себя скоростью и делают ровно один круг. Однажды вечером до выезда на прогулку ребята синхронизировали свои GPS-трекеры и далее замеряли кратчайшее расстояние между собой по маршруту (то есть вдоль его траектории). Вот некоторые результаты их измерений в привязке ко времени:

Время	19:00	19:20	19:40	20:00	20:20	20:40	21:00	21:20
Расстояние, км	3,0	5,0	9,0	11,5	10,5	9,5	8,5	5,5

Используя эти данные, ответьте на вопросы:

1. Каково минимальное расстояние по маршруту между домами Вани и Маши?

2. С какими скоростями двигались дети?

3. Считая, что первой на прогулку вышла Маша, определите, в какое время это произошло?

4. Какова протяжённость велосипедного маршрута?

Задача 7.2. Градусы плотности

В 1768 году французский химик Антуан Боме разработал современную конструкцию ареометра. В ареометре Боме плотность жидкости измерялась в градусах. Причём изобретателю пришлось ввести две разных шкалы – для жидкостей легче и тяжелее воды. Эти шкалы и сегодня используются в некоторых областях химической и пищевой промышленности.

Для жидкостей тяжелее воды Боме определял шкалу так: нижний предел – 0 B° (0 градусов Боме) соответствует плотности воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, а верхний – $N = 66$ B° – плотности концентрированной серной кислоты $\rho_к = 1842$ кг/м^3. При этом традиционное значение плотности ρ жидкости и её плотность в градусах Боме n связаны соотношением:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = \frac{A_0}{A_0 - n},$$

где A_0 – постоянный переводной коэффициент.

Однако в некоторых современных источниках даётся другое определение. В них пишут, что количество градусов Боме для тяжёлых жидкостей численно равно концентрации раствора поваренной соли по массе(*), выраженной в процентах.

То есть, для перевода плотности ρ в градусы Боме предлагается посчитать процентную концентрацию соляного раствора, имеющего такую же плотность ρ.

В соответствии с этими источниками между плотностью жидкости ρ и количеством градусов Боме n также существует «несложная математическая» зависимость:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = \frac{A}{B - n},$$

где A и B – постоянные коэффициенты.

1. Найдите значение коэффициента A_0 для оригинального определения.

2. С учётом того, что плотность поваренной соли равна $\rho_с = 2165$ кг/м^3, найдите значения коэффициентов A и B из современного определения.

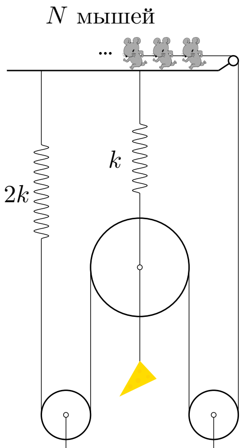
Считайте, что объём солевого раствора равен сумме объёмов его компонентов.

3. Сделайте вывод о том, можно ли считать современное определение соответствующим оригинальному.

** Концентрацией какой-то компоненты раствора по массе называют отношение массы этой компоненты, содержащейся в растворе, к полной массе раствора. Концентрация может быть выражена в процентах (для этого отношение надо умножить на 100%).*

Задача 7.3. Охота на сыр

Мышонок Ник очень любит сыр. Однажды он нашёл спрятанный от него кусочек, который был подвешен на системе из лёгких пружин, блоков и нитей (см. рисунок). Жёсткости пружин указаны на рисунке. Мышонок прыгает высоко, но с пола допрыгнуть до сыра у него не получалось. «Вот если бы сыр висел ниже на h, то я бы смог до него допрыгнуть!» – подумал он и решил позвать на помощь других мышат. Для того чтобы медленно опустить кусочек ровно на нужную высоту, потребовалось привлечь N_1 мышат.



1. Какую длину нити им пришлось вытянуть?

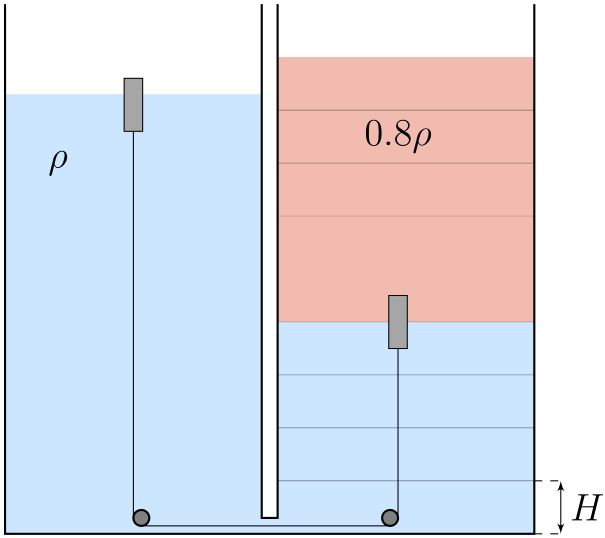
Допрыгнув до сыра, Ник сумел откусить ровно половину кусочка. На следующий день, когда Ник снова проголодался, он ещё раз позвал на помощь других мышат. Однако теперь, чтобы медленно опустить оставшуюся половину на нужную высоту, пришлось увеличить количество мышат до N_2.

2. Предполагая известными N_1, N_2, k, h и g, найдите начальную массу кусочка сыра m.

