

11 класс, ВАРИАНТ 1

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

Ответ: 0, -2 , $-\frac{1}{2}$.

Решение. Преобразуя в левой части второго равенства сумму синусов в произведение, получаем $\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$. Подставляем в это соотношение значение синуса из первого равенства:

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что исходные равенства эквивалентны совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Далее имеем

$$4 \sin \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \Leftrightarrow 2 \cos \alpha (\cos \alpha + 2 \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0, \\ \cos \alpha = 2 \sin \alpha. \end{cases}$$

В первом случае $\operatorname{tg} \alpha$ не существует, а во втором случае $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$.

Аналогично рассматриваем вторую систему:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0, \\ 2 \cos \alpha = -\sin \alpha. \end{cases}$$

Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = 0$ или $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

Итак, возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$ – это 0, -2 и $-\frac{1}{2}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(6; 2), \left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Решение. Первое уравнение при условии $x - 2y \geq 0$ равносильно уравнению $(x - 2y)^2 = xy - x - 2y + 2$, откуда $x^2 + (1 - 5y)x + (4y^2 + 2y - 2) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x , имеем $D = (1 - 5y)^2 - 4(4y^2 + 2y - 2) = (3y - 3)^2$; $x = 4y - 2$ или $x = y + 1$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $x = 4y - 2$, то $25y^2 - 50y = 0$, и получаем две пары $y = 0, x = -2$ и $y = 2, x = 6$.

Если $x = y + 1$, то $10y^2 - 20y - 15 = 0$, откуда также имеем две пары $y = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}, x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}$ и $y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}, x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geq 2y$ удовлетворяют только две из них: $(6; 2), \left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

Решение. Заметим, что $x^2 + 18x > 0$. Следовательно, $|x^2 + 18x| = x^2 + 18x$. Область допустимых значений – это $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$, а неравенство эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2 + 18x) &\geq (x^2 + 18x)^{\log_{12} 13} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)} &\geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство $\left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1$. Функция $h(y) = \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y$ – убывающая (как сумма убывающих функций). Несложно заметить, что $h(2) = 1$, поэтому если $y > 2$, то $h(y) < 1$, а если $y < 2$, то $h(y) > 1$. Таким образом, это неравенство даёт $y \leq 2$, а исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_{12}(x^2 + 18x) \leq 2$. Отсюда получаем $0 < x^2 + 18x \leq 144$, $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8, BD = 17$.

Ответ: $R = \frac{85}{6}, r = \frac{136}{15}, \angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2} \arccos \frac{15}{17}, S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{12}$.

Решение. Обозначим $\angle ABC = \psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB , отличная от A .

Отметим, что $\angle BDQ = 90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA = 90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{17}{2R-r} = \frac{25}{2R}$, а значит, $R = \frac{25r}{16}$. По теореме о

касательной и секущей $BD^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R = \left(\frac{25r}{8} - 2r\right) \cdot \frac{25r}{8} = \frac{225r^2}{64}$. Следовательно, $BD = \frac{15r}{8}$, $r = \frac{8 \cdot BD}{15} = \frac{136}{15}$, $R = \frac{25r}{16} = \frac{85}{6}$.

Далее находим углы и дуги: $\widehat{AC} = 2\angle ABC = 2\psi$; $\angle BQD = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi$; $\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi$; $\angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2}$; $\widehat{BE} = 2\angle BAC = 90^\circ - \psi$; $\widehat{CE} = 180^\circ - \widehat{AC} - \widehat{BE} = 90^\circ - \psi$. Следовательно, $\angle AFE = \frac{1}{2}\widehat{AE} = 45^\circ + \frac{\psi}{2}$. Угол ψ известен, так как $\cos \psi = \frac{BC}{BA} = \frac{25}{85/3} \cdot \frac{15}{17}$. Значит, $\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2} \arccos \frac{15}{17}$.

Перейдём к нахождению площади. Треугольник AEF прямоугольный ($\angle EAF = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр), поэтому $FA = FE \cos \angle EFA$, $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot FA \cdot FE$. $\sin \angle AFE = \frac{1}{4} FE^2 \sin(2\angle AFE) = \frac{1}{4} \cdot 4R^2 \sin(90^\circ + \psi) = R^2 \cos \psi = \left(\frac{85}{6}\right)^2 \cdot \frac{15}{17} = \frac{2125}{12}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 198.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 0 + 1 = 1$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [1; 24]$ и записываем их в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(n)$	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 24 варианта.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 0$. В таблице есть 11 аргументов, при которых $f = 0$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 11 способами, а второй – 10 способами. Значит, количество пар такого типа равно $11 \cdot 10 = 110$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 1$. Аналогично предыдущему пункту получаем $7 \cdot 6 = 42$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 2$. Здесь $2 \cdot 1 = 2$ пары.

- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 4$. Здесь также $2 \cdot 1 = 2$ пары.

Итого, есть $24 + 110 + 42 + 2 + 2 = 180$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$.
Всего имеется $24^2 = 576$ пар, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{576-180}{2} = 198$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$.

Ответ: $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = -8x^2 - 30x - 17$. График – парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$, $h\left(-\frac{3}{4}\right) =$

1. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $N\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или выше неё. Отсюда самое “высокое” расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN . Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -2x - \frac{1}{2}$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – гипербола $g(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$. Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$. Действительно, уравнение $\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2}$ имеет единственное решение $x = -\frac{4}{5}$, и при этом $g'(x) = -\frac{8}{(4x+3)^2}$, $g'\left(-\frac{4}{5}\right) = -2$, т.е. угловой коэффициент прямой ℓ совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится выше гиперболы. Любая прямая, расположенная “ниже” прямой ℓ пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Ответ: $BC = \sqrt{7}$, $R_{\min} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Решение. Пусть K , L , M , N , P – середины рёбер AB , BD , CD , AC , BC соответственно. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $KLMN$ и $AKPN$ – параллелограммы. Они вписаны в окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями KLM и ABC , поэтому эти параллелограммы – прямоугольники. Угол BAC – прямой; прямые AD и BC перпендикулярны, так как $AD \parallel KL$, $KL \perp LM$, $BC \parallel LM$.

Отметим в плоскости ABC точку D' такую, что $\triangle BCD = \triangle BCD'$, а точки A и D' лежат по разные стороны от прямой BC (треугольник BCD' может быть получен из треугольника BCD поворотом вокруг прямой BC). Из равенства треугольников BCD и BCD' следует, что основания их высот, опущенных на BC – это одна и та же точка (назовём её H). Плоскость $DD'H$ перпендикулярна BC (так как $DH \perp BC$, $D'H \perp BC$), поэтому $DD' \perp BC$. Поскольку $DD' \perp BC$ и $AD \perp BC$, то плоскость ADD' перпендикулярна BC и $AD' \perp BC$.

Значит, $ABCD'$ – четырёхугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (пусть X – точка их пересечения). По теореме Пифагора $AB^2 = AX^2 + BX^2$, $CD'^2 = CX^2 + D'X^2$,

$BD'^2 = BX^2 + D'X^2$, $AC^2 = AX^2 + CX^2$, следовательно, $AB^2 + CD'^2 = BD'^2 + AC^2$, откуда $AC = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2^2} = \sqrt{6}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{7}$.

Радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$, не меньше радиуса R окружности, описанной около грани BCD . Пирамида, для которой достигается равенство, существует. Докажем это. Рассмотрим сферу радиуса R и окружность – её сечение, проходящее через центр сферы. Впишем в эту окружность треугольник BCD и через прямую BC проведём плоскость, перпендикулярную плоскости этого треугольника. В сечении сферы указанной плоскостью получится окружность с диаметром BC , в которую можно вписать прямоугольный треугольник ABC . По теореме косинусов из треугольника BCD находим, что $\cos \angle BDC = \frac{CD^2 + BD^2 - BC^2}{2 \cdot CD \cdot BD} = \frac{9 + 4 - 7}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\angle BDC = 60^\circ$. По теореме синусов $R = \frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Найдены все возможные значения $\sin 2\beta$ – 1 балл;

применена неверная тригонометрическая формула – 0 баллов за задачу;

найден значение $\operatorname{tg} \beta$ для каждого из значений $\sin 2\beta$ – по 1 баллу.

2. **(4 балла)** Получено только одно линейное соотношение между x и y – 1 балл;

получены два линейных соотношения между x и y – 2 балла;

найжены решения системы для каждого линейного соотношения – по 1 баллу за соотношение;

приобретены лишние решения (не сделан отбор корней) или потеряны решения (за счёт того, что выражения вида $\sqrt{ab}$ заменено выражением $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, и при этом не учтён случай, когда оба числа a, b неположительны – не более 2 баллов за задачу.

