

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2025/2026 учебный год

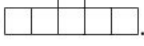
Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2025/2026 учебный год

Задания для 10-11 классов

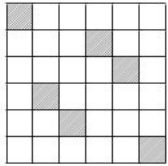
(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

РЕШЕНИЯ ПЕРВОГО ВАРИАНТА

1. Какое наименьшее количество клеток можно вырезать из доски 6×6 так, чтобы из остатка нельзя было вырезать фигурку .

Ответ: 6.

Решение. Пример вырезания шести клеток приведен на рисунке.



Предположим, что фигурку нельзя вырезать из оставшихся клеток доски. Рассмотрим прямоугольник 2×6 и заметим, что в нем обязательно есть две вырезанные клетки. Но доска разбивается на три таких прямоугольника, поэтому вырезанных клеток не менее шести.

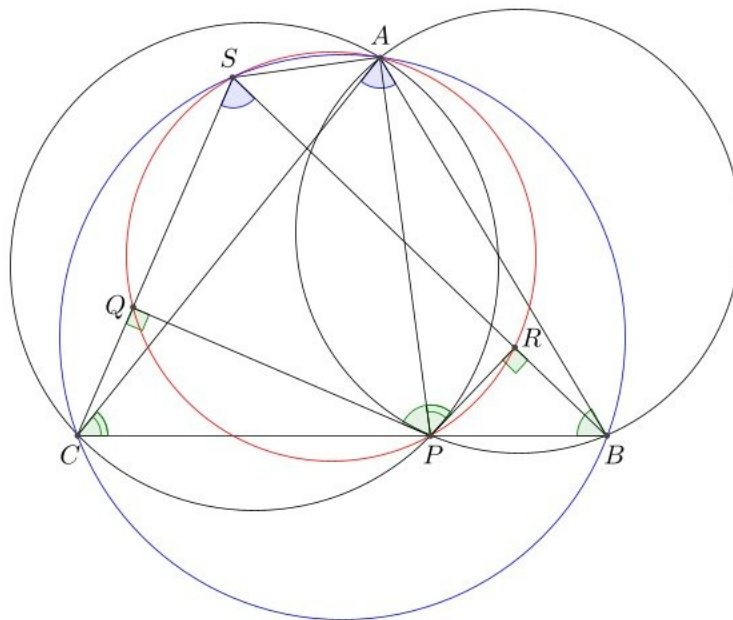
2. Натуральные числа a , b и c таковы, что дроби $1/a$, $1/b$ и $1/c$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Какое наименьшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b .

Ответ: 2.

Решение. Поскольку $1/6$, $1/4$ и $1/3$ образуют арифметическую прогрессию, наибольший общий делитель чисел a и b может равняться двум. Покажем, что числа a и b не могут быть взаимно простыми. Предположим противное. По условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, поэтому $(a+c)b = 2ac$. Следовательно, $(a+c)b$ делится на a , что в силу взаимной простоты a и b означает, что $a+c$ делится на a . Таким образом, c делится на a . Но тогда $c \geq a$ и, значит, $1/c \leq 1/a$, что невозможно по условию.

Замечание. Пример, для которого $\text{НОД}(a, b) = 2$ единственный.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка P . Через точку P проведена касательная к описанной окружности треугольника ABP и из точки C на эту касательную опущен перпендикуляр, точка Q — основание этого перпендикуляра. Через точку P проведена касательная к описанной окружности треугольника ACP и из точки B на эту касательную опущен перпендикуляр, точка R — основание этого перпендикуляра. Докажите, что точки A , P , Q и R лежат на одной окружности.



Решение. Обозначим через S точку пересечения прямых BR и CQ . Из равенства $\angle PRS = \angle PQS = 90^\circ$ следует, что четырехугольник $PQSR$ является вписанным. Поэтому $\angle QPR = 180^\circ - \angle BSC$. Поскольку прямая PQ касается описанной окружности треугольника ACP , $\angle ACP = \angle APR$. Аналогично $\angle ABP = \angle APQ$. Следовательно,

$$\angle QPR = \angle APQ + \angle APR = \angle ACP + \angle ABP = 180^\circ - \angle BAC.$$

Таким образом, $\angle BSC = \angle BAC$ и четырехугольник $ABSC$ является вписанным. Стало быть,

$$\angle ASR = \angle ASB = \angle ACB = \angle APR$$

и точки A, R, P, S лежат на одной окружности. Следовательно, на одной окружности лежат и точки A, P, R, Q и S .

4. В школе обучается 95 одиннадцатиклассников. Каждый из них отправил в VK поздравление с Новым Годом 71 одиннадцатикласснику. Для какого наибольшего k обязательно можно выбрать группу из k одиннадцатиклассников, каждый из которых отправил поздравления остальным участникам группы?

Ответ: $k = 3$.

Решение. Покажем как нужно было посылать поздравления, чтобы нельзя было выбрать требуемую группу из четырех учеников. Посадим учеников за круглым столом. Пусть каждый из них поздравил следующих 71, сидящих за ним по часовой стрелке. Предположим, что можно выбрать требуемую группу из четырех человек. Возьмем двоих участников этой группы. Для того чтобы они поздравили друг друга нужно чтобы между ними сидело не менее 23 человек. Но тогда кроме учеников из группы должно быть не менее чем $4 \cdot 23 = 92$ школьников, а это не так.

Докажем, что группу из трех учеников можно выбрать всегда. Общее количество поздравлений $95 \cdot 71$, поэтому кто-то получил не менее 71 поздравления. Назовем его Петей. Он не посылал поздравлений $95 - 71 - 1 = 23$ школьникам, поэтому есть не менее $71 - 23 = 48$ учеников, которые с Петей поздравили друг друга. Покажем, что среди этих 48 учеников (назовем их классом) есть двое поздравивших друг друга. Предположим противное, тогда для любой пары учеников в классе между ними послано не более одного поздравления, т. е. всего не более $48 \cdot 47/2$ поздравлений. С другой стороны каждый не поздравлял 23 учеников, поэтому он должен был послать не менее 24 поздравлений одноклассникам. Следовательно, между учениками классе было послано не менее $48 \cdot 24$ поздравлений. Но $48 \cdot 24 > 48 \cdot 47/2$. Противоречие.

5. Вещественные числа $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ не превосходят 3. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{x_2^3}{x_1^2 + 9} + \frac{x_3^3}{x_2^2 + 9} + \dots + \frac{x_{16}^3}{x_{15}^2 + 9} + \frac{x_1^3}{x_{16}^2 + 9}.$$

Ответ: 24.

Решение. Если $x_1 = x_2 = \dots = x_{16} = 3$, то выражение равно 24. Покажем, что больше 24 оно быть не может. Положим $y_k = x_k^2/9$, тогда $0 \leq y_k \leq 1$ и $x_k^3 \leq 3x_k^2 = 27y_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{x_2^3}{x_1^2 + 9} + \frac{x_3^3}{x_2^2 + 9} + \dots + \frac{x_{16}^3}{x_{15}^2 + 9} + \frac{x_1^3}{x_{16}^2 + 9} &= \frac{x_2^3/9}{x_1^2/9 + 1} + \frac{x_3^3/9}{x_2^2/9 + 1} + \dots + \frac{x_{16}^3/9}{x_{15}^2/9 + 1} + \frac{x_1^3/9}{x_{16}^2/9 + 1} \leq \\ &\leq 3 \left(\frac{y_2}{y_1 + 1} + \frac{y_3}{y_2 + 1} + \dots + \frac{y_{16}}{y_{15} + 1} + \frac{y_1}{y_{16} + 1} \right) \end{aligned}$$

и достаточно доказать неравенство

$$\frac{y_2}{y_1 + 1} + \frac{y_3}{y_2 + 1} + \dots + \frac{y_{16}}{y_{15} + 1} + \frac{y_1}{y_{16} + 1} \leq 8.$$

Для этого заметим, что при $0 \leq a, b \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{b + 1} \leq \frac{1 - b + a}{2}. \quad (*)$$

Действительно,

$$(b + 1)(1 - b + a) = 2a + (1 - b)(1 + b - a) \geq 2a.$$

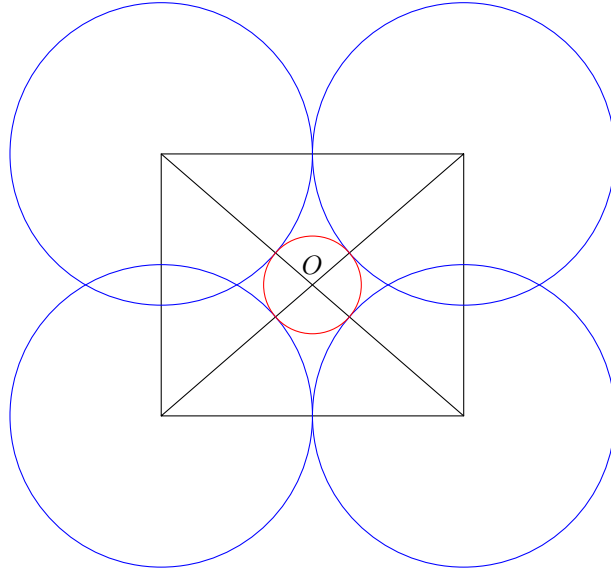
Просуммируем неравенства $(*)$ для $a = y_{k+1}$ и $b = y_k$ и получим, что

$$\frac{y_2}{y_1 + 1} + \frac{y_3}{y_2 + 1} + \dots + \frac{y_{16}}{y_{15} + 1} + \frac{y_1}{y_{16} + 1} \leq \frac{1 + y_2 - y_1}{2} + \frac{1 + y_3 - y_2}{2} + \dots + \frac{1 + y_{16} - y_{15}}{2} + \frac{1 + y_1 - y_{16}}{2} = 8.$$

Замечание. Равенство достигается, если x_k равно 0 или 3, причем в строчке $x_1, x_2, \dots, x_{16}, x_1$ нет двух соседних нулей.

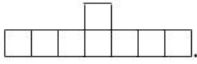
6. Центры четырех шаров радиуса R находятся в вершинах квадрата со стороной $2R$. Прямой круговой цилиндр касается всех четырех шаров внешним образом, его ось перпендикулярна к паре параллельных сторон квадрата и образует с плоскостью квадрата угол 30° . Найдите радиус цилиндра.

Ответ: $R(\sqrt{7} - 1)/2$.



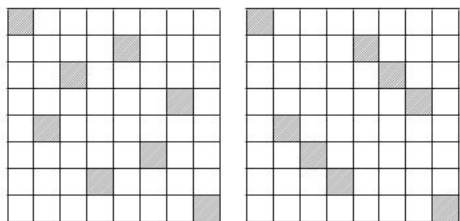
Решение. Пусть цилиндр имеет радиус r . Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Проекцией квадрата, образованного центрами шаров, будет прямоугольник со сторонами $2R$ и $2R \cos 30^\circ = \sqrt{3}R$. Проекциями шаров будут окружности радиуса R , с центрами в вершинах этого прямоугольника, а проекцией цилиндра — окружность радиуса r . Точки касания цилиндра с шарами перейдут в точки касания окружностей. Пусть O — точка пересечения оси цилиндра с плоскостью проекции. Тогда расстояние от точки O до каждой из вершин прямоугольника равно $R + r$. Следовательно, эта точка является пересечением диагоналей прямоугольника и $R + r = R\sqrt{1 + \cos^2 30^\circ} = R\sqrt{7}/2$. Таким образом, $r = R(\sqrt{7} - 1)/2$.

РЕШЕНИЯ ВТОРОГО ВАРИАНТА

1. Какое наименьшее количество клеток можно вырезать из доски 8×8 так, чтобы из остатка нельзя было вырезать фигурку .

Ответ: 8.

Решение. Примеры вырезания восьми клеток приведены на рисунках.



Предположим, что фигурку нельзя вырезать из оставшихся клеток доски. Рассмотрим прямоугольник 2×8 и заметим, что в нем обязательно есть две вырезанные клетки. Но доска разбивается на четыре таких прямоугольника, поэтому вырезанных клеток не менее восьми.

