

Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба»
2026 год
2 этап

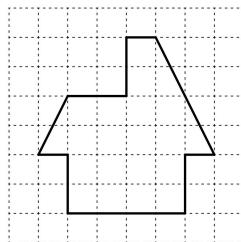
Решения задач
Математика, 7 класс

СОДЕРЖАНИЕ

Условия задач	3
Решения задач и задача 1	4
Задача 2	5
Задача 3	6
Задача 4	7
Задача 5	8
Задача 6	9

Условия задач

7.1. (9) Разрежьте данную фигуру на три равные по форме и размеру части. Фигуры, отличающиеся поворотом или отражением, считаются равными.



7.2. (16) Двадцать три одинаковых блинчика разделили поровну между семью гостями. Назовем кусочком часть блинчика, которая меньше, чем целый блинчик. Какое наименьшее число кусочков могло получиться?

7.3. (16) Четверо детей (не младше 3 и не старше 12 лет, возраст считается целым числом лет) сделали по два утверждения: одно истинное и одно ложное.

Первый: «Сумма наших возрастов нечетная. Мой возраст четный.»

Второй: «Только у одного из нас нечетный возраст. Произведение наших возрастов равно 810.»

Третий: «Произведение наших возрастов нечетное. Мой возраст нечетный.»

Четвертый: «Мы высказали наши утверждения в порядке возрастания возраста. Мы высказали наши утверждения в порядке убывания возраста.»

Сколько лет каждому из детей, если среди них нет ровесников? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

7.4. (17) У бизнесмена есть 4 чемодана, которые весят 12 кг, 13 кг, 24 кг и 29 кг. Он находится на первом этаже небоскреба и хочет подняться вместе со всеми чемоданами на верхний этаж. Лифт сломался и едет вверх или вниз, только если суммарный вес пассажиров и их вещей в килограммах делится нацело на 5 или на 7. Сможет ли бизнесмен подняться наверх вместе со всеми чемоданами, если он весит 73 кг? Он может совершить несколько поездок на лифте и оставлять чемоданы на первом и на верхнем этажах, но не может пользоваться помощью других людей, а также использовать посторонние предметы.

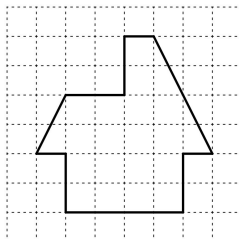
7.5. (20) В магазине продаются 9 разных чашек трех цветов (красные, оранжевые, фиолетовые) с тремя узорами (в горошек, в полосочку и в клеточку). Все чашки стоят целое число монет от 1 до 9, причем все цены попарно различны.

Известно, что все не красные чашки не в горошек суммарно стоят 25 монет, все не оранжевые чашки не в полосочку стоят 22 монеты, а все не фиолетовые чашки не в клеточку стоят 21 монету. Также известно, что красная чашка в горошек стоит дешевле, чем фиолетовая в полосочку. Сколько может стоить оранжевая чашка в клеточку? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

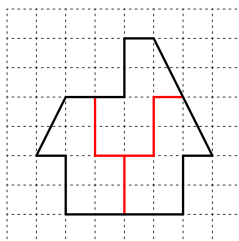
7.6. (22) Некоторые клетки квадрата $n \times n$ покрасили в красный цвет, при этом в каждой строке и в каждом столбце покрашено ровно 100 клеток. Известно, что никакие две красные клетки не касаются друг друга сторонами или углами. При каком наименьшем n такое могло произойти?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7.1. Разрежьте данную фигуру на три равные по форме и размеру части. Фигуры, отличающиеся поворотом или отражением, считаются равными. (Г.Ю. Караваев)



Решение. Решение представлено на картинке.



Критерии. Максимальный балл: 9.

Содержание критерия	Оценка	Балл
Верное решение	+	9
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	–	0

7.2. Двадцать три одинаковых блинчика разделили поровну между семью гостями. Назовем кусочком часть блинчика, которая меньше, чем целый блинчик. Какое наименьшее число кусочков могло получиться? (М.В. Алексеев)

Ответ. 8 кусочков.