При решении задачи считайте, что максимальная сила, с которой мышонок способен тянуть нить, одна и та же для каждого зверька, и она достигается именно в тот момент, когда сыр опускается на нужную высоту. Размерами кусочков сыра по сравнению с h можно пренебречь.

Задача 7.4. В одной связке

В сообщающиеся сосуды одинакового поперечного сечения налиты две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ и $0{,}8\rho$, как показано на рисунке. Правый сосуд имеет шкалу с ценой деления H. В сосудах в состоянии равновесия находятся два одинаковых цилиндра, соединённые друг с другом лёгкой нерастяжимой тонкой нитью, пропущенной через два неподвижных гладких блока. Площадь поперечного сечения цилиндров много меньше площади поперечного сечения сосудов. Высота каждого цилиндра равна H. Правый цилиндр наполовину погружён в жидкость плотностью $0{,}8\rho$.



1. Чему равна высота столба жидкости в левом сосуде?

2. Какая часть объёма левого цилиндра погружена в жидкость?

В левый сосуд доливают жидкость плотностью ρ так, чтобы поверхность этой жидкости совпадала с верхним основанием левого цилиндра.

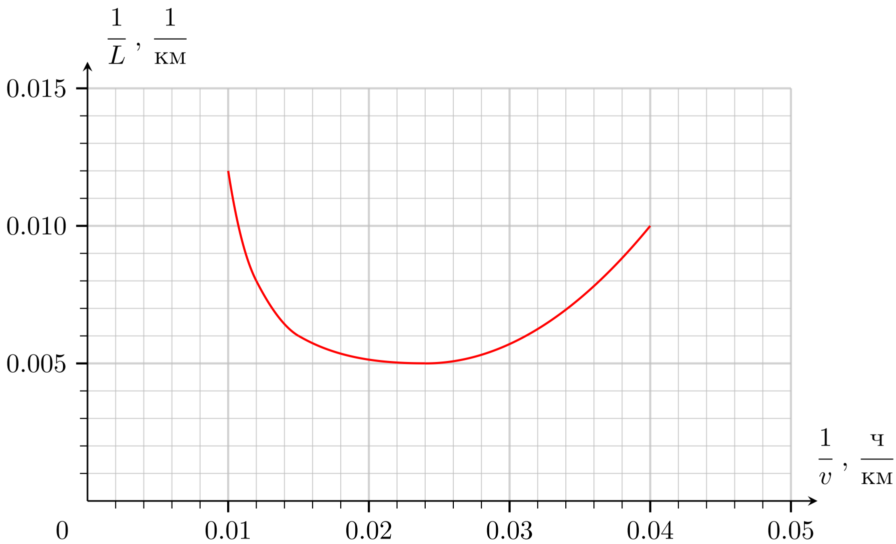
3. Определите в долях H на сколько после этого сместится верхняя граница жидкости плотностью $0{,}8\rho$ в правом сосуде?

Жидкости из сосудов не выливаются. Атмосферным давлением можно пренебречь.

8 класс

Задача 8.1 Электромобиль

Юный изобретатель Федя сконструировал электромобиль оригинальной конструкции. По результатам испытаний Федя построил график зависимости $1/L$ – обратного расстояния, которое электромобиль проезжает с постоянной скоростью на одном полном заряде аккумуляторной батареи, от $1/v$ – обратной скорости движения.



1. Какое максимальное расстояние электромобиль может проехать на одном полном заряде батареи? Какое время для этого потребуется?

Федя решил продолжить испытания. Для этого он отправился в длительный автопробег по идеальной дороге, на которой нет пробок и светофоров, зато достаточно часто встречаются зарядные станции для электромобилей. К сожалению, Федя не очень хорошо подготовился, и к моменту старта батарея оказалась полностью разряженной. Известно, что время зарядки равно 1 часу.

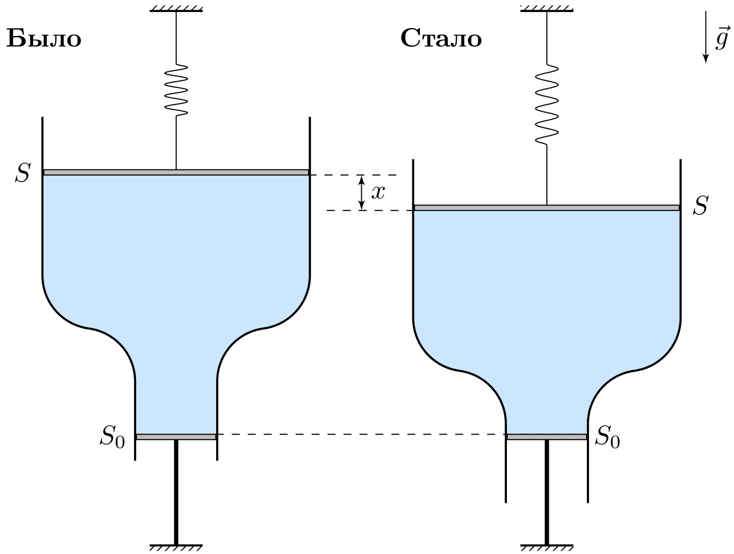
2. Определите, с какой максимальной средней скоростью может двигаться электромобиль с учётом времени на зарядку батареи. Считайте, что движение электромобиля с заряженной батареей происходит с постоянной скоростью.