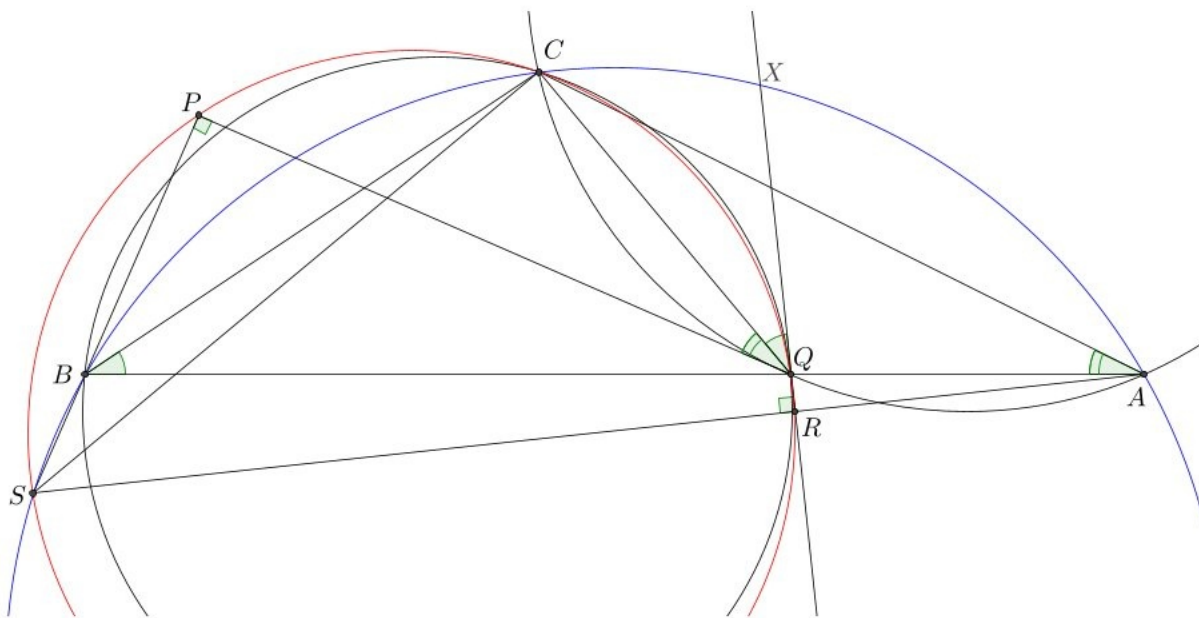
2. Натуральные числа a , b и c таковы, что дроби $1/a$, $2/b$ и $3/c$ образуют убывающую арифметическую прогрессию. Какое наименьшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел b и c .

Ответ: 2.

Решение. Поскольку $1/3$, $2/8$ и $3/18$ образуют арифметическую прогрессию, наибольший общий делитель чисел b и c может равняться двум. Покажем, что числа b и c не могут быть взаимно простыми. Предположим противное. По условию $\frac{1}{a} + \frac{3}{c} = \frac{4}{b}$, поэтому $(3a+c)b = 4ac$. Следовательно, $(3a+c)b$ делится на c , что в силу взаимной простоты b и c означает, что $3a+c$ делится на c . Таким образом, $3a$ делится на c . Но тогда $3a \geq c$ и, значит, $3/c \geq 1/a$, что невозможно по условию.

Замечание. Пример, для которого $\text{НОД}(b, c) = 2$ единственный.

3. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом $\angle C$. На стороне AC отмечена точка Q . Через нее проведена касательная к описанной окружности треугольника ACQ и из точки B на эту касательную опущен перпендикуляр, точка P — основание этого перпендикуляра. Через точку Q проведена касательная к описанной окружности треугольника BCQ и из точки A на эту касательную опущен перпендикуляр, точка R — основание этого перпендикуляра. Оказалось, что точки C и P лежат по одну сторону от прямой AB , а точка R по другую. Докажите, что точки C , P , Q и R лежат на одной окружности.



Решение. Обозначим через S точку пересечения прямых AR и BP . На луче RQ за точкой Q отметим точку X . Из равенства $\angle QPS = \angle QRS = 90^\circ$ следует, что четырехугольник $PQRS$ является вписанным. Поэтому $\angle PQR = 180^\circ - \angle ASB$. Поскольку прямая QP касается описанной окружности треугольника ACQ , $\angle CAB = \angle CQP$. Аналогично $\angle ABC = \angle CQX$. Следовательно,

$$\angle PQR = 180^\circ - \angle PQX = 180^\circ - (\angle CQP + \angle CQX) = 180^\circ - (\angle ABC + \angle CAB) = \angle ACB.$$

Таким образом, $\angle ACB = 180^\circ - \angle ASB$ и четырехугольник $ASBC$ является вписанным. Стало быть,

$$\angle RSC = \angle ASC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CQR$$

и точки C, Q, R, S лежат на одной окружности. Следовательно, на одной окружности лежат и точки C, P, R, Q и S .

4. На курсе в художественном училище обучается 75 человек. За учебный год каждый из них нарисовал портреты 56 других учеников. Для какого наибольшего k обязательно можно выбрать группу из k учеников, каждый из которых нарисовал портреты остальных участников группы?

Ответ: $k = 3$.

Решение. Покажем какие нужно было рисовать портреты, чтобы нельзя было выбрать группу из четырех учеников. Посадим учеников за круглым столом, пусть каждый из них нарисовал портреты следующих 56, сидящих за ним по часовой стрелке. Предположим, что можно выбрать требуемую группу из четырех человек. Возьмем двоих участников этой группы. Для того чтобы они нарисовали портреты друг друга нужно чтобы между ними сидело не менее 18 человек. Но тогда кроме учеников из группы на курсе должно быть не менее чем $4 \cdot 18 = 72$ человек, а это не так.

Докажем, что группу из трех учеников можно выбрать всегда. Общее количество портретов $75 \cdot 56$, поэтому кого-то нарисовали не менее 56 раз. Назовем его Петей. Он не рисовал портреты $75 - 56 - 1 = 18$ учеников, поэтому есть не менее $56 - 18 = 38$ человек, которые с Петей нарисовали друг друга. Покажем, что среди этих 38 учеников (назовем их классом) есть двое нарисовавших друг друга. Предположим противное, тогда для любой пары учеников в классе нарисовано не более одного портрета, т. е. всего не более $38 \cdot 37/2$ портретов. С другой стороны каждый не рисовал 18 учеников, поэтому он должен был нарисовать не менее 19 портретов одноклассников. Следовательно, всего в классе было нарисовано не менее $38 \cdot 19$ портретов. Но $38 \cdot 19 > 38 \cdot 37/2$. Противоречие.

5. Неотрицательные числа $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ не превосходят 2. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{x_1^4}{x_2^3 + 8} + \frac{x_2^4}{x_3^3 + 8} + \dots + \frac{x_{11}^4}{x_{12}^3 + 8} + \frac{x_{12}^4}{x_1^3 + 8}.$$

Ответ: 12.

Решение. Если $x_1 = x_2 = \dots = x_{12} = 2$, то выражение равно 12. Покажем, что больше 12 оно быть не может. Положим $y_k = x_k^3/8$, тогда $0 \leq y_k \leq 1$ и $x_k^4 \leq 2x_k^3 = 16y_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{x_1^4}{x_2^3 + 8} + \frac{x_2^4}{x_3^3 + 8} + \dots + \frac{x_{11}^4}{x_{12}^3 + 8} + \frac{x_{12}^4}{x_1^3 + 8} &= \frac{x_1^4/8}{x_2^3/8 + 1} + \frac{x_2^4/8}{x_3^3/8 + 1} + \dots + \frac{x_{11}^4/8}{x_{12}^3/8 + 1} + \frac{x_{12}^4/8}{x_1^3/8 + 1} \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{y_1}{y_2 + 1} + \frac{y_2}{y_3 + 1} + \dots + \frac{y_{11}}{y_{12} + 1} + \frac{y_{12}}{y_1 + 1} \right) \end{aligned}$$

и достаточно доказать неравенство

$$\frac{y_1}{y_2 + 1} + \frac{y_2}{y_3 + 1} + \dots + \frac{y_{11}}{y_{12} + 1} + \frac{y_{12}}{y_1 + 1} \leq 6.$$

Для этого заметим, что при $0 \leq a, b \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{b + 1} \leq \frac{1 - b + a}{2}. \quad (*)$$

Действительно,

$$(b + 1)(1 - b + a) = 2a + (1 - b)(1 + b - a) \geq 2a.$$

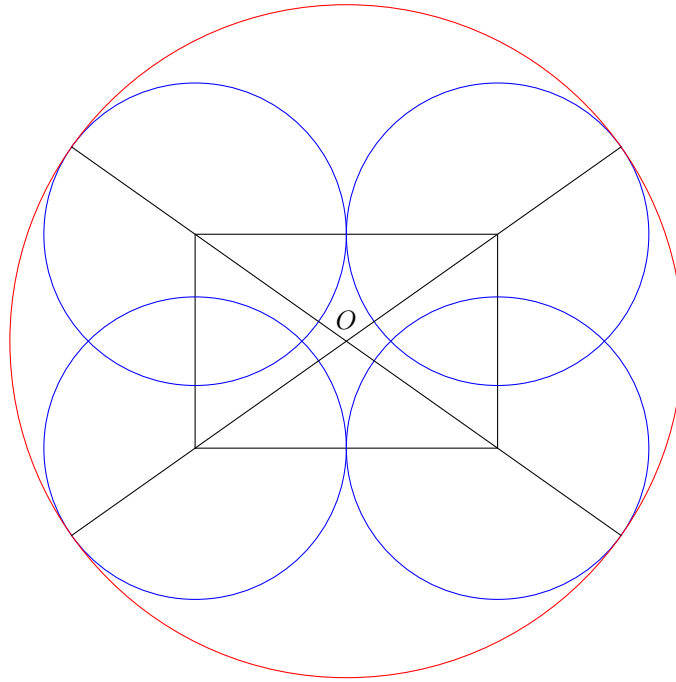
Просуммируем неравенства (*) для $a = y_k$ и $b = y_{k+1}$ и получим, что

$$\frac{y_1}{y_2 + 1} + \frac{y_2}{y_3 + 1} + \dots + \frac{y_{11}}{y_{12} + 1} + \frac{y_{12}}{y_1 + 1} \leq \frac{1 - y_2 + y_1}{2} + \frac{1 - y_3 + y_2}{2} + \dots + \frac{1 - y_{12} + y_{11}}{2} + \frac{1 - y_1 + y_{12}}{2} = 6.$$

Замечание. Равенство достигается, если x_k равно 0 или 2, причем в строчке $x_1, x_2, \dots, x_{10}, x_{11}$ нет двух соседних нулей.

6. Центры четырех шаров радиуса R находятся в вершинах квадрата со стороной $2R$. Прямой круговой цилиндр касается всех четырех шаров внутренним образом, его ось перпендикулярна к паре параллельных сторон квадрата и образует с плоскостью квадрата угол 45° . Найдите радиус цилиндра.

Ответ: $R\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right)$.



Решение. Пусть цилиндр имеет радиус r . Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Проекцией квадрата, образованного центрами шаров, будет прямоугольник со сторонами $2R$ и $2R \cos 45^\circ = \sqrt{2}R$. Проекциями шаров будут окружности радиуса R , с центрами в вершинах этого прямоугольника, а проекцией цилиндра — окружность радиуса r . Точки касания цилиндра с шарами перейдут в точки касания окружностей. Пусть O — точка пересечения оси цилиндра с плоскостью проекции. Тогда расстояние от точки O до каждой из вершин прямоугольника равно $r - R$. Следовательно, эта точка является пересечением диагоналей прямоугольника и $r - R = R\sqrt{1 + \cos^2 45^\circ} = \sqrt{3}R/2$. Таким образом, $r = R(\sqrt{3/2} + 1)$.

РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ВАРИАНТА

1. В клетках таблицы 3×10 расставлены натуральные числа от 1 до 30 (в каждой клетке свое число). Для какого наименьшего натурального числа k заведомо найдутся такие две соседние по стороне клетки, что модуль разности записанных в них чисел не больше k .

Ответ: $k = 14$.

Решение. Покажем, что для $k = 14$ такие клетки обязательно найдутся. Рассмотрим число 16. Для него только одно из чисел, записанных в таблице, может дать разницу не менее 15, а именно число 1. Но у клетки, в которой стоит число 16, не меньше двух соседних. Поэтому разность между числом 16 и одним из этих соседних чисел не больше 14.

Пример расстановки, для которой модуль разности любых двух соседних чисел не меньше чем 14.

16	2	19	5	22	8	25	11	28	14
1	18	4	21	7	24	10	27	13	30
17	3	20	6	23	9	26	12	29	15

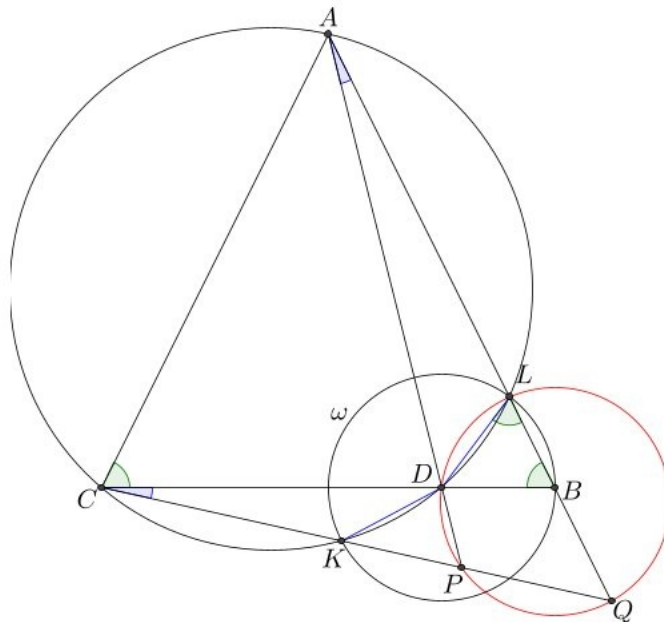
2. Натуральные числа a , b и c таковы, что дроби $1/a$, $1/b$ и $1/c$ образуют убывающую арифметическую прогрессию. Какое наименьшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел b и c , если число c нечетно.