3. **(5 баллов)** (а) Неравенство приведено к виду $a^y + b^y > c$ – 1 балл;

решено неравенство относительно y – 2 балла; если в этом неравенстве верный ответ без обоснования (нет ссылки на монотонность или графика, демонстрирующего монотонность), то 1 балл вместо двух;

решено полученное неравенство относительно x – 2 балла; если ОДЗ не учтено (учтено неверно), то – эти 2 балла не добавляются.

Нахождение ОДЗ отдельно не оценивается.

4. **(5 баллов)** Доказано, что AD – биссектриса угла BAC или доказано что центр большей окружности лежит на прямой EF – 1 балл (эти баллы не суммируются друг с другом);

за ответ на каждый из четырёх вопросов задачи – по 1 баллу.

5. **(5 баллов)** Показано, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ – 1 балл;

найжены значения функции f для всех натуральных значений аргумента из указанного диапазона – 1 балл;

если задача решается полным перебором (т.е. непосредственно проверяются все пары $(x; y)$ из указанного диапазона) и при подсчёте допущена ошибка – баллы не добавляются;

комбинаторная ошибка или неполный перебор (рассмотрены не все возможности) – не более 3 баллов за задачу.

6. (5 баллов)

(а) Если решается, как в авторских решениях

нарисована только парабола или только гипербола – 0 баллов за задачу;

построены оба графика (парабола и гипербола) – 1 балл;

найдено (подобрано) уравнение прямой (т.е. указаны a и b) – 2 балла; если указана верная пара $(a; b)$, но при этом ни в тексте, ни на чертеже не присутствует касание, то эти баллы не добавляются;

обосновано, что неравенства выполняются на всём отрезке – 2 балла (для исследования взаимного расположения гиперболы и прямой достаточно построить график и показать, что соответствующее уравнение имеет кратный корень).

(b) Если левая и правая части двойного неравенства рассматриваются отдельно, и при этом решение не доведено до конца не более 1 балла за задачу; этот балл ставится если выписаны условия того, что одно из неравенств выполняется для всех значений переменной из указанного промежутка.

(с) При решении подстановкой точек и преобразованием полученных неравенств доказано, что условию задачи удовлетворяет не более чем одна пара $(a; b)$ – 3 балла; если при этом пара $(a; b)$ не найдена, то 0 баллов вместо 3;

доказано, что при этих значениях $(a; b)$ неравенство выполнено на всём промежутке – 2 балла.

7. (6 баллов) Вариант 1. Доказано, что треугольник ABC прямоугольный – 1 балл;

доказано, что середины рёбер AB , AC , BD , CD являются вершинами прямоугольника (или эквивалентное утверждение – например, что рёбра AD и BC перпендикулярны) – 1 балл;

найдена длина искомого ребра – 2 балла;

найден наименьший радиус – 2 балла; если при этом не доказано, что радиус является наименьшим или что конструкция существует – 1 балл вместо 2.

Вариант 2. Доказано, что треугольник LMN прямоугольный – 1 балл;

доказано, что середины рёбер LN , KM , MN , KL являются вершинами прямоугольника (или эквивалентное утверждение – например, что рёбра KN и LM перпендикулярны) – 1 балл;

найдена длина искомого ребра – 2 балла;

найден наименьший радиус – 2 балла; если при этом не доказано, что радиус является наименьшим или что конструкция существует – 1 балл вместо 2.

Вариант 3. Доказано, что треугольник PRS прямоугольный – 1 балл;

доказано, что середины рёбер PR , QS , PS , QR являются вершинами прямоугольника (или эквивалентное утверждение – например, что рёбра PQ и RS перпендикулярны) – 1 балл;

найдена длина искомого ребра – 2 балла;

найден наименьший радиус – 2 балла; если при этом не доказано, что радиус является наименьшим или что конструкция существует – 1 балл вместо 2.

Вариант 4. Доказано, что треугольник XYZ прямоугольный – 1 балл;

доказано, что середины рёбер XY , TZ , YZ , TX являются вершинами прямоугольника (или эквивалентное утверждение – например, что рёбра TU и XZ перпендикулярны) – 1 балл;

найдена длина искомого ребра – 2 балла;

найден наименьший радиус – 2 балла; если при этом не доказано, что радиус является наименьшим или что конструкция существует – 1 балл вместо 2.