3. Какое расстояние Федя будет проезжать на одном полном заряде батареи при таком режиме движения? Какую скорость нужно поддерживать в процессе движения?

Временем разгона электромобиля можно пренебречь. Считайте, что в момент окончания заряда батареи электромобиль мгновенно останавливается. График, приведённый в условии, справедлив для любого типа дороги.

Задача 8.2 Безразличное равновесие

Гидравлический пресс (см. рис.) с двумя поршнями различной площади, заполненный водой, снизу закреплён на жёстком неподвижном штоке, а сверху подвешен на лёгкой пружине, верхний конец которой закреплён. Пресс находится в состоянии равновесия. Более того, при смещении верхнего поршня на любое не очень большое расстояние пресс остается в равновесии. Такое равновесие называется безразличным.



1. Определите жёсткость пружины k. Площади поршней S и S_0, плотность воды ρ и ускорение свободного падения g считайте известными.

Пространство между поршнями всегда целиком заполнено водой. Ось симметрии гидравлического пресса вертикальна. Трение между поршнями и стенками пресса отсутствует.

Задача 8.3 Две жидкости

В открытом цилиндрическом сосуде с вертикальными стенками находится литр красной жидкости с температурой $t_к = 0\,°C$. В дне сосуда имеется отверстие, закрывающееся теплоизолирующим клапаном, через которое в сосуд можно заливать жёлтую жидкость с температурой $t_ж = 117{,}6\,°C$. Красная и жёлтая жидкости не смешиваются и химически не реагируют друг с другом. Известно также, что одна из них имеет в 2 раза большую плотность, чем другая.

В сосуд последовательно по одному литру заливают жёлтую жидкость и после каждого добавления измеряют установившуюся температуру содержимого сосуда. Данные измерений приведены в таблице, где $V_ж$ – суммарный объём жёлтой жидкости, поступавшей в сосуд, $t_с$ – установившаяся температура содержимого сосуда:

$V_ж$, л	1	2	3	4	5
$t_с$, °C	39,2	58,8	73,5	86,1	95,1

1. Между какими двумя измерениями содержимое сосуда стало выливаться наружу, если к моменту первого измерения жидкости не выливались?

2. Какая из жидкостей тяжелее, красная или жёлтая?

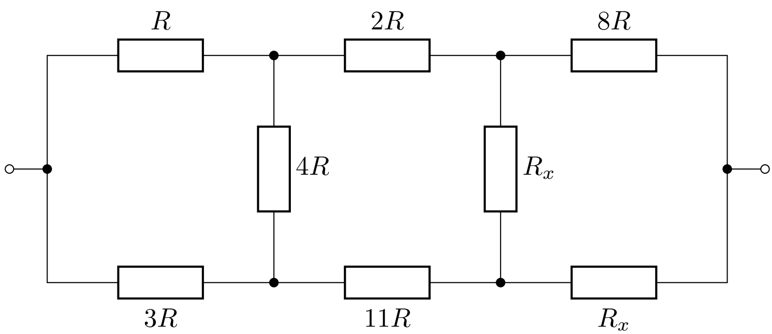
3. Определите ёмкость сосуда V.

4. Определите отношение удельных теплоёмкостей красной и жёлтой жидкостей $c_к/c_ж$.

Считайте, что добавление жидкости происходит достаточно быстро (температура в процессе доливания не успевает поменяться), а поступающая в сосуд жёлтая жидкость остаётся в нижней части жёлтого слоя. Тепловым обменом с окружающей средой и теплоёмкостью сосуда можно пренебречь.

Задача 8.4 МистеRx

Электрическую цепь, схема которой приведена на рисунке, подключают к источнику постоянного тока. Параметры элементов цепи указаны на рисунке, сопротивление проводов пренебрежимо мало.



При каком сопротивлении R_x мощность, выделяющаяся на резисторе сопротивлением $4R$, будет минимальной?

Возможные решения

Задача №7-Т1. Круговой маршрут

Составим таблицу средних относительных скоростей ребят на известных временных промежутках (знак «+» означает, что расстояние между ними растет, а «–» – что уменьшается):

Временной промежуток	19:00 - 19:20	19:20 - 19:40	19:40 - 20:00	20:00 - 20:20	20:20 - 20:40	20:40 - 21:00	21:00 - 21:20
Скорость, км/ч	+6 (24)	+12	+7,5	–3	–3	–3	–9

Заметим, что в процессе движения может быть не более 4 вариантов относительных скоростей: скорость каждого из детей либо их сумма/разность (в зависимости от того, в одну или в разные стороны двигаются дети), а также нулевое значение (если дети сидят по домам).

С 20:00 до 21:00 относительная скорость неизменна, хотя перед этим она 3 раза имела другое значение. Можно сделать вывод, что в этом временном промежутке и Ваня, и Маша были на маршруте. Также видно, что они едут в одном направлении, а скорость Вани, который вышел на прогулку вторым, на 3 км/ч выше, чем у Маши, поскольку расстояние между детьми сокращается.

В то же время на трёх предыдущих двадцатиминутных отрезках (с 19:00 до 20:00) относительные скорости различны.