Ответ: 3.

Решение. Поскольку $1/10$, $1/12$ и $1/15$ образуют арифметическую прогрессию, наибольший общий делитель чисел b и c может равняться трем. Покажем, что меньше трех он быть не может. Из-за нечетности числа c он не может равняться двум. Осталось проверить, что числа b и c не могут быть взаимно простыми. Предположим противное. По условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, поэтому $(a+c)b = 2ac$. Следовательно, $(a+c)b$ делится на c , что в силу взаимной простоты b и c означает, что $a+c$ делится на c . Таким образом, a делится на c . Но тогда $a \geq c$ и, значит, $1/a \leq 1/c$, что невозможно по условию.

Замечание. Пример, для которого $\text{НОД}(a, b) = 3$ единственный.

3. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D . Проходящая через точку B окружность с центром в точке D пересекает описанную окружность треугольника ACD в точках K и L , причем точка K ближе к точке C , чем точка L . Прямая CK пересекает прямую AD в точке P и прямую AB в точке Q . Докажите, что точки D , L , P и Q лежат на одной окружности.



Решение. Обозначим через ω окружность с центром в точке D и проходящую через точку B . Сперва докажем, что точка L лежит на отрезке AB . Для этого рассмотрим точку пересечения окружности ω с прямой AB , обозначим ее через L' . По построению треугольник BDL' равнобедренный, поэтому $\angle BL'D = \angle DBA = \angle ACD$. Следовательно, четырехугольник $ACDL'$ вписанный и, значит, точки L и L' совпадают. Стало быть, точка L лежит на отрезке AB . Поскольку точки K и L лежат на окружности ω , отрезки DK и DL равны. Следовательно, опирающиеся на эти отрезки углы $\angle DCK$ и $\angle DAL$ равны.

Тогда в треугольниках ABD и CPD две пары равных углов, поэтому $\angle ABC = \angle APC$. Стало быть, $\angle DPC = \angle ABC = \angle QLD$. Следовательно, четырехугольник $LDPQ$ вписанный.

Замечание. То, что точка L лежит на прямой AB напрямую из построения не следует. Доказательство этого является существенной частью решения.

4. В стране три республики, в каждой из которых ровно 60 городов. Три авиакомпании выполняют рейсы только между городами из разных республик, причем каждая пара городов из разных республик связана прямым рейсом туда и обратно, выполняемым одной из этих авиакомпаний. Для какого наибольшего числа k , независимо от распределения рейсов можно так выбрать k городов и некоторую авиакомпанию, что из каждого из выбранных городов в любой другой выбранный город можно было добраться (не обязательно прямым рейсом) только рейсами, выполняемыми выбранной авиакомпанией?

Ответ: $k = 60$.

Решение. Приведем пример, когда больше 60 городов выбрать не удастся. В каждой республике разобьем города на группы по 20 городов. Нарисуем табличку 3×3 , каждая строка которой — это республика, а каждая клетка — двадцатка городов в этой республике. Пусть каждая авиакомпания соединяет города, обозначенные в своей таблице одной и той же буквой.

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Первая авиакомпания

D	E	F
F	D	E
E	F	D

Вторая авиакомпания

G	H	I
G	H	I
G	H	I

Третья авиакомпания

Тогда любая пара городов из разных республик соединена рейсом какой-то из авиакомпаний. Например, город из первой двадцатки городов второй республики соединен с городом третьей двадцатки первой республики рейсом второй авиакомпании, поскольку эти двадцатки во второй табличке отмечены одинаковой буквой D .

Для любой авиакомпании все города разбиты на тройки групп, между разными тройками нет рейсов. Поэтому нельзя выбрать больше 60 городов, между которыми есть сообщения одной авиакомпанией.

Теперь докажем, что всегда можно выбрать не менее 60 городов, соединенных рейсами какой-то из авиакомпаний. Отметим, что всего есть $3 \cdot 60^2 = 10\,800$ пар городов, между которыми есть авиарейсы. Поэтому какая-то авиакомпания совершает не менее 3600 рейсов. Покажем, что всегда существует не менее 60 городов, соединенных рейсами, выполняемыми именно этой авиакомпанией. Предположим противное. Рассмотрим множество городов, между которыми можно добраться, пользуясь рейсами этой авиакомпании. Пусть в этом множестве a городов из первой республики, b городов из второй и c городов из третьей республики. Тогда по предположению $a + b + c < 60$ и между этими городами авиакомпания совершает не более

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 < 20(a + b + c)$$

рейсов. Т.е. менее чем 20 умноженное на количество городов в множестве. Но тогда всего рейсов у этой авиакомпании будет менее, чем удвадцатеренное общее количество городов в стране, т.е. меньше, чем 3600. Противоречие.

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{\sin^3 x_1}{3 - \cos 2x_2} + \frac{\sin^3 x_2}{3 - \cos 2x_3} + \dots + \frac{\sin^3 x_{13}}{3 - \cos 2x_{14}} + \frac{\sin^3 x_{14}}{3 - \cos 2x_1},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_{14}$ произвольные вещественные числа.

Ответ: $7/2$.

Решение. Если $x_1 = x_2 = \dots = x_{14} = \frac{\pi}{2}$, то все дроби равны $\frac{1}{3 - (-1)} = \frac{1}{4}$, поэтому выражение равно $7/2$. Покажем, что больше $7/2$ оно быть не может. Положим $y_k = \sin^2 x_k$, тогда $0 \leq y_k \leq 1$, $\sin^3 x_k \leq y_k$ и $3 - \cos 2x_k = 3 - (1 - 2\sin^2 x_k) = 2(1 + y_k)$. Поэтому

$$\frac{\sin^3 x_1}{3 - \cos 2x_2} + \frac{\sin^3 x_2}{3 - \cos 2x_3} + \dots + \frac{\sin^3 x_{13}}{3 - \cos 2x_{14}} + \frac{\sin^3 x_{14}}{3 - \cos 2x_1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_2 + 1} + \frac{y_2}{y_3 + 1} + \dots + \frac{y_{13}}{y_{14} + 1} + \frac{y_{14}}{y_1 + 1} \right)$$

и досаточно доказать неравенство

$$\frac{y_1}{y_2 + 1} + \frac{y_2}{y_3 + 1} + \dots + \frac{y_{13}}{y_{14} + 1} + \frac{y_{14}}{y_1 + 1} \leq 7.$$

Для этого заметим, что при $0 \leq a, b \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{b+1} \leq \frac{1-b+a}{2}. \quad (*)$$

Действительно,

$$(b+1)(1-b+a) = 2a + (1-b)(1+b-a) \geq 2a.$$

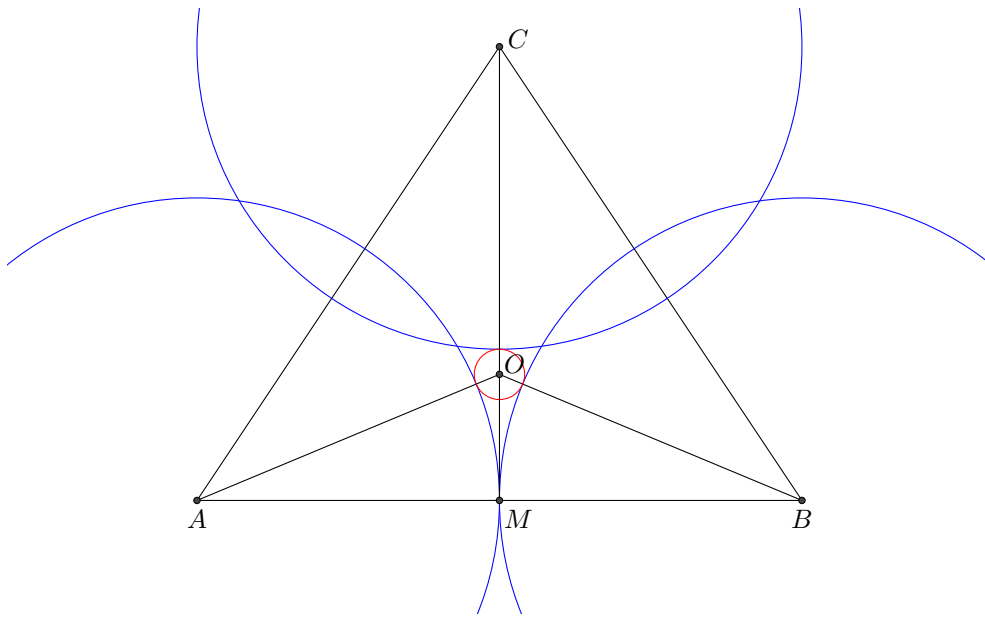
Просуммируем неравенства (*) для $a = y_k$ и $b = y_{k+1}$ и получим, что

$$\frac{y_1}{y_2+1} + \frac{y_2}{y_3+1} + \dots + \frac{y_9}{y_{10}+1} + \frac{y_{10}}{y_1+1} \leq \frac{1-y_2+y_1}{2} + \frac{1-y_3+y_2}{2} + \dots + \frac{1-y_{14}+y_{13}}{2} + \frac{1-y_1+y_{14}}{2} = 7.$$

Замечание. Сдвинем все углы так, чтобы они стали в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Тогда равенство достигается, если x_k равно 0, $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, причем в строчке $x_1, x_2, \dots, x_{14}, x_1$ нет двух соседних нулей.

6. Центры трех шаров радиуса R находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $2R$. Прямой круговой цилиндр касается всех трех шаров внешним образом, его ось перпендикулярна к одной из сторон треугольника и образует с его плоскостью угол 30° . Найдите радиус цилиндра.

Ответ: $R/12$.



Решение. Пусть цилиндр имеет радиус r . Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Треугольник, образованный центрами шаров, имеет сторону $2R$ и высоту $\sqrt{3}R$. Поэтому он спроецируется в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 2R$ и высотой $\sqrt{3}R \cos 30^\circ = 3R/2$. Проекциями шаров будут окружности радиуса R , с центрами в вершинах этого равнобедренного треугольника, а проекцией цилиндра — окружность радиуса r . Точки касания цилиндра с шарами перейдут в точки касания окружностей. Пусть M — середина стороны AB , а O — точка пересечения оси цилиндра с плоскостью. Тогда точка O находится на расстоянии $R+r$ от каждой вершины треугольника ABC . По теореме Пифагора для треугольника AOM находим, что

$$MO^2 = AO^2 - AM^2 = (R+r)^2 - R^2 = 2Rr + r^2.$$

Следовательно,

$$\frac{R}{2} - r = \frac{3R}{2} - (R+r) = CM - CO = MO = \sqrt{2Rr + r^2}.$$

Возведем равенство в квадрат и приведем подобные слагаемые, получим $R/4 = 3r$, откуда $r = R/12$.

РЕШЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ВАРИАНТА

1. Для какого наибольшего натурального числа k можно так расставить в таблице 3×12 числа от 1 до 36 (в каждой клетке ровно одно число), что для любых имеющих общую сторону клеток модуль разности записанных в них чисел не меньше k .

Ответ: $k = 17$.

Решение. Покажем, что $k < 18$. Предположим, что есть такая расстановка чисел, что разность чисел, стоящих в соседних клетках не меньше 18. Для числа 19 только одно из чисел, записанных в таблице, может дать разницу не менее 18, а именно число 1. Но у клетки, в которой стоит число 19, не меньше двух соседей. Поэтому разность между числом 19 и одним из этих соседних чисел не больше 17.

Пример расстановки, для которой модуль разности любых двух соседних чисел не меньше чем 17.

19	2	22	5	25	8	28	11	31	14	34	17
1	21	4	24	7	27	10	30	13	33	16	36
20	3	23	6	26	9	29	12	32	15	35	18

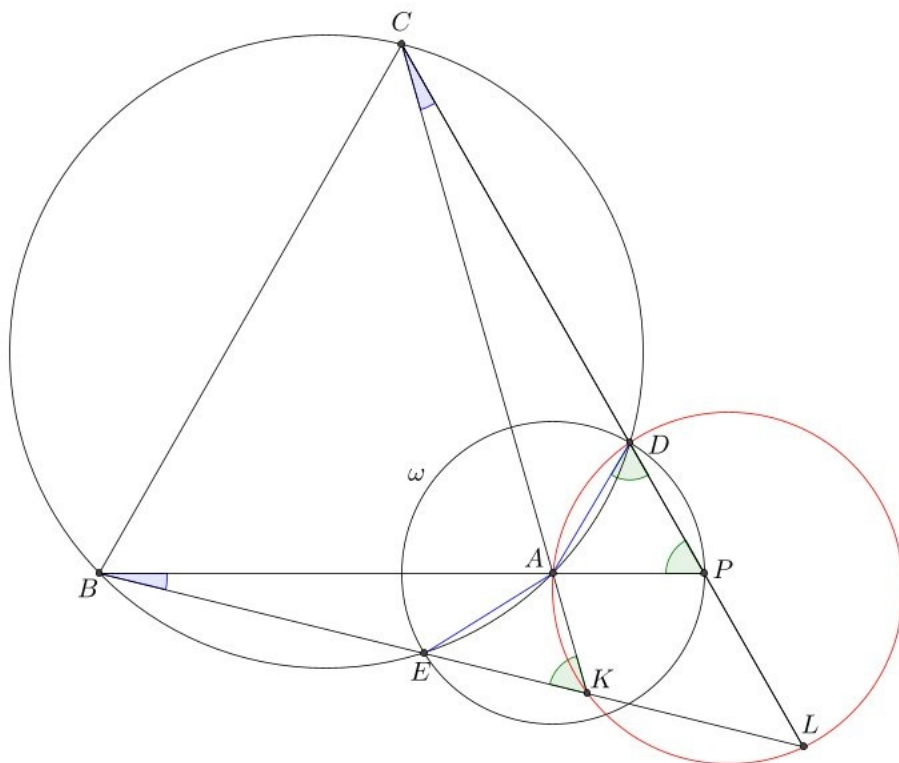
2. Натуральные числа a , b и c таковы, что дроби $3/a$, $2/b$ и $1/c$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Какое наименьшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b , если число a нечетно.