Решение. Оценка. Всего каждый гость должен получить $\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7}$ блинчиков. Если какой-нибудь гость не получил ни одного кусочка, то у него целое число блинчиков, что противоречит вычисленному, поэтому, число кусочков не меньше 7. Предположим, что их ровно 7. Тогда каждый гость получает ровно один кусочек величиной $\frac{2}{7}$ блинчика. Так как величины кусочков равны, то их можно было изготовить только из двух целых блинчиков. Но если 7 кусочков составляют в сумме два блинчика, то хотя бы один из блинчиков составлен из не более чем трех кусочков, и тогда величина какого-то из этих не более чем трех кусочков не меньше $\frac{1}{3} > \frac{2}{7}$, что противоречит требуемому (аналогично можно заключить, что хотя бы один из блинчиков составлен из не менее чем четырех кусочков, а тогда величина одного из них будет не больше $\frac{1}{4} < \frac{2}{7}$). Значит, 7 кусочков быть не могло и их должно быть хотя бы 8.

Пример. Приведем пример, который показывает, что 8 кусочков получиться могло. Сначала каждому гостю выдадим по 3 целых блинчика. Останутся два блинчика, каждый из которых разделим на четыре кусочка следующим образом: три кусочка величинами $\frac{2}{7}$ и один величиной $\frac{1}{7}$. Шесть гостей получают по одному кусочку величиной $\frac{2}{7}$, а седьмой — два кусочка величиной $\frac{1}{7}$.

Критерии. Максимальный балл: 16.

Содержание критерия	Балл
Доказана оценка и приведен пример	16
Только оценка	10
Только пример	6
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

7.3. Четверо детей (не младше 3 и не старше 12 лет, возраст считается целым числом лет) сделали по два утверждения: одно истинное и одно ложное.

Первый: «Сумма наших возрастов нечетная. Мой возраст четный.»

Второй: «Только у одного из нас нечетный возраст. Произведение наших возрастов равно 810.»

Третий: «Произведение наших возрастов нечетное. Мой возраст нечетный.»

Четвертый: «Мы высказали наши утверждения в порядке возрастания возраста. Мы высказали наши утверждения в порядке убывания возраста.»

Сколько лет каждому из детей, если среди них нет ровесников? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет. (Г.Ю. Караваев)

Ответ. Первому 9 лет, второму 6 лет, третьему 5 лет, четвертому 3 года.

Решение. Начнем с двух утверждений третьего ребенка. Заметим, что если первое его утверждение верно, (произведение всех возрастов нечетное), то всем детям нечетное число лет, поэтому и второе его утверждение верно, что невозможно. Значит, произведение возрастов четно, а третьему ребенку нечетное число лет.

Теперь посмотрим на утверждения первого ребенка. В силу того, что ровно одно из двух сказанных им утверждений ложно, либо ему четное число лет и сумма возрастов всех детей четна, либо ему нечетное число лет и сумма возрастов всех остальных детей нечетна. В любом случае сумма возрастов второго, третьего и четвертого детей четная. Так как возраст третьего ребенка нечетный, либо у второго, либо у четвертого ребенка возраст нечетный.

Тогда первое утверждение второго ребенка неверно, откуда произведение возрастов всех детей равно 810. Разложим это число на простые множители: $810 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$. Заметим, что возраст ребенка, кратный 5, не может делиться еще и на 3, так как тогда он будет не менее 15. Значит, возраст одного из детей делится на 9. Но единственное число, кратное 9 и не превышающее 12, равно 9. Из этого следует, что одному из детей 9 лет.

Заметим, что у остальных детей возрасты не будут делиться на 9, а значит, у двоих детей возрасты будут делиться на 3. Так как среди детей нет ровесников, а также исходя из того, что эти возрасты не будут кратны 5, один из возрастов окажется равен 3, а другой — равен 6. Возраст оставшегося ребенка будет равен 5.