Маша точно вышла на прогулку до 19:20. Иначе относительная скорость на первом временном промежутке была бы нулевой. Если бы Ваня вышел из дома между 19:20 и 19:40, то относительная скорость с 19:40 до 20:00 была бы такой же, как и в течение следующего часа. Но это не так. Значит, Ваня вышел между 19:40 и 20:00. Но тогда Маша точно вышла между 19:00 и 19:20 (относительные скорости на первых двух отрезках не совпадают).

Тогда расстояние между детьми в 19:00 (3 км) — это расстояние между их домами.

Относительная скорость на втором временном отрезке (12 км/ч) – скорость Маши. Соответственно, скорость Вани – 15 км/ч.

В таблице промежутку с 19:00 до 19:20 соответствуют две разные скорости. Дело в том, что Маша могла поехать как к дому Вани, так и в противоположном направлении. Но, поскольку, как мы уже выяснили, скорость Маши – 12 км/ч, направление однозначно определяется – она поехала в сторону от дома Вани. Поэтому верное значение – первое (6 км/ч).

На первом временном отрезке (между 19:00 и 19:20) Маша успела отъехать от дома на 2 км, то есть ехала 10 минут. Тогда точное время её выхода из дома – 19:10.

Вернулась домой Маша между 21:00 и 21:20. Только это может объяснить тот факт, что скорость сближения на этом временном интервале существенно выросла. Расстояние между ребятами сократилось сразу на 3 км. Причём Ваня до дома не доехал, поскольку, как мы знаем, расстояние между домами – 3 км, а в 21:20 расстояние между детьми – 5,5 км. Значит, Ваня все 20 минут двигался, а Маша двигалась лишь некоторую часть этого времени. Ваня за 20 минут проезжает 5 км. Значит, Маша проехала 2 км. Таким образом, она ехала только 10 минут, то есть вернулась домой в 21:10.

Поскольку Маша провела в пути 2 часа, длина маршрута: $s = v_{\text{м}}t = 24$ км.

Также задачу можно решить, построив график зависимости расстояния между ребятами от времени (отсчёт времени ведётся от 19:00):

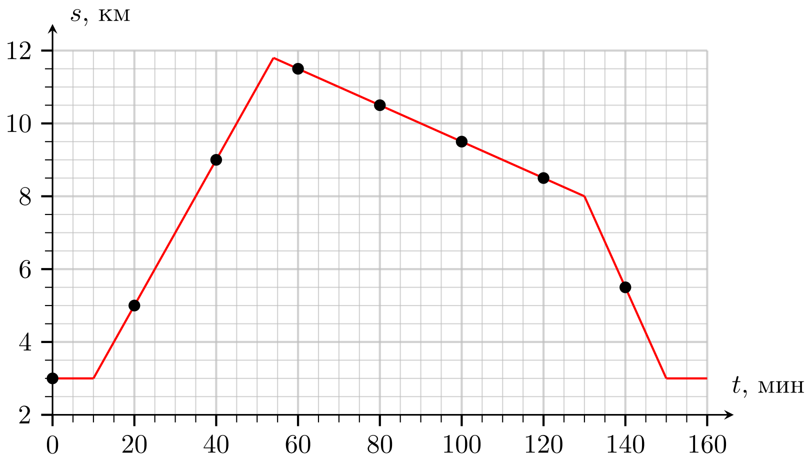


Рис. 1

Из графика легко определить, что:

- между домами детей – 3 км (поскольку первый отрезок горизонтальный).
- Маша вышла на прогулку в 19:10 (первая точка перелома) и вернулась домой в 21:10 (третья точка перелома).
- Скорость Маши 12 км/ч (определяется по второму участку графика).
- Скорость Вани 15 км/ч, и он едет в одном направлении с Машей (на третьем участке расстояние между детьми сокращается со скоростью 3 км/ч).

- Длина маршрута: $s = v_{\text{м}} t = 24$ км.

Задача №7-Т2. Градусы плотности

Определим значение коэффициента A_0. Воспользуемся выражением, данным в условии задачи, и подставим в него $\rho = \rho_{\text{к}}$ и $n = N$:

$$\frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{A_0}{A_0 - N}. \tag{1}$$

Выразим коэффициент A_0:

$$A_0 = \frac{\frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{в}}} N}{\frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{в}}} - 1} = \frac{\frac{1842}{1000} \cdot 66}{\frac{1842}{1000} - 1} = 144{,}4.$$

Коэффициент A_0 безразмерен.

Теперь разберёмся с достоверностью современных источников. Запишем выражения для концентрации n':

$$n' = \frac{m_{\text{с}}}{m_{\text{с}} + m_{\text{в}}}.$$

Тогда по современному определению градусы Боме:

$$n = \frac{m_{\text{с}}}{m_{\text{с}} + m_{\text{в}}} \cdot 100. \tag{2}$$

Здесь $m_{\text{с}}$ – масса соли в растворе, $m_{\text{в}}$ – масса воды в растворе. Перепишем это выражение и определим величины, которые нам понадобятся для дальнейших расчётов.

$$\frac{1}{n'} = \frac{m_{\text{с}} + m_{\text{в}}}{m_{\text{с}}} = 1 + \frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{с}}} \Rightarrow \frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{с}}} = \frac{1}{n'} - 1 = \frac{1 - n'}{n'}.$$

Запишем выражение для плотности раствора ρ:

$$\rho = \frac{m_{\text{с}} + m_{\text{в}}}{\frac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}} + \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}}}. \tag{3}$$

Приведённые далее два варианта математических преобразований немного отличаются друг от друга, но приводят к одному результату.