Ответ: 3.

Решение. Поскольку $3/45$, $2/24$ и $1/10$ образуют арифметическую прогрессию, наибольший общий делитель чисел a и b может равняться трем. Покажем, что меньше трех он быть не может. Из-за нечетности числа a он не может равняться двум. Осталось проверить, что числа a и b не могут быть взаимно простыми. Предположим противное. $\frac{3}{a} + \frac{1}{c} = \frac{4}{b}$, поэтому $(a + 3c)b = 4ac$. Следовательно, $(a + 3c)b$ делится на a , что в силу взаимной простоты a и b означает, что $a + 3c$ делится на a . Таким образом, $3c$ делится на a . Но тогда $3c \geq a$ и, значит, $3/a \geq 1/c$, что невозможно по условию.

Замечание. Пример, для которого $\text{НОД}(a, b) = 3$ единственный.

3. Дан остроугольный треугольник ABC . Через вершину A проведена окружность ω , которая пересекала описанную окружность треугольника в точках D и E (точки C и E по разные стороны от прямой AB). Прямые AC и BE пересекаются в точке K . Через точки A , D и K проведена окружность, вторично пересекающая прямую BK в точке L . Прямая AB пересекает отрезок DL в точке P . Оказалось, что точка P лежит на окружности ω . Докажите, что $BC = CP$.



Решение. Покажем, что точка D лежит на прямой CL . Поскольку точки D и E лежат на окружности с центром в точке A , отрезки AD и AE равны. Следовательно, опирающиеся на равные дуги углы $\angle ABE$ и $\angle ACD$ также равны. Из вписанности четырехугольника $ADLK$ имеем $\angle ADL = \angle BKC$. С другой стороны треугольник ADP равнобедренный, поэтому $\angle APD = \angle ADP = \angle BKC$. Следовательно,

$$\angle CAP = \angle BAK = 180^\circ - \angle AKB - \angle ABK = 180^\circ - \angle APD - \angle ACD$$

и, значит, угол $\angle CDP$ развернутый. Стало быть, точка D лежит на отрезке CP . Таким образом, точки C, D, P и L лежат на одной прямой. Из вписанности четырехугольника $ABCD$ следует, что

$$\angle CBP = \angle CBA = \angle ADP = \angle APD = \angle BPC.$$

Следовательно, $BC = CP$.

Замечание. То, что точка D лежит на прямой CP напрямую из построения не следует. Доказательство этого является существенной частью решения.

4. В школе три 11 класса: 11^a , 11^b и 11^c , в каждом из них по 30 учеников. Все ученики занимаются в спортивных, научных и художественных кружках (кружков каждого направления может быть несколько). Никто из школьников не посещает два разных кружка одного направления, а для любой пары учеников из разных классов есть кружок, который они посещают вместе. Для какого наибольшего числа k , всегда можно выбрать k школьников посещающих один и тот же кружок?

Ответ: $k = 30$.

Решение. Приведем пример, когда больше 30 школьников выбрать не удастся. Каждый класс разобьем на группы по 10 учеников. Нарисуем табличку 3×3 , каждая строка которой — это класс, а каждая клетка — группа из 10 школьников в этом классе. Спортивные кружки обозначим буквами A, B, C и распределим школьников между ними как показано в первой таблице. Научные кружки обозначим буквами D, E, F и распределим школьников между ними как показано во второй таблице. Наконец, художественные кружки обозначим буквами G, H, I и распределим школьников между ними как показано в третьей таблице.

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Спортивные кружки

D	E	F
F	D	E
E	F	D

Научные кружки

G	H	I
G	H	I
G	H	I

Художественные кружки

Тогда любая пара школьников из разных классов посещает общий кружок. Например, школьник из первой десятки 11^b вместе со школьником из третьей десятки 11^a ходят в научный кружок F .

Поскольку каждый кружок посещает ровно 30 школьников, k не может быть больше 30.

Теперь докажем, что всегда можно выбрать кружок, который посещает не менее 30 школьников. Отметим, что всего есть $3 \cdot 30^2 = 2700$ пар школьников, учащихся в разных классах. Поэтому кружками какого-то из трех направлений интересуется не менее 900 пар школьников. Покажем, что всегда существует кружок именно этого направления, который посещает не менее 30 школьников. Предположим противное. Рассмотрим один кружок этого направления. Пусть в нем a школьников из 11^a , b школьников из 11^b и c школьников из 11^c класса. Тогда по предположению $a + b + c < 30$ и пар школьников, посещающих этот кружок не больше

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 < 10(a + b + c).$$

Т.е. менее чем 10 умноженное на количество школьников в кружке. Но тогда всего пар школьников посещающих один и тот же кружок данного направления меньше, чем удесятеренное общее количество школьников во всех классах, т.е. меньше, чем 900. Противоречие.

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{\cos^3 x_2}{3 + \cos 2x_1} + \frac{\cos^3 x_3}{3 + \cos 2x_2} + \dots + \frac{\cos^3 x_{10}}{3 + \cos 2x_9} + \frac{\cos^3 x_1}{3 + \cos 2x_{10}},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ произвольные вещественные числа.

Ответ: $5/2$.

Решение. Если $x_1 = x_2 = \dots = x_{10} = 0$, то все дроби равны $\frac{1}{4}$, поэтому выражение равно $5/2$. Покажем, что больше $5/2$ оно быть не может. Положим $y_k = \cos^2 x_k$, тогда $0 \leq y_k \leq 1$, $\cos^3 x_k \leq y_k$ и $3 + \cos 2x_k = 3 + (1 + 2\cos^2 x_k) = 2(1 + y_k)$. Поэтому

$$\frac{\cos^3 x_2}{3 + \cos 2x_1} + \frac{\cos^3 x_3}{3 + \cos 2x_2} + \dots + \frac{\cos^3 x_{10}}{3 + \cos 2x_9} + \frac{\cos^3 x_1}{3 + \cos 2x_{10}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y_2}{y_1 + 1} + \frac{y_3}{y_2 + 1} + \dots + \frac{y_{10}}{y_9 + 1} + \frac{y_1}{y_{10} + 1} \right)$$

и досаточно доказать неравенство

$$\frac{y_2}{y_1 + 1} + \frac{y_3}{y_2 + 1} + \dots + \frac{y_{10}}{y_9 + 1} + \frac{y_1}{y_{10} + 1} \leq 5.$$

Для этого заметим, что при $0 \leq a, b \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{b + 1} \leq \frac{1 - b + a}{2}. \quad (*)$$

Действительно,

$$(b + 1)(1 - b + a) = 2a + (1 - b)(1 + b - a) \geq 2a.$$

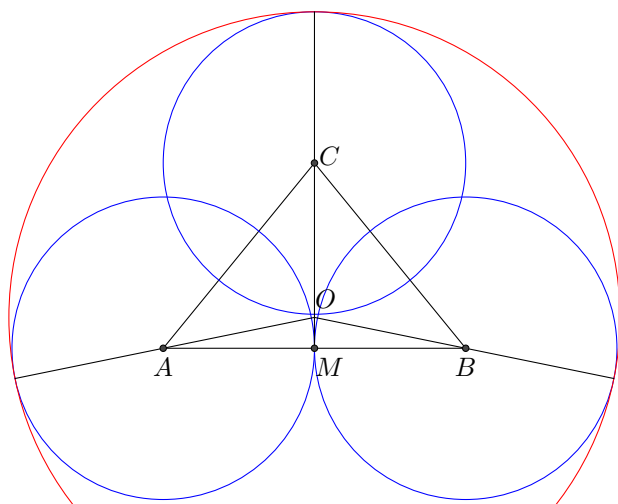
Просуммируем неравенства $(*)$ для $a = y_{k+1}$ и $b = y_k$ и получим, что

$$\frac{y_2}{y_1 + 1} + \frac{y_3}{y_2 + 1} + \dots + \frac{y_{10}}{y_9 + 1} + \frac{y_1}{y_{10} + 1} \leq \frac{1 + y_2 - y_1}{2} + \frac{1 + y_3 - y_2}{2} + \dots + \frac{1 + y_{10} - y_9}{2} + \frac{1 + y_1 - y_{10}}{2} = 5.$$

Замечание. Сдвинем все углы так, чтобы они стали в полуинтервале $[-\pi, \pi)$. Тогда равенство достигается, если x_k равно 0 или $\pm \frac{\pi}{2}$, причем в строчке $x_1, x_2, \dots, x_{10}, x_1$ нет двух соседних ненулевых чисел.

6. Центры трех шаров радиуса R находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $2R$. Прямой круговой цилиндр касается всех трех шаров внутренним образом, его ось перпендикулярна к одной из сторон треугольника и образует с его плоскостью угол 45° . Найдите радиус цилиндра.

Ответ: $\left(\frac{5}{2\sqrt{6}} + 1\right)R$.



Решение. Пусть цилиндр имеет радиус r . Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Треугольник, образованный центрами шаров, имеет сторону $2R$ и высоту $\sqrt{3}R$. Поэтому он спроецируется в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 2R$ и высотой $\sqrt{3}R \cos 45^\circ = \sqrt{3}/2 R$. Проекциями шаров будут окружности радиуса R , с центрами в вершинах этого равнобедренного треугольника, а проекцией цилиндра — окружность радиуса r . Точки касания цилиндра с шарами перейдут в точки касания окружностей. Пусть M — середина стороны AB , а O — точка пересечения оси цилиндра с плоскостью. Тогда точка O находится на расстоянии $r - R$ от каждой вершины треугольника ABC . По теореме Пифагора для треугольника AOM находим, что

$$MO^2 = AO^2 - AM^2 = (r - R)^2 - R^2 = r^2 - 2Rr.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{3}{2}}R - (r - R) = CM - CO = MO = \sqrt{r^2 - 2Rr}.$$

Возведем равенство в квадрат и приведем подобные слагаемые, получим

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right)^2 R = \sqrt{6}r,$$

откуда

$$r = \left(\frac{5}{2\sqrt{6}} + 1\right)R.$$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2025/2026 учебный год

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

РЕШЕНИЯ ПЕРВОГО ВАРИАНТА

1. Два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{f(2)}{g(2)} = 3.$$

Найдите значение $f(4)$, если известно, что $g(4) = 5$, $f(6) = 7$ и $g(6) = 8$.

Ответ: $f(4) = 9, 9$.

Решение. Положим $h(x) = f(x) - 3g(x)$. По условию $h(1) = h(2) = 0$ и $h(6) = 7 - 3 \cdot 8 = -17$. Поэтому $h(x)$ — квадратный трехчлен с корнями 1 и 2. Следовательно, $h(x) = c(x-1)(x-2)$ для некоторого ненулевого c . Из равенства $-17 = h(6) = c(6-1)(6-2) = 20c$ находим, что $c = -17/20$. Таким образом,

$$f(4) = h(4) + 3g(4) = -\frac{17}{20}(4-1)(4-2) + 3 \cdot 5 = -\frac{51}{10} + 15 = 9, 9.$$

2. В Цветочном городе ходят автобусы и троллейбусы. Одна поездка на автобусе стоит на 6 рублей дороже одной поездки на троллейбусе. Незнайка за неделю совершил 42 поездки и потратил на это 1200 рублей. Сколько раз Незнайка катался на автобусе, если известно, что на автобусе он катался более чем в два раза чаще, чем на троллейбусе? Сколько стоила одна поездка на автобусе? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Ответ: Незнайка катался на автобусе 39 раз, а одна поездка стоила 29 рублей или Незнайка катался на автобусе 32 раза, а одна поездка стоила 30 рублей.

Решение. Пусть n — количество поездок на троллейбусе, а c — стоимость одной поездки на троллейбусе. Тогда поездка на автобусе обходится в $c+6$ рублей и Незнайка совершил $42-n$ поездок на автобусе. По условию $42-n > 2n$, поэтому $n \leq 13$. Поскольку Незнайка потратил 1200 рублей,

$$1200 = cn + (c+6)(42-n) = 252 + 42c - 6n.$$

Таким образом, $158+n = 7c$ и, в частности, $158+n$ делится на 7. Следовательно, $n = 3$ или $n = 10$. В первом случае поездок на автобусе было $42-n = 39$, стоимость одной поездки на троллейбусе $c = \frac{158+3}{7} = 23$ рубля, а на автобусе $c+6 = 29$ рублей. Во втором случае поездок на автобусе было $42-n = 32$, стоимость одной поездки на троллейбусе $c = \frac{158+10}{7} = 24$ рубля, а на автобусе $c+6 = 30$ рублей. Поскольку $1200 = 23 \cdot 3 + 29 \cdot 39 = 24 \cdot 10 + 30 \cdot 32$, оба случая возможны.