Способ 1:

Преобразуем выражение для плотности, для этого вынесем за скобки в знаменателе массу $m_{\text{с}}$ соли в растворе:

$$\rho = \frac{m_{\text{с}} + m_{\text{в}}}{m_{\text{с}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\rho_{\text{с}}} + \frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{с}}} \cdot \frac{1}{\rho_{\text{в}}}}.$$

Подставим ранее найденные выражения и проделаем математические преобразования:

$$\rho = \frac{1}{n'} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\rho_с} + \frac{(1-n')}{n'} \cdot \frac{1}{\rho_в}} = \frac{1}{n'\left(\frac{1}{\rho_с} - \frac{1}{\rho_в}\right) + \frac{1}{\rho_в}} = \frac{\rho_с \rho_в}{\rho_с - (\rho_с - \rho_в) \cdot n'}.$$

В знаменателе вынесем за скобки разность плотностей поваренной соли и воды:

$$\rho = \frac{\frac{\rho_с \rho_в}{\rho_с - \rho_в}}{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} - n'}.$$

Поделим последнее выражение на плотность воды:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = \frac{\frac{\rho_с}{\rho_C - \rho_в}}{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} - n'}. \tag{4}$$

Способ 2:

Преобразуем выражение для плотности, для этого разделим числитель и знаменатель на $m_с + m_в$ и выразим отношения масс через n':

$$\rho = \frac{\rho_с \rho_в}{\frac{\rho_в m_с}{m_с + m_в} + \frac{\rho_с m_в}{m_с + m_в}} = \frac{\rho_с \rho_в}{\rho_в n' + \rho_с (1 - n')} = \frac{\rho_с \rho_в}{\rho_с - (\rho_с - \rho_в) \cdot n'}.$$

Теперь разделим числитель и знаменатель на $\rho_с - \rho_в$:

$$\rho = \frac{\frac{\rho_с \rho_в}{\rho_с - \rho_в}}{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} - n'}.$$

Поделим последнее выражение на плотность воды:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = \frac{\frac{\rho_с}{\rho_C - \rho_в}}{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} - n'}. \tag{4}$$

Выразим концентрацию раствора n' (она же градусы Боме в соответствии с современными источниками) в процентах. Для этого умножим и поделим выражение (4) на 100:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = \frac{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в}}{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} - n'} \cdot \frac{100}{100} = \frac{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} \cdot 100}{\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} \cdot 100 - n}. \tag{4}$$

Так как в условии задачи написано, что «между плотностью водного раствора поваренной соли ρ и количеством градусов Боме n (в трактовке современных источников) существует несложная математическая зависимость

$$\frac{\rho}{\rho_в} = \frac{A}{B - n},$$

то сравнив два последних выражения, получаем, что

$$A = B = \frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} \cdot 100.$$

Коэффициенты A и B безразмерны. Посчитаем их значения:

$$A = B = \frac{2165}{2165 - 1000} \cdot 100 \approx 186.$$

Таким образом, итоговая формула для перевода градусов Боме n в плотность раствора имеет вид:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = \frac{186}{186 - n}.$$

Подставляя любое значение $n \neq 0$, например $n = 1$, в историческую и современную формулы, не сложно увидеть, что значения полученных плотностей ρ не будут одинаковыми. Значит шкалы отличаются.

Задача №7-Т3. Охота на сыр

Максимальная сила, с которой мышата тянут веревку, прямо пропорциональна количеству мышат. Поэтому, если в первом случае натяжение нити N_1T, то во втором – N_2T.

Запишем условие равенства сил для верхнего блока при его опускании на h, пока сыр ещё цел:

$$mg + 2N_1T = k(\Delta x_0 + h), \tag{5}$$

где Δx_0 – начальное растяжение пружины, вызванное весом подвешенного сыра.

С учетом того, что $k\Delta x_0 = mg$, получим:

$$2N_1T = kh \Rightarrow N_1T = \frac{kh}{2}.$$

В первом случае мышата тянули нить с силой $kh/2$. Тогда система блоков и пружин должна была освободить нить длиной:

$$L = \frac{kh}{2 \cdot 2k} + \frac{2 \cdot 2 \cdot kh}{2 \cdot 3k} + \frac{2 \cdot 2 \cdot kh}{2 \cdot k} + \frac{2 \cdot 2 \cdot kh}{2 \cdot 4k} = \frac{h}{4} + \frac{2h}{3} + 2h + \frac{h}{2} = \frac{41h}{12}.$$

Именно нить такой длины и вытянули мышата.