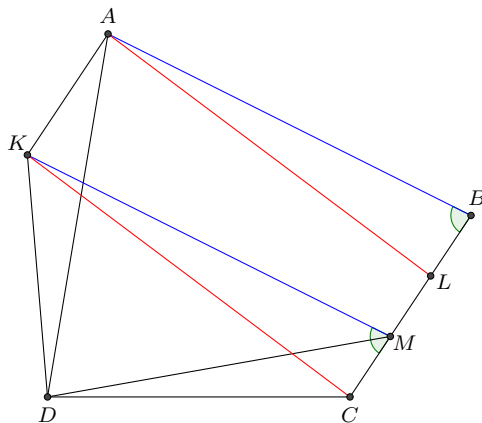
3. На доске 2026×2026 расставлены ладьи так, что каждая клетка доски находится под боем хотя бы одной ладьи, но каждая ладья бьет не более 20 других ладей. Для какого наименьшего n можно утверждать, что в любом клетчатом квадрате $n \times n$ находится хотя бы одна ладья. Ладья — это шахматная фигура, которая держит под боем все клетки своей вертикали и своей горизонтали.

Ответ: $2026 - 92 = 1934$.

Решение. Покажем, что для $n \leq 1933$ можно так расставить ладьи, что в каком-то квадрате $n \times n$ не будет ни одной ладьи. Пронумеруем столбцы слева направо, а строки снизу вверх числами от 1 до 2026. В строке с номером k , где $1 \leq k \leq 96$ расставим ладьи в столбцах с номерами $21k-20, 21k-19, \dots, 21k$ (в каждой такой строке будет по 21 ладье). А в строке с номером 97 поставим ладьи в последние 10 столбцов. В итоге будет поставлено $96 \cdot 21 + 10 = 2026$ ладей, причем в каждом столбце будет ровно одна ладья, а в каждой строке не более 21 ладьи. Поэтому такая расстановка ладей удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим левый верхний квадрат 1933×1933 . Его строки имеют номера от 94 до 2026. Поэтому в этих строках все ладьи стоят в столбцах с номерами не меньше, чем $21 \cdot 94 - 20 = 1954$. Значит, они не попадают в этот квадрат.

Покажем теперь, что в квадрате 1934×1934 обязательно располагается хотя бы одна ладья. Предположим противное. Заметим, что есть ровно 92 строки, которые не задевают этот квадрат. В этих строках располагается не более $92 \cdot 21 = 1932$ ладей. Поэтому есть хотя бы один столбец квадрата (пусть он имеет номер a), который не бьется этими ладьями. Аналогично есть ровно 92 столбца, которые не задевают этот квадрат. В этих столбцах также располагается не более $92 \cdot 21 = 1932$ ладей. Поэтому есть хотя бы одна строка квадрата (пусть она имеет номер b), которая не бьется этими ладьями. Но тогда клетка, расположенная в пересечении b -й строки и a -го столбца не бьется ни одной ладьей. Противоречие.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняется соотношение $\angle ABC + \angle BCD \geq 180^\circ$. Сторона BC поделена на три равные части точками L и M . Докажите, что $AL + DM > AB + CD$.



Решение. Пусть точка M лежит между C и L . Отметим на плоскости такую точку K , что четырёхугольник $ABMK$ будет параллелограммом. Тогда $AB = KM$, а отрезки AK и BM равны и параллельны. Поэтому равны и параллельны также и отрезки AK и CL . Следовательно, четырёхугольник $ALCK$ также является параллелограммом и, в частности, $AL = CK$. Таким образом, нужно доказать неравенство

$$AL + DM = CK + DM > KM + CD = AB + CD.$$

Иными словами, что сумма длин диагоналей четырёхугольника $CDKM$ больше суммы длин двух противоположных сторон. Это очевидно в случае, когда диагонали четырёхугольника пересекаются. Поэтому осталось проверить, что четырёхугольник $CDKM$ является выпуклым, т.е. что все его углы меньше 180° . Для проверки этого заметим, что из параллельности прямых AB и KM углы $\angle ABC$ и $\angle CMK$ равны, поэтому (угол $\angle DKM$ рассматриваем как угол в четырёхугольнике $CDKM$, т.е. возможно он и больше развёрнутого)

$$\angle CDK + \angle DKM = 360^\circ - \angle CMK - \angle DCM = 360^\circ - \angle ABC - \angle BCD \leq 180^\circ.$$

Следовательно, углы $\angle CDK$ и $\angle DKM$ меньше 180° . А углы $\angle MCD$ и $\angle KMC$ совпадают с углами выпуклого четырёхугольника $ABCD$, поэтому они также меньше 180° .

Замечание. Выпуклость четырёхугольника $CDKM$ нуждается в доказательстве. Просто сослаться на картинку не достаточно. В обосновании обязательно должно быть использовано условие $\angle ABC + \angle BCD \geq 180^\circ$, поскольку без него нет нужной выпуклости. Более того, без этого условия неверно утверждение задачи.

5. Решите в натуральных числах уравнение $5^x + 12^y = z^2$.

Ответ: (2, 2, 13).

Первое решение. Очевидно, что число z нечетно, а также не делится на три и на пять. Тогда $z = 3u \pm 1$ и $z^2 = 9u^2 \pm 6u + 1$ и, значит, z^2 дает остаток 1 при делении на 3. Заметим, что остатки степеней пятерки при делении на 3 чередуются: при нечетных степенях это 2, а при четных — 1. Следовательно, число x четно. Пусть $x = 2k$. Тогда

$$12^y = z^2 - 5^{2k} = (z - 5^k)(z + 5^k). \quad (*)$$

Заметим, что

$$\text{НОД}(z + 5^k, z - 5^k) = \text{НОД}((z + 5^k) - (z - 5^k), z - 5^k) = \text{НОД}(2 \cdot 5^k, z - 5^k) = 2.$$

Поэтому одна из скобок в (*) равна $2 \cdot 3^y$, а другая 2^{2y-1} . В любом случае 5^k является полуразностью чисел $2 \cdot 3^y$ и 2^{2y-1} . Таким образом,

$$\pm 5^k = 3^y - 2^{2y-2}. \quad (**)$$

Но если y нечетно, то правая часть дает остаток 1 или 2 от деления на 5, что невозможно. Стало быть, y — четно. Для $y = 2$ имеем $3^2 - 2^2 = 5^1$, что возможно при $k = 1$; для $y = 4$ имеем $3^4 - 2^6 = 17 \neq \pm 5^k$. Таким образом, можно считать, что $y = 2n$ и $n \geq 3$. При $y \geq 5$ справедливо неравенство

$$2^{2y-2} = 4^{y-5} \cdot 2^8 = 4^{y-5} \cdot 256 > 3^{y-5} \cdot 243 = 3^y,$$

поэтому правая часть соотношения (**) отрицательна и в левой части стоит знак « $-$ ». Стало быть, $5^k + 3^{2n} = 2^{4n-2}$ и, значит, $5^k + 9^n = 5^k + 3^{2n}$ делится на 4. Но это невозможно, поскольку 5^k и 9^n дают остатки 1 от деления на 4.

Осталось убедиться, что $x = y = 2$ подходит. Действительно, $5^x + 12^y = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$, откуда $z = 13$.

Второе решение. Поскольку левая часть равенства не делится на 3, число z также не делится на 3. Тогда $z = 3u \pm 1$ и $z^2 = 9u^2 \pm 6u + 1$ и, значит, z^2 дает остаток 1 при делении на 3. Заметим, что остатки степеней пятерки при делении на 3 чередуются: при нечетных степенях это 2, а при четных — 1. Следовательно, число x четно. С другой стороны левая часть равенства нечетна и не делится на 5, поэтому число z также нечетно и не делится на 5. Значит оно оканчивается на 1, 3, 7 или 9. Тогда z^2 оканчивается на 1 или 9. Заметим, что последняя цифра у числа 5^x всегда пятерка, а последние цифры числа 12^y чередуются: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 6, 8, Поэтому 12^y может оканчиваться лишь на 4 или 6, что соответствует четной степени y . Пусть $x = 2k$ и $y = 2n$. Тогда

$$5^{2k} = z^2 - 12^{2n} = (z - 12^n)(z + 12^n).$$

Произведение чисел $z - 12^n$ и $z + 12^n$ есть степень пятерки, поэтому каждое из них также является степенью пятерки. Значит, $z - 12^n = 5^a$ и $z + 12^n = 5^b$ для некоторых неотрицательных целых чисел $a < b$. Тогда $5^b - 5^a = 2 \cdot 12^n$. Правая часть равенства не делится на пять, поэтому $a = 0$ и, значит, $b = 2k$. Стало быть, $5^{2k} - 1 = 2 \cdot 12^n$. Таким образом,

$$2 \cdot 12^n = (5^k - 1)(5^k + 1).$$

Заметим, что числа $5^k - 1$ и $5^k + 1$ четны и отличаются на два. Поэтому их общий делитель равен двум. Кроме того они оба больше двух. Поскольку их произведение равно $2^{2n+1}3^n$, одно из них равно $2 \cdot 3^n$, а другое — 2^{2n} . Но число $5^n + 1$ не делится на 4. Значит, $5^k - 1 = 2^{2n}$ и $5^k + 1 = 2 \cdot 3^n$. Следовательно,

$$4^n + 2 = (5^k - 1) + 2 = 5^k + 1 = 2 \cdot 3^n.$$

Но $4^3 = 64 > 54 = 2 \cdot 3^3$, поэтому при $n \geq 3$ это равенство не может быть выполнено. Осталось проверить, что для $n = 1$ и $n = 2$ оно верно, но нужное k существует лишь для $n = 1$. Таким образом, $n = 1$ и $y = 2n = 2$. Поэтому $k = 1$ и $x = 2k = 2$. Подставим найденные x и y в левую часть и получим, что $z = 13$.

6. 36 школьников сыграли шахматный турнир. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Оказалось, что любые 20 школьников можно так рассадить за круглым столом, что каждый сидящий за столом обыграл своего соседа слева. Докажите, что из любого 21 школьника можно так выбрать 19 и рассадить их за круглым столом, что каждый сидящий за столом обыграл своего соседа слева.

Решение. Назовем рассадку школьников за круглым столом *хорошей*, если каждый школьник обыграл своего соседа слева. Покажем, что каждый школьник выиграл не менее 17 партий. Допустим, что какой-то школьник (назовем его Васей) выиграл не более 16 партий. Тогда он не выиграл партии как минимум с $36 - 16 - 1 = 19$ школьниками. Возьмем Васю и 19 школьников, которых он не смог обыграть. Для этих 20 человек нет хорошей рассадки, поскольку никого нельзя посадить слева от Васи. Аналогично, устанавливается, что каждый школьник проиграл не менее 17 партий. Всего каждый школьник сыграл 35 партий. Таким образом, каждый школьник не больше одной партии сыграл вничью.

Будем решать задачу от противного. Рассмотрим произвольный набор из 21 школьника и предположим, что из них нельзя выбрать требуемые 19 человек. Среди 21 школьника есть такой (назовем его Колей), который ни с кем из оставшихся 20 не играл вничью, поскольку игравшие вничью разбиваются на пары, а 21 — нечетное число. Рассмотрим хорошую рассадку этих 20 школьников. Назовем их $A_1, A_2, \dots, A_{20}$ (нумерация по часовой стрелке). Тогда A_k обыграл A_{k+1} и A_{20} обыграл A_1 . Кто-то из них обыграл Колю. Можно считать, что это был A_1 . Если Коля обыграл A_4 , то можно вместо школьников A_2 и A_3 посадить Колю и получится хорошая рассадка для 19 человек. Поэтому A_4 обыграл Колю. Если Коля обыграл A_7 , то можно вместо школьников A_5 и A_6 посадить Колю и снова получится хорошая рассадка для 19 человек. Поэтому A_7 также обыграл Колю. Аналогично рассуждая далее получим, что Коля также проиграл школьникам $A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_{19}, A_2, A_5, \dots, A_{20}, A_3, A_6, \dots, A_{18}$. Но он не мог проиграть 20 партий, поскольку выиграл не менее 17 из 35 сыгранных партий. Противоречие.

РЕШЕНИЯ ВТОРОГО ВАРИАНТА

1. Два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{f(-4)}{g(-4)} = \frac{f(3)}{g(3)} = -2.$$

Известно, что $f(1) = -6$, $f(4) = 2$ и $g(4) = -3$. Найдите $g(1)$.

Ответ: $g(1) = 5, 5$.

Решение. Положим $h(x) = f(x) + 2g(x)$. По условию $h(-4) = h(3) = 0$ и $h(4) = 2 + 2 \cdot (-3) = -4$. Поэтому $h(x)$ — квадратный трехчлен с корнями -4 и 3 . Следовательно, $h(x) = c(x + 4)(x - 3)$ для некоторого ненулевого c . Из равенства $-4 = h(4) = c(4 + 4)(4 - 3) = 8c$ находим, что $c = -1/2$. Таким образом,

$$g(1) = \frac{1}{2}(h(1) - f(1)) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(1 + 4)(1 - 3) + 6\right) = \frac{1}{2}(5 + 6) = 5, 5.$$

2. В Солнечном городе ходят автобусы и трамваи. Одна поездка на трамвае стоит на 5 рублей дороже одной поездки на автобусе. Незнайка за неделю совершил 45 поездок и потратил на это 1250 рублей. Сколько раз Незнайка катался на трамвае, если известно, что на трамвае он катался меньше, чем на автобусе? Сколько стоила одна поездка на трамвае? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Ответ: Незнайка катался на трамвае 7 раз, а одна поездка стоила 32 рубля или Незнайка катался на трамвае 16 раз, а одна поездка стоила 31 рубль.

Решение. Пусть n — количество поездок на трамвае, а c — стоимость одной поездки на автобусе. Тогда поездка на трамвае обходится в $c + 5$ рублей и Незнайка совершил $45 - n$ поездок на автобусе. По условию $45 - n > n$, поэтому $n \leq 22$. Поскольку Незнайка потратил 1250 рублей,

$$1250 = (c + 5)n + c(45 - n) = 45c + 5n.$$

Таким образом, $250 - n = 9c$ и, в частности, $250 - n$ делится на 9. Следовательно, $n = 7$ или $n = 16$. В первом случае поездок на автобусе было $45 - n = 38$, стоимость одной поездки на автобусе $c = \frac{250-7}{9} = 27$ рублей, а на трамвае $c + 5 = 32$ рубля. Во втором случае поездок на автобусе было $45 - n = 29$, стоимость одной поездки на автобусе $c = \frac{250-16}{9} = 26$ рублей, а на трамвае $c + 5 = 31$ рубль. Поскольку $1250 = 27 \cdot 38 + 32 \cdot 7 = 26 \cdot 29 + 31 \cdot 16$, оба случая возможны.

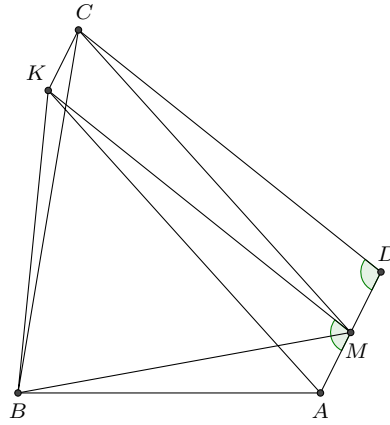
3. На доске 2027×2027 расставлены ладьи так, что каждая клетка доски находится под боем хотя бы одной ладьи, но каждая ладья бьет не более 23 других ладьи. Для какого наименьшего n можно утверждать, что в любом клетчатом квадрате $n \times n$ находится хотя бы одна ладья. Ладья — это шахматная фигура, которая держит под боем все клетки своей вертикали и своей горизонтали.

Ответ: $2027 - 81 = 1946$.

Решение. Покажем, что для $n \leq 1945$ можно так расставить ладьи, что в каком-то квадрате $n \times n$ не будет ни одной ладьи. Пронумеруем столбцы слева направо, а строки снизу вверх числами от 1 до 2027. В строке с номером k , где $1 \leq k \leq 84$ расставим ладьи в столбцах с номерами $24k - 23, 24k - 22, \dots, 24k$ (в каждой такой строке будет по 24 ладьи). А в строке с номером 85 поставим ладьи в последние 11 столбцов. В итоге будет поставлено $84 \cdot 24 + 11 = 2027$ ладей, причем в каждом столбце будет ровно одна ладья, а в каждой строке не более 24 ладей. Поэтому такая расстановка ладей удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим левый верхний квадрат 1945×1945 . Его строки имеют номера от 83 до 2027. Поэтому в этих строках все ладьи стоят в столбцах с номерами не меньше, чем $24 \cdot 83 - 23 = 1969$. Значит, они не попадают в этот квадрат.

Покажем теперь, что в квадрате 1946×1946 обязательно располагается хотя бы одна ладья. Предположим противное. Заметим, что есть ровно 81 строка, которая не задевает этот квадрат. В этих строках располагается не более $81 \cdot 24 = 1944$ ладей. Поэтому есть хотя бы один столбец квадрата (пусть он имеет номер a), который не бьется этими ладьями. Аналогично есть ровно 81 столбец, который не задевает этот квадрат. В этих столбцах также располагается не более $81 \cdot 24 = 1944$ ладей. Поэтому есть хотя бы одна строка квадрата (пусть она имеет номер b), которая не бьется этими ладьями. Но тогда клетка, расположенная в пересечении b -й строки и a -го столбца не бьется ни одной ладьей. Противоречие.

4. Точка M является серединой стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, где $\angle ABC + \angle BCD \leq 180^\circ$. Докажите, что $BM + MC > AB + CD$.



Первое решение. Отметим на плоскости такую точку K , что четырёхугольник $CDMK$ будет параллелограммом. Тогда $CD = KM$, а отрезки KC и MD равны и параллельны. Поэтому равны и параллельны также и отрезки KC и AM . Следовательно, четырёхугольник $CMAK$ также является параллелограммом и, в частности, $CM = AK$. Таким образом, нужно доказать неравенство

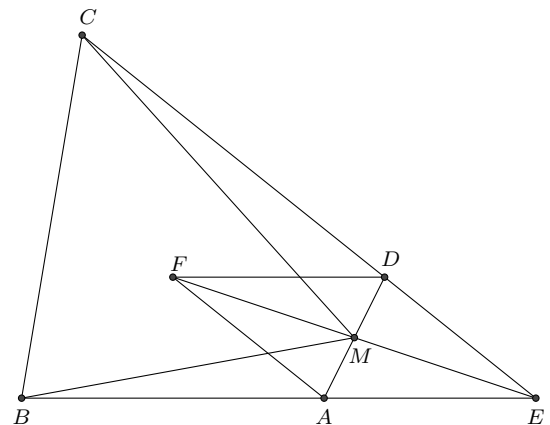
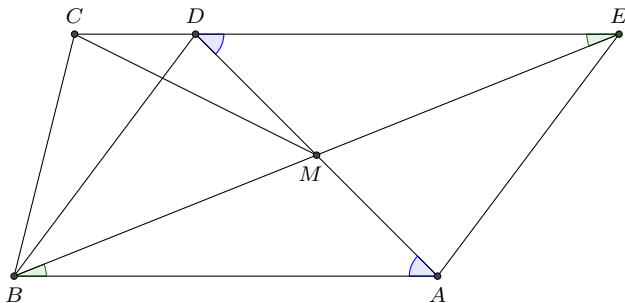
$$BM + MC = BM + AK > AB + KM = AB + CD.$$

Иными словами, что сумма длин диагоналей четырёхугольника $ABKM$ больше суммы длин двух противоположных сторон. Это очевидно в случае, когда диагонали четырёхугольника пересекаются. Поэтому осталось проверить, что четырёхугольник $ABKM$ является выпуклым, т.е. что все его углы меньше 180° . Для проверки этого заметим, что из параллельности прямых CD и KM углы $\angle ADC$ и $\angle AMK$ равны, поэтому (угол $\angle BKM$ рассматриваем как угол в четырёхугольнике $ABKM$, т.е. возможно он и больше развёрнутого)

$$\angle ABK + \angle BKM = 360^\circ - \angle AMK - \angle BAM = 360^\circ - \angle ADC - \angle BAD = \angle ABC + \angle BCD \leq 180^\circ.$$

Следовательно, углы $\angle ABK$ и $\angle BKM$ меньше 180° . А углы $\angle AMK$ и $\angle BAM$ совпадают с углами выпуклого четырёхугольника $ABCD$, поэтому они также меньше 180° .

Замечание. Выпуклость четырёхугольника $ABKM$ нуждается в доказательстве. Просто сослаться на картинку не достаточно. В обосновании обязательно должно быть использовано условие $\angle ABC + \angle BCD \leq 180^\circ$, поскольку без него нет нужной выпуклости. Более того, без этого условия неверно утверждение задачи.



Второе решение. Если прямые AB и CD параллельны, то продолжим отрезок BM до пересечения с прямой CD , обозначим точку пересечения через E . Из параллельности прямых AB и CD следует, что $\angle ABE = \angle BED$ и $\angle BAD = \angle ADE$. По условию $AM = MD$, поэтому треугольники ABM и DEM равны по двум углам и стороне. Следовательно, $AB = DE$ и $BM = ME$. Из неравенства треугольника следует, что

$$BM + CM = ME + CM > CE = CD + DE = CD + AB.$$

Если стороны AB и CD не параллельны, то прямые AB и CD пересекаются. Обозначим их точку пересечения через E . Из условия на углы следует, что точка D находится на отрезке CE , а точка A

на отрезке BE . Пусть точка F симметрична точке E симметрично относительно M , тогда $AEDF$ — параллелограмм и из неравенства треугольника для треугольника AEF заключаем, что $AE + DE = AE + AF > EF = 2ME$. С другой стороны из неравенств треугольника для BME и CME следует, что

$$BM + CM > (BE - ME) + (CE - ME) = AB + CD + (AE + DE - 2ME) > AB + CD.$$

5. Решите в натуральных числах уравнение $12^x + 17^y = z^2$.

Ответ: (4, 2, 145).

Первое решение. Очевидно, что число z нечетно, а также не делится на три и на 17. Тогда $z = 3u \pm 1$ и $z^2 = 9u^2 \pm 6u + 1$ и, значит, z^2 дает остаток 1 при делении на 3. Заметим, что остатки степеней 17 при делении на 3 чередуются: при нечетных степенях это 2, а при четных — 1. Следовательно, число y четно. Пусть $y = 2n$. Тогда

$$12^x = z^2 - 17^{2n} = (z - 17^n)(z + 17^n). \quad (*)$$

Заметим, что

$$\text{НОД}(z + 17^n, z - 17^n) = \text{НОД}((z + 17^n) - (z - 17^n), z - 17^n) = \text{НОД}(2 \cdot 17^n, z - 17^n) = 2.$$

Поэтому одна из скобок в $(*)$ равна $2 \cdot 3^x$, а другая 2^{2x-1} . В любом случае 17^n является полуразностью чисел $2 \cdot 3^x$ и 2^{2x-1} . Таким образом,

$$\pm 17^n = 3^x - 2^{2x-2}. \quad (**)$$

Но если x нечетно, то 2^{2x-2} может давать лишь остатки 1 и 16 от деления на 17, а 3^x только остатки 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 или 14. В любом случае правая часть не может делиться на 17. Стало быть, x — четно. Для $x = 2$ имеем $3^2 - 2^2 = 5 \neq \pm 17$; для $x = 4$ имеем $3^4 - 2^6 = 17^1$, что возможно для $n = 1$. Таким образом, можно считать, что $x = 2k$ и $k \geq 3$. При $x \geq 5$ справедливо неравенство

$$2^{2x-2} = 4^{x-5} \cdot 2^8 = 4^{x-5} \cdot 256 > 3^{x-5} \cdot 243 = 3^x,$$

поэтому правая часть соотношения $(**)$ отрицательна и в левой части стоит знак « $-$ », Стало быть, $17^n + 3^{2k} = 2^{4k-2}$ и, значит, $17^n + 9^k = 17^n + 3^{2k}$ делится на 4. Но это невозможно, поскольку 17^k и 9^n дают остатки 1 от деления на 4.

Осталось убедиться, что $x = 4$ и $y = 2$ подходит. Действительно, тогда $3^4 - 2^6 = 17^1$, кроме того $z + 17^1 = 2 \cdot 3^4$ и $z - 17^1 = 2^7$, следовательно, $z^2 - 17^2 = 2^8 \cdot 3^4 = 12^4$ для $z = 2^7 + 17 = 145$.