Во втором случае, когда осталась только половина сыра, пружину нужно растянуть на такую же длину, как и в начале, чтобы мышонок снова смог допрыгнуть до него:

$$\frac{1}{2}mg + 2N_2T = k(\Delta x_0 + h) \Rightarrow 2N_2T = \frac{1}{2}mg + kh. \tag{6}$$

С учётом (5) и (6):

$$T = \frac{kh}{2N_1} \Rightarrow mg = \frac{2N_2kh}{N_1} - 2kh = \frac{2kh(N_2 - N_1)}{N_1} \Rightarrow m = \frac{2kh(N_2 - N_1)}{N_1 g}.$$

Задача №7-Т4. В одной связке

Рассмотрим давление P_1 в левом и P_2 в правом сосудах на уровне дна. По закону сообщающихся сосудов эти давления должны быть равны: $P_1 = P_2$.

Пусть X искомый уровень жидкости в левом сосуде, тогда рассмотрим гидростатические давления на уровне дна:

$$\rho g X = \rho g 4H + 0{,}8\rho g 5H.$$

После всех сокращений и преобразований получаем: $X = 8H$.

Обозначим объём погруженной части левого цилиндра V_1. Запишем условие равновесия для этого тела:

$$\rho g V_1 = mg + T,$$

где mg – сила тяжести цилиндра, T – сила натяжения нити.

Теперь запишем условие равновесия для правого цилиндра, учитывая то, что на него действуют две силы Архимеда: со стороны жидкости плотностью ρ и со стороны жидкости плотностью $0{,}8\rho$.

$$\rho g \frac{V}{2} + 0{,}8\rho g \frac{V}{2} = mg + T.$$

У условий равновесия одинаковые правые части, значит, мы можем приравнять их левые части:

$$\rho g V_1 = \rho g \frac{V}{2} + 0{,}8\rho g \frac{V}{2}.$$

После всех преобразований получаем: $V_1/V = 0{,}9$.

Пусть верхняя граница жидкости в правом сосуде сместится вверх на ΔH, значит и граница раздела жидкостей в правом сосуде тоже сместится вверх на ΔH. Из условия равенства давлений в сообщающихся сосудах следует, что столб жидкости с плотностью ρ в левом сосуде тоже должен увеличиться на ΔH.

Левый цилиндр в новом состоянии равновесия будет полностью погружён в жидкость. Значит, выталкивающая сила, действующая на него, возрастёт. Он переместится вверх на величину b. Можем записать формулу связи этих величин: $\Delta H = b + 0{,}1H$. Отсюда $b = \Delta H - 0{,}1H$.

Из нерастяжимости нити следует, что правый цилиндр опустится на эту же величину. Глубина погружения правого цилиндра в жидкость плотностью ρ увеличится на $(b + \Delta H)$, а в жидкость плотностью $0{,}8\rho$ уменьшится на ту же величину. Запишем новое уравнение равновесий для левого цилиндра:

$$mg + T_1 = \rho S g H.$$

Для правого:

$$mg + T_1 = \rho S g \left(\frac{H}{2} + \Delta H + b\right) + 0{,}8\rho S g \left(\frac{H}{2} - \Delta H - b\right).$$

Так как левые части этих уравнений равны, то можем приравнять правые и после всех сокращений и преобразований получим: $H = 0{,}9H + 0{,}2H + 0{,}2b$. Подставим выражение для b и после всех преобразований получим: $\Delta H/H = 0{,}3$.

Задача №8-Т1. Электромобиль

Максимальному расстоянию соответствует минимальное значение обратного расстояния $1/L$. По графику минимальное значение $1/L$ равно $0{,}005$ км$^{-1}$, что соответствует расстоянию в 200 км. Также из графика определяем, что этому расстоянию соответствует значение обратной скорости $1/v = 0{,}022\ldots 0{,}025$ ч/км, что соответствует времени $4{,}4\ldots 5{,}0$ ч.

Рассмотрим один цикл зарядки и движения до полной разрядки батареи. Тогда время цикла будет складываться из времени зарядки $t_0 = 1$ ч и времени движения:

$$t = t_0 + \frac{L}{v}.$$

Средняя скорость движения (с учётом времени на зарядку):

$$v_{\text{ср}} = \frac{L}{t} \Rightarrow \frac{L}{v_{\text{ср}}} = t_0 + \frac{L}{v}.$$

Разделим это выражение на L и получим выражение для обратной средней скорости:

$$\frac{1}{v_{\text{ср}}} = \frac{t_0}{L} + \frac{1}{v}.$$

Заметим, что в осях $(L^{-1}; v^{-1})$ это уравнение описывает прямую:

$$\frac{1}{L} = -\frac{1}{t_0} \cdot \frac{1}{v} + \frac{1}{t_0 v_{\text{ср}}},$$

которая пересекает вертикальную ось в точке с ординатой $\frac{1}{t_0 v_{\text{ср}}}$, а горизонтальную ось — в точке с абсциссой $\frac{1}{v_{\text{ср}}}$. Все такие прямые имеют одинаковый коэффициент наклона, равный $-1/t_0$, прямые отличаются только значением $v_{\text{ср}}$.

Нужно подобрать такой режим движения электромобиля, в котором средняя скорость $v_{\text{ср}}$ будет максимальной, а следовательно, $1/v_{\text{ср}}$ будет минимальной. Но при малых значениях $1/v_{\text{ср}}$ прямая не будет пересекать график. Максимально возможной средней скорости соответствует прямая, которая касается графика, как показано на рисунке. Эта прямая пересекает горизонтальную ось в точке $0{,}02$ ч/км, что соответствует средней скорости 50 км/ч.

Прямая касается графика в точке с координатами $1/L = 0{,}008$ км$^{-1}$ и $1/v = 0{,}012$ ч/км, что соответствует пробегу $L = 125$ км на одной полной зарядке батареи со скоростью $v \approx 83{,}3$ км/ч.

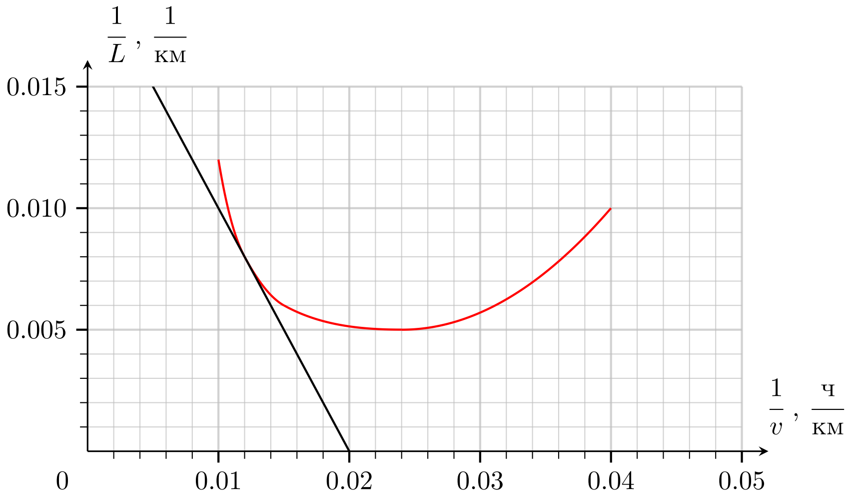


Рис. 2

Задача №8-Т2. Безразличное равновесие

На верхний поршень действуют сила упругости $F_{упр}$, сила тяжести поршня mg, сила давления со стороны атмосферы P_0S и сила давления воды P_1S. В случае равновесия равенство нулю суммы этих сил принимает следующий вид:

$$F_{упр} + P_1S = mg + P_0S. \tag{7}$$

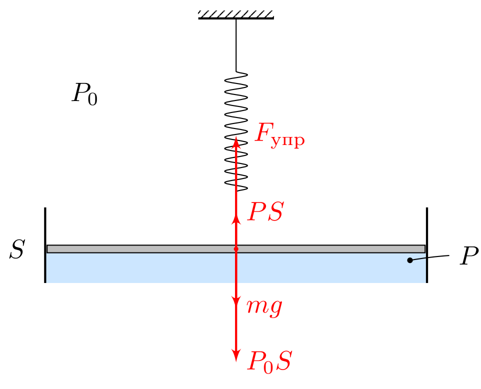


Рис. 3

После смещения верхнего поршня на расстояние x вниз сила упругости станет равна $F_{упр} + kx$. Изменится также сила давления воды, обозначим её новую величину как P_2S. Неизменными останутся сила тяжести поршня mg и сила атмосферного давления P_0S. Условие равновесия поршня в этом случае:

$$F_{упр} + kx + P_2S = mg + P_0S. \tag{8}$$

Обозначим первоначальное расстояние от верхнего поршня до нижнего за h. Тогда давление воды около нижнего поршня равно $P_1 + \ \rho gh$.

После смещения верхнего поршня расстояние между поршнями уменьшится до величины $(h-x)$. Давление воды около нижнего поршня станет равным $P_2 + \rho g(h-x)$.

Рассмотрим систему «гидравлический пресс + вода» (без поршней). На эту систему действуют силы давления со стороны верхнего поршня $P_1 S$, общая сила тяжести Mg, сила давления со стороны нижнего поршня $(P_1 + \rho g h)\, S_0$, а также сила атмосферного давления F, действующая на куполообразную часть гидравлического пресса. Для решения задачи её расчёт не требуется, т.к. её величина после смещения верхнего поршня не изменится. Можно показать, что она равна $F = P_0(S - S_0)$ и направлена вверх вне зависимости от формы «купола».

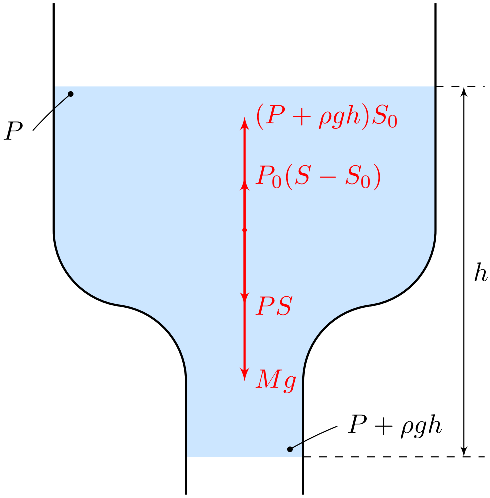


Рис. 4

Условие равновесия для этой системы:

$$P_1 S + Mg = F + P_1 S_0 + \rho g h S_0. \tag{9}$$

Аналогично в случае смещённого верхнего поршня:

$$P_2 S + Mg = F + P_2 S_0 + \rho g h S_0 - \rho g x S_0. \tag{10}$$

Из (7) и (8) уравнений получим:

$$(P_1 - P_2)\, S = kx. \tag{*}$$

Из (9) и (10) уравнений получим:

$$(P_1 - P_2)\,(S - S_0) = \rho g S_0 x. \tag{**}$$

Из (*) и (**) получим искомый ответ:

$$k = \frac{\rho g S S_0}{S - S_0}.$$

Задача №8-Т3. Две жидкости

Пока содержимое не выливается, уравнения теплового баланса должны выглядеть так:

$$C_к(t_1 - t_к) + C_ж(t_1 - t_ж) = 0;$$

$$C_к(t_2 - t_к) + 2C_ж(t_2 - t_ж) = 0;$$

$$C_к(t_3 - t_к) + 3C_ж(t_3 - t_ж) = 0;$$

$$\ldots,$$

где $C_к$ и $C_ж$ – теплоёмкости одного литра красной и жёлтой жидкостей соответственно. Тогда должно выполняться равенство:

$$\frac{C_к}{C_ж} = \frac{t_ж - t_1}{t_1 - t_к} = \frac{2(t_ж - t_2)}{t_2 - t_к} = \frac{3(t_ж - t_3)}{t_3 - t_к} = \ldots$$

При подстановке значений температур получаем, что первое и второе выражения равны 2, а третье равно 1,8. То есть при добавлении третьего литра жёлтой жидкости содержимое сосуда начало вытекать. Таким образом, ёмкость сосуда находится в пределах от 3 до 4 литров. Также отметим, что $C_к/C_ж = 2$.

Пусть ёмкость сосуда больше 3 литров на величину ΔV. Тогда, если красная жидкость легче, то должны быть верны следующие два уравнения:

$$\left(\frac{\Delta V}{1\ л} \cdot C_к + 2C_ж\right)(t_3 - t_2) + C_ж(t_3 - t_ж) = 0,$$

$$\left(2 + \frac{\Delta V}{1\ л}\right)C_ж(t_4 - t_3) + C_ж(t_4 - t_ж) = 0.$$

Если же легче жёлтая жидкость, то будут верны следующие два уравнения:

$$\left(C_к + C_ж + \frac{\Delta V}{1\ л} \cdot C_ж\right)(t_3 - t_2) + C_ж(t_3 - t_ж) = 0,$$

$$\left(C_к + C_ж + \frac{\Delta V}{1\ л} \cdot C_ж\right)(t_4 - t_3) + C_ж(t_4 - t_ж) = 0.$$

При подстановке значений выясняется, что вторая пара уравнений противоречит друг другу, а первая даёт одинаковое значение $\Delta V = 0{,}5$ л.

Значит жёлтая жидкость тяжелее красной.

Ёмкость сосуда $V = 3\ л + \Delta V = 3{,}5$ л.

Поскольку плотность жёлтой жидкости вдвое больше плотности красной, то литр жёлтой жидкости весит вдвое больше литра красной, а значит:

$$\frac{C_к}{C_ж} = \frac{mc_к}{2mc_ж} = \frac{c_к}{2c_ж}.$$

Откуда для отношения удельных теплоёмкостей получаем:

$$\frac{c_\text{к}}{c_\text{ж}} = \frac{2C_\text{к}}{C_\text{ж}} = 4.$$

Задача №8-Т4. МистеRx

Минимальное из всех возможных значений для мощности, выделяющейся на резисторе сопротивлением $4R$, равно нулю. Этот случай реализуется в отсутствии тока, протекающего через резистор $4R$. Предположим, что через резистор $4R$ не протекает электрический ток, и расставим с учётом этого токи в цепи.

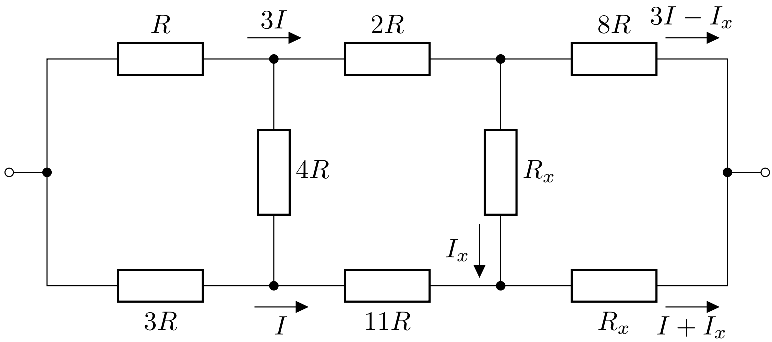


Рис. 5

Используя равенство напряжений в двух различных контурах, свяжем R и R_x:

$$3I(R + 2R) + I_xR_x = I(3R + 11R) \Rightarrow I_xR_x = 5IR;$$

$$I_xR_x + (I + I_x) \cdot R_x = (3I - I_x) \cdot 8R.$$

Откуда:

$$\frac{5IR}{R_x} \cdot R_x + \left(I + \frac{5IR}{R_x}\right) \cdot R_x = \left(3I - \frac{5IR}{R_x}\right) \cdot 8R;$$

$$R_x^2 - 14RR_x + 40R^2 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим, что предположение выполняется для двух возможных значений R_x: $R_{x1} = 4R$, $R_{x2} = 10R$.