Второе решение. Поскольку левая часть равенства не делится на 3, число z также не делится на 3. Тогда $z = 3u \pm 1$ и $z^2 = 9u^2 \pm 6u + 1$ и, значит, z^2 дает остаток 1 при делении на 3. Заметим, что остатки степеней 17 при делении на 3 чередуются: при нечетных степенях это 2, а при четных — 1. Следовательно, число y четно. С другой стороны левая часть равенства не делится на 17, поэтому число z также не делится на 17. Перебирая возможные остатки от деления z на 17 получим, что число z^2 может иметь остатки 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 и 16 при делении на 17. Выписывая остатки от деления 12^x на 17 легко увидеть, что возможные остатки (1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 и 16) соответствуют четному показателю x .¹ Пусть $x = 2k$ и $y = 2n$. Тогда

$$17^{2n} = z^2 - 12^{2k} = (z - 12^k)(z + 12^k).$$

Произведение чисел $z - 12^k$ и $z + 12^k$ есть степень 17, поэтому каждое из них также является степенью 17. Значит, $z - 12^k = 17^a$ и $z + 12^k = 17^b$ для некоторых неотрицательных целых чисел $a < b$. Тогда $17^b - 17^a = 2 \cdot 12^n$. Правая часть равенства не делится на 17, поэтому $a = 0$ и, значит, $b = 2k$. Стало быть, $17^{2k} - 1 = 2 \cdot 12^n$. Таким образом,

$$2 \cdot 12^n = (17^k - 1)(17^k + 1).$$

Заметим, что числа $17^k - 1$ и $17^k + 1$ четны и отличаются на два. Поэтому их общий делитель равен двум. Кроме того они оба больше двух. Поскольку их произведение равно $2^{2n+1}3^n$, одно из них равно $2 \cdot 3^n$, а другое — 2^{2n} . Но число $17^n + 1$ не делится на 4. Значит, $17^k - 1 = 2^{2n}$ и $17^k + 1 = 2 \cdot 3^n$. Следовательно,

$$4^n + 2 = (17^k - 1) + 2 = 17^k + 1 = 2 \cdot 3^n.$$

Но $4^3 = 64 > 54 = 2 \cdot 3^3$, поэтому при $n \geq 3$ это равенство не может быть выполнено. Осталось проверить, что для $n = 1$ и $n = 2$ оно верно, но нужное k существует лишь для $n = 2$. Таким образом, $n = 2$ и $y = 2n = 4$. Поэтому $k = 1$ и $x = 2k = 2$. Подставим найденные x и y в левую часть и получим, что $z = 145$.

¹Тот же вывод можно сделать и другими способами. Например, по малой теореме Ферма остаток от деления на 17 у 16 степени любого числа равен 0 или 1. Тогда остаток от деления на 17 у числа $(z^2 - 17^y)^8$ равен 1. Следовательно, остаток от деления на 17 у числа 12^{8x} также равен 1, а для нечетных x он такой же как и у числа 12^8 , т.е. равен 16.

6. 48 школьников дарили друг другу на Новый год фигурки Деда Морозов. Никакие двое не обменивались подарками. Оказалось, что любые 26 школьников можно так рассадить за круглым столом, что каждый сидящий за столом подарил Деда Мороза своему соседу слева. Докажите, что из любых 27 школьников можно так выбрать 25 и рассадить их за круглым столом, что каждый сидящий за столом подарил Деда Мороза своему соседу слева.

Решение. Назовем рассадку школьников за круглым столом *хорошей*, если каждый школьник подарил Деда Мороза своему соседу слева. Покажем, что каждый школьник подарил не менее 23 фигурок. Допустим, что какой-то школьник (назовем его Васей) подарил не более 22 фигурок. Тогда он не дарил фигурки как минимум $48 - 22 - 1 = 25$ школьникам. Возьмем Васю и 25 школьников, которым он ничего не дарил. Для этих 26 человек нет хорошей рассадки, поскольку никого нельзя посадить слева от Васи. Аналогично, устанавливается, что каждый школьник получил не менее 23 Деда Морозов. Таким образом, для каждого школьника все, кроме возможно одного либо от него получили подарок, либо ему подарили подарок. Назовем пару школьников A и B скучной, если A не дарил подарок B , а B не дарил подарок A . Тогда все скучные пары не пересекаются.

Будем решать задачу от противного. Рассмотрим произвольный набор из 27 школьников и предположим, что из них нельзя выбрать требуемые 25 человек. Поскольку 27 — нечетное число, среди 27 школьников есть такой (назовем его Колей), который каждому из оставшихся либо подарил фигурку, либо получил ее в подарок. Рассмотрим хорошую рассадку этих 26 школьников. Назовем их школьников $A_1, A_2, \dots, A_{26}$ (нумерация по часовой стрелке). Тогда A_k подарил Деда A_{k+1} , а A_{26} подарил Деда A_1 . Кто-то из них подарил Коле фигурку Деда. Можно считать, что это был A_1 . Если Коля подарил фигурку A_4 , то можно вместо школьников A_2 и A_3 посадить Колю и получится хорошая рассадка для 25 человек. Поэтому A_4 также дарил фигурку Коле. Если Коля подарил Деда A_7 , то можно вместо школьников A_5 и A_6 посадить Колю и снова получится хорошая рассадка для 25 человек. Поэтому A_7 также подарил фигурку Коле. Аналогично рассуждая далее получим, что Коля также получил фигурки от школьников $A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_{19}, A_{22}, A_{25}, A_2, A_5, \dots, A_{26}, A_3, A_6, \dots, A_{24}$. Но он не мог получить 26 фигурок, поскольку тогда подарил их не более чем $48 - 26 - 1 = 21$ школьнику. Противоречие.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Заключительный этап. 2025/2026 учебный год

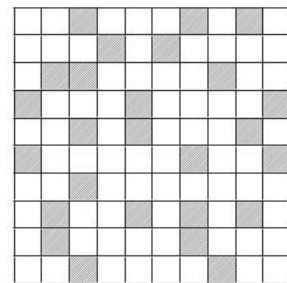
Задания для 6-7 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

1 вариант

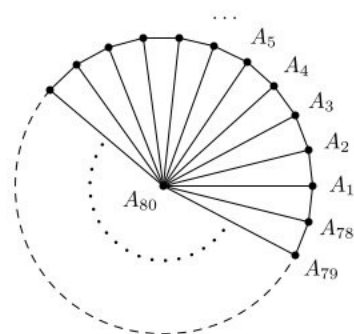
1. На листе кальки нарисован клетчатый квадрат 10×10 клеток, клетки которого покрашены в черный и белый цвет как показано на рисунке.

Костя взял белую доску 80×80 с клетками того же размера, покрасил 6380 клеток в черный цвет и утверждает, что полученная доска обладает следующим свойством: если на эту доску в любом месте положить сверху лист кальки (по клеточкам и так, чтобы он не выходил за пределы доски), то ни одна черная клеточка на листе кальки не будет накрывать белую клетку доски.



Возможно ли такое?

2. В плоскости нарисован выпуклый 79-угольник $A_1A_2 \dots A_{79}$, внутри него отмечена точка A_{80} и она соединена отрезками со всеми вершинами 79-угольника. В точках $A_1, A_2, \dots, A_{80}$ находятся лампочки, а любые две лампочки, соединенные отрезком, будем называть *соседними*. Все лампочки выключены. На каждом ходу можно включить одну лампочку и, кроме того, те лампочки, у которых к началу хода среди соседних лампочек уже было две или три горящих, включаются сами. (Если пытаться включить лампочку, которая на этом ходу должна сама загореться, — она в результате включится как ни в чем не бывало. А если включать уже горящую лампочку, она будет продолжать гореть.)



За какое наименьшее число ходов удастся зажечь все лампочки?

3. Натуральное число n представили в виде произведения двух натуральных чисел тремя способами:

$$n = A \cdot B = A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2,$$

где $A_2 > A_1 > A$ и $B > B_1 > B_2$. Докажите, что $(A_2 - A)(B - B_1) > (A_1 - A)(B - B_2)$.

4. По кругу стоят 90 человек, у каждого есть красная, синяя и черная кепка. Если каждый наденет какую-то из своих кепок, мы получаем *расклад кепок*. Расклад кепок *нескучный*, если у любых двух соседей кепки разного цвета. Расклад кепок *подвижный*, если он нескучный и при этом кто-то из присутствующих может сделать *флип*: поменять надетую кепку на другую свою кепку так, чтобы расклад остался нескучным. По команде «Вжух!» все одновременно надевают на себя кепку того же цвета, что у соседа справа, в результате расклад кепок *поворачивается*. Верно ли, что с помощью флипов и вжухов любой подвижный расклад можно переделать в любой другой подвижный расклад?

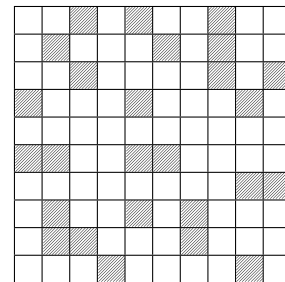
5. Верно ли, что для каждого натурального числа k можно найти такие натуральные числа a, b, c , что

$$\frac{4}{4k+3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}?$$

2 вариант

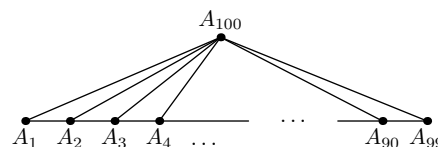
1. На листе кальки нарисован клетчатый квадрат 10×10 клеток, клетки которого покрашены в черный и белый цвет как показано на рисунке.

Костя взял белую доску 70×70 с клетками того же размера, покрасил 4882 клетки в черный цвет и утверждает, что полученная доска обладает следующим свойством: если на эту доску в любом месте положить сверху лист кальки (по клеточкам и так, чтобы он не выходил за пределы доски), то ни одна черная клеточка на листе кальки не будет накрывать белую клетку доски.



Возможно ли такое?

2. На прямой последовательно отмечены точки $A_1, A_2, \dots, A_{99}$, в стороне от прямой отмечена точка A_{100} и она соединена отрезками со всеми остальными точками. В точках $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ находятся льдинки, любые две льдинки, соединенные отрезком, будем называть *соседними*. На каждом ходу можно нагреть любую точку A_i и тогда льдинка в этой точке растает, кроме этого, те льдинки, у которых к началу хода среди соседних льдинок есть две или три растаявшие, на этом ходу тают сами. (Никаких новых льдинок не образуется. Если нагревать точку, в которой льдинка сама должна была растаять, то она тоже растает. Если нагревать точку без льдинки, ничего не произойдет.)



За какое наименьшее число ходов удастся избавиться от всех льдинок?

3. Натуральное число n представили в виде произведения двух натуральных чисел тремя способами:

$$n = A \cdot B = A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2,$$

где $A_2 > A_1 > A$ и $B > B_1 > B_2$. Докажите, что $(A_2 - A_1)(B - B_2) > (A_2 - A)(B_1 - B_2)$.

4. У художника есть желтая, красная и зеленая краски. Он красит ими стороны правильного 120-угольника так, чтобы любые две соседние стороны были разного цвета, — получается *раскраска*. Раскраска называется *изменяемой*, если можно осуществить ее *перекраску*: какую-то из сторон покрасить в другой цвет (из имеющихся трех) так, чтобы по-прежнему все соседние стороны были разного цвета. Многоугольник можно поворачивать и переворачивать. Верно ли, что, пользуясь перекрасками, поворотами и переворотами художник сможет переделать любую изменяемую раскраску в любую другую изменяемую раскраску?

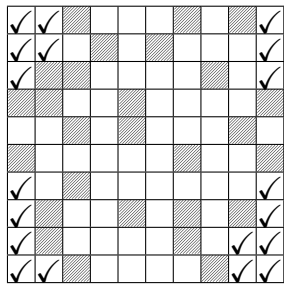
5. Верно ли, что для каждого натурального числа k можно найти такие натуральные числа a, b, c , что

$$\frac{5}{5k+4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} ?$$

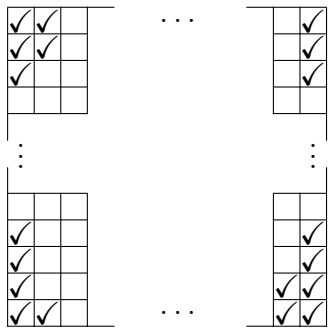
1 вариант. Решения

1. Ответ: это невозможно.

Посмотрим на 19 клеток квадрата 10×10 , помеченных значком $\checkmark$ (см. рисунок). Отметим аналогичные множества клеток в углах доски 80×80 . Заметим, что клетки, которые мы отметили на доске, ни при каком положении квадрата не будут закрыты черными клетками. А вот для каждой из остальных клеток доски можно подобрать положение квадрата, при котором он закрывает эту клетку черной клеткой. Поэтому для выполнения свойства из условия задачи количество черных клеток на доске должно быть не меньше $80^2 - 19 = 6381$.



Квадрат 10×10



Доска 80×80

2. Ответ: за 10 ходов.

Пример. На первом ходу включаем лампочку A_{80} , на втором — A_9 и далее зажигаем лампочки, номера которых указаны во второй строке таблицы. В нашем примере на последнем ходу мы не зажигаем новую лампочку, но на этом ходу загорятся сами многие еще незажженные лампочки.

Номер хода	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Зажигаемая лампочка	76	9	25	39	51	61	69	75	79	—
Далее зажигаются сами		1–17	18–32	33–45	46–56	57–65	66–72	73–77	78	

Идея в том, что после второго хода нужно включать лампочки, находящиеся достаточно далеко друг от друга. В результате около каждой из них будет образовываться дуга из подряд расположенных зажженных лампочек. Например, на третьем ходу загорятся лампочки A_8 и A_{10} (поскольку их соседи A_9 и A_{80} уже горят). Далее на четвертом ходу загорятся лампочки A_7 и A_{11} , потом A_6 и A_{12} и т. д. На десятом ходу будут гореть лампочки $A_1, A_2, \dots, A_{17}$.

Похожая группа горящих лампочек появится вокруг лампочки A_{25} — на четвертом–десятом ходах вокруг нее загорится по 7 лампочек слева и справа, в результате будут гореть лампочки A_{18} – A_{32} .

Эти диапазоны подряд идущих зажженных лампочек указаны в третьей строке таблицы. В результате после десятого хода все лампочки будут гореть.

Оценка. Допустим, что нам удалось зажечь все лампочки за 9 ходов. (Если мы справились за меньшее число ходов, то сделаем вид, что мы не заметили, что все лампочки уже горят, и на последних ходах будем включать уже и так зажженные лампочки.) Разберем два случая.

1 случай. Первым ходом зажжена лампочка A_{80} , а вторым — какая-то лампочка $A_i, i \neq 80$, либо наоборот: первым ходом зажжена лампочка A_i , а вторым — лампочка A_{80} . Тогда на следующих ходах мы будем зажигать лампочки на контуре многоугольника и, как только мы зажигаем лампочку, на следующем ходу соседние с ней лампочки (слева и справа) загорятся сами (если еще не горят). От лампочки A_i за 7 последующих ходов загорятся по 7 лампочек, слева и справа от нее — итого получаем 15 горящих лампочек. Аналогично от лампочки, зажженной на третьем ходу, получаем группу из 13 горящих лампочек, от лампочки, зажженной на четвертом ходу, получаем группу из 11 горящих лампочек и т. д., так у нас получаются еще группы по 9, 7, 5, 3, 1 лампочек. Если какие-то из указанных групп пересекаются, то это просто значит, что некоторые лампочки мы учли несколько раз и реальное число горящих лампочек меньше, чем суммарный размер групп. Но даже если группы не

пересекаются, то после 9-го хода суммарно в этих группах содержится всего лишь $15+13+11+\dots+1 = 64$ лампочки (и еще следует добавить сюда горящую лампочку A_{80}). Следовательно, после 9-го хода останутся незажженные лампочки.

2 случай. Первым и вторым ходом зажжены лампочки A_i и A_j , $i, j \neq 80$. Тогда на третьем ходу лампочка A_{80} загорится сама, и после третьего хода будут гореть лампочки A_{80} , A_i , A_j и еще какая-то лампочка A_k , которую мы зажгли на третьем ходу. Кроме лампочки A_{80} , никакие другие лампочки еще не загорались сами. Рассуждая как в случае 1, мы обнаружим, что за следующие 6 ходов у нас образуются группы из горящих $13 + 13 + 13 + 11 + 9 + \dots + 1 = 75$ лампочек (и еще лампочка A_{80}), т. е. опять гореть будут не все лампочки.

З а м е ч а н и е. Как видим, во втором случае лампочки зажигаются более эффективно. Обозначим число лампочек через n , у нас в задаче $n = 80$. В общей задаче для n лампочек потребуется $\sqrt{n+5}$ ходов (округление вверх). Пример получается из конструкции второго случая.

3. Из равенства $AB = A_1B_1$ получаем, что $A(B - B_1) = (A_1 - A)B_1$. Аналогично из равенства $AB = A_2B_2$ получаем, что $(A_2 - A)B_2 = A(B - B_2)$. Перемножим:

$$AB_2 \cdot (A_2 - A)(B - B_1) = AB_1 \cdot (A_1 - A)(B - B_2).$$

Здесь все множители положительны и, поскольку $B_2 < B_1$, равенство возможно, лишь если выполняется неравенство $(A_2 - A)(B - B_1) > (A_1 - A)(B - B_2)$.

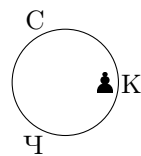
4. Ответ: неверно.

Пусть для определенности у первого человека надета красная кепка. Приготовим инструмент: начертим окружность, поставим возле нее буквы К, С, Ч (первые буквы названий цветов) и около буквы К поставим фишку. Пройдем вдоль стоящих людей. Подходя к очередному человеку, будем сдвигать фишку на треть оборота, чтобы она оказалась возле буквы, соответствующей цвету его кепки. Например, если расклад имеет вид КСКСЧКС..., то, стартовав от буквы К, фишка повернется на треть оборота к букве С, потом вернется обратно к К, а потом повернется на $4/3$ оборота, двигаясь по маршруту $К \rightarrow С \rightarrow Ч \rightarrow К \rightarrow С$. Когда мы обойдем весь круг людей, фишка вернется в исходную точку и мы можем подсчитать, на сколько оборотов в результате повернулась фишка. Очевидно, это число не изменится при операции Вжух, т. е. если мы повернем имеющийся расклад кепок. Кроме того, оно не изменяется и при операции Флип: например, если в тройке подряд стоящих людей с кепками КСК средний человек сменит кепку, получится тройка кепок СЧС, и разница в движениях фишки будет лишь в том, что в первом случае фишка сдвигается на треть оборота по часовой стрелке в сторону буквы К, после чего возвращается тем же путем к С, а во втором случае — сдвигается на треть оборота против часовой стрелки в сторону буквы Ч, после чего тоже возвращается к С.

Таким образом, из расклада кепок КСКСКСКСК... (0 оборотов) невозможно получить расклад КСЧКСЧКСКС... (2 оборота).

5. Ответ: да, верно, например

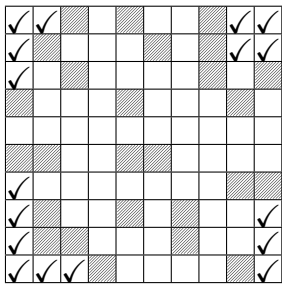
$$\frac{4}{4k+3} = \frac{1}{4(k+1)^2} + \frac{1}{4(k+1)^2(4k+3)} + \frac{1}{k+1}.$$



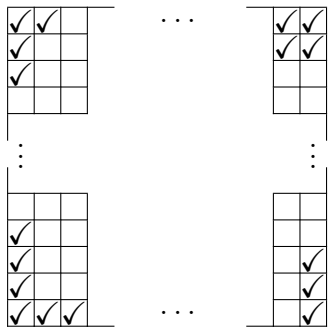
2 вариант. Решения

1. Ответ: это невозможно.

Посмотрим на 17 клеток квадрата 10×10 , помеченных значком $\checkmark$ (см. рисунок). Отметим аналогичные множества клеток в углах доски 70×70 . Заметим, что клетки, которые мы отметили на доске, ни при каком положении квадрата не будут закрыты черными клетками. А вот для каждой из остальных клеток доски можно подобрать положение квадрата, при котором он закрывает эту клетку черной клеткой. Поэтому для выполнения свойства из условия задачи количество черных клеток на доске должно быть не меньше $70^2 - 17 = 4883$.



Квадрат 10×10



Доска 70×70

2. Ответ: за 11 ходов.

Пример. На первом ходу растапливаем льдинку A_{100} , на втором — A_{10} и далее расплавляем льдинки, номера которых указаны во второй строке таблицы. На последнем ходе мы никаких новых льдинок не растапливаем, но на этом ходе многие уцелевшие льдинки продолжают таять сами.

Номер хода	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Зажигаемая лампочка	91	10	28	44	58	70	80	88	94	98	—
Далее загораются сами		1–19	20–36	37–51	52–64	65–75	76–84	85–91	92–96	97–99	

Идея в том, что после второго хода нужно растапливать льдинки, находящиеся достаточно далеко друг от друга. В результате вокруг каждой из них будет образовываться группа подряд расположенных растаявших льдинок. Например, на третьем ходу растают льдинки A_9 и A_{11} (поскольку их соседи A_{10} и A_{100} уже растаяли). Далее на четвертом ходу растают льдинки A_8 и A_{12} , потом A_7 и A_{13} и т. д. На 11-м ходу все льдинки $A_1, A_2, \dots, A_{19}$ окажутся растаявшими.

Похожая группа растаявших льдинок появится вокруг льдинки A_{28} — на четвертом–одиннадцатом ходах вокруг нее растает по 8 льдинок слева и справа, в результате образуется цепочка растаявших льдинок $A_{20}—A_{36}$.

Эти диапазоны подряд идущих растаявших льдинок указаны в третьей строке таблицы. В результате после 11-го хода все льдинки растают.

Оценка. Допустим, что нам удалось расплавить все льдинки за 10 ходов. (Если мы справились за меньшее число ходов, то сделаем вид, что мы не заметили, что всё уже растаяло, и на последних ходах будем пытаться расплавлять льдинки, которые и так уже растаяли.) Разберем два случая.

1 случай. Первым ходом растоплена льдинка A_{100} , а вторым — какая-то льдинка $A_i, i \neq 100$, либо наоборот: первым ходом растоплена льдинка A_i , а вторым — льдинка A_{100} . Тогда на следующих ходах мы будем расплавлять льдинки, находящиеся на прямой. Как только мы растопим какую-либо льдинку, на следующем ходу две соседние с ней льдинки (или одна, если эта льдинка на краю) растают сами (если еще не растаяли). Слева и справа от льдинки A_i за 8 последующих ходов растает по 8 льдинок (растаивших льдинок может быть меньше 8, если льдинка A_i находится близко краю) — итого получаем не более 17 растаявших льдинок. Аналогично от льдинки, растаявшей на третьем ходу, получаем группу из 15 растаявших льдинок, от льдинки, растаявшей на четвертом ходу, получаем группу из 13 растаявших льдинок и т. д., так у нас получаются еще группы по 11, 9, 7, 5,

3, 1 льдинок. Если какие-то из указанных групп пересекаются, то это просто значит, что некоторые льдинки мы учли несколько раз и реальное число растаявших льдинок меньше, чем суммарный размер групп. Но даже если группы не пересекаются, то после 10-го хода суммарно в этих группах содержится не больше $17 + 15 + 13 + \dots + 1 = 81$ льдинок (и еще следует добавить сюда льдинку A_{100}). Следовательно, после 9-го хода останутся нерастаявшие льдинки.

2 случай. Первым и вторым ходом растоплены льдинки A_i и A_j , $i, j \neq 100$. Тогда на третьем ходу льдинка A_{100} растает сама, и после третьего хода будут растоплены льдинки A_{100} , A_i , A_j и еще какая-то льдинка A_k , которую мы растопили на третьем ходу. Кроме льдинки A_{100} , никакие другие льдинки сами пока ещё не таяли. Рассуждая как в случае 1, мы обнаружим, что за следующие 7 ходов у нас образуются группы из не более чем $15 + 15 + 15 + 11 + 9 + \dots + 1 = 94$ растаявших льдинок (и еще A_{100}), т. е. опять многие льдинки ещё не растаяли.

Замечание. Как видим, во втором случае льдинки тают более эффективно. Обозначим число льдинок через n , у нас в задаче $n = 100$. В общей задаче для n льдинок потребуется $\sqrt{n+5}$ ходов (округление вверх). Пример получается из конструкции второго случая.

3. Из равенства $AB = A_2B_2$ получаем, что $A(B - B_2) = (A_2 - A)B_2$. Аналогично из равенства $A_2B_2 = A_1B_1$ получаем, что $(A_2 - A_1)B_2 = A_1(B_1 - B_2)$. Перемножим:

$$AB_2 \cdot (A_2 - A_1)(B - B_2) = A_1B_2 \cdot (A_2 - A)(B_1 - B_2).$$

Здесь все множители положительны и, поскольку $A < A_1$, равенство возможно, лишь если выполняется неравенство $(A_2 - A_1)(B - B_2) > (A_2 - A)(B_1 - B_2)$.

4. Ответ: неверно.

Пометим одну сторону многоугольника, для определенности — красную. Приготовим инструмент: начертим окружность, поставим возле нее буквы Ж, К, З (первые буквы названий цветов) и около буквы К поставим фишку. Пойдем вдоль сторон 120-угольника, начиная с отмеченной стороны. Подходя к очередной стороне, будем сдвигать фишку на треть оборота, чтобы она оказалась возле буквы, соответствующей цвету этой стороны. Например, если цвета сторон идут в порядке вид КЖКЖЗКЖ..., то, стартовав от буквы К, фишка повернется на треть оборота против часовой стрелки к букве Ж, потом вернется обратно к К, а потом повернется на $4/3$ оборота, двигаясь по маршруту $К \rightarrow Ж \rightarrow З \rightarrow К \rightarrow Ж$. Когда мы обойдем весь периметр 120-угольника, фишка вернется в исходную точку и мы можем подсчитать, на сколько оборотов в результате повернулась фишка. Очевидно, что это число оборотов не изменяется и при перекрасках: например, если три подряд идущие стороны были окрашены ЗЖЗ и художник перекрасил среднюю сторону, получится раскраска ЗКЗ, и разница в движениях фишки будет лишь в том, что в первом случае фишка сдвигается на треть оборота по часовой стрелке от буквы З в сторону буквы Ж, после чего возвращается тем же путем к З, а во втором случае — сдвигается на треть оборота против часовой стрелки в сторону буквы К, после чего тоже возвращается к З.

Если мы будем поворачивать исходный многоугольник, число оборотов тоже не изменится, а вот если мы его перевернем, оно изменится на противоположное.

Таким образом, из расклада кепок КЖКЖКЖКЖ... (0 оборотов) невозможно получить расклад КЖЗКЖЗКЖКЖ... (2 оборота).

5. Ответ: да, верно, например

$$\frac{5}{5k+4} = \frac{1}{5(k+1)^2} + \frac{1}{5(k+1)^2(5k+4)} + \frac{1}{k+1}.$$