Исходя из утверждений четвертого ребенка, возрасты детей либо убывают, либо возрастают, поэтому третьему ребенку либо 5, либо 6 лет. Мы знаем, что возраст третьего ребенка нечетный, поэтому ему 5 лет, а возрасты убывают.

Тогда первому ребенку 9 лет, второму 6 лет, третьему 5 лет, а четвертому 3 года.

Критерии. Максимальный балл: 16.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	16
Доказано, что произведение возрастов детей равно 810 <i>Или</i> Из предположения, что произведение возрастов равно 810, сделаны выводы о возрасте детей	10
Только ответ в правильном порядке без пояснений	2
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

7.4. У бизнесмена есть 4 чемодана, которые весят 12 кг, 13 кг, 24 кг и 29 кг. Он находится на первом этаже небоскреба и хочет подняться вместе со всеми чемоданами на верхний этаж. Лифт сломался и едет вверх или вниз, только если суммарный вес пассажиров и их вещей в килограммах делится нацело на 5 или на 7. Сможет ли бизнесмен подняться наверх вместе со всеми чемоданами, если он весит 73 кг? Он может совершить несколько поездок на лифте и оставлять чемоданы на первом и на верхнем этажах, но не может пользоваться помощью других людей, а также использовать посторонние предметы. (Г.Ю. Караваев)

Ответ. Сможет.

Решение. Опишем одну из подходящих стратегий с помощью схемы. Слева будем писать, какие чемоданы находятся на первом этаже, стрелкой обозначать чемоданы в лифте, а справа подпишем чемоданы на верхнем этаже.

$$\begin{array}{rcl}
 24, 29 & \xrightarrow{12, 13} & \\
 24, 29 & \xleftarrow{12} & 13 \\
 12 & \xrightarrow{24, 29} & 13 \\
 12 & \xleftarrow{13, 24} & 29 \\
 24 & \xrightarrow{12, 13} & 29 \\
 24 & \xleftarrow{13, 29} & 12 \\
 13 & \xrightarrow{24, 29} & 12 \\
 13 & \xleftarrow{12} & 24, 29 \\
 & \xrightarrow{12, 13} & 24, 29
 \end{array}$$

Нетрудно проверить, что на каждом шаге суммарный вес бизнесмена и перевозимых им чемоданов кратен 5 или 7.

Критерии. Максимальный балл: 17.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	17
Рассмотрены все комбинации, позволяющие подняться и спуститься, иных продвижений нет	10
Только правильный ответ без пояснений	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

7.5. В магазине продаются 9 разных чашек трех цветов (красные, оранжевые, фиолетовые) с тремя узорами (в горошек, в полосочку и в клеточку). Все чашки стоят целое число монет от 1 до 9, причем все цены попарно различны.

Известно, что все не красные чашки не в горошек суммарно стоят 25 монет, все не оранжевые чашки не в полосочку стоят 22 монеты, а все не фиолетовые чашки не в клеточку стоят 21 монету. Также известно, что красная чашка в горошек стоит дешевле, чем фиолетовая в полосочку. Сколько может стоить оранжевая чашка в клеточку? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (Г.Ю. Каравачев)

Решение. Сложив суммарные стоимости не красных чашек не в горошек, не оранжевых чашек не в полосочку и не фиолетовых чашек не в клеточку, получим $25 + 22 + 21 = 68$ монет. Заметим, что стоимости красной чашки в горошек, оранжевой чашки в полосочку и фиолетовой чашки в клеточку вошли в сумму дважды, а стоимости всех остальных чашек — один раз. Вычтем из 68 монет суммарную стоимость всех чашек, равную $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ монетам и получим, что красная чашка в горошек, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку суммарно стоят $68 - 45 = 23$ монеты. Также заметим, что три самые дорогие чашки стоят суммарно $7 + 8 + 9 = 24$ монеты, а значит, красная чашка в горошек, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку стоят 6, 8 и 9 монет (в некотором порядке). Мы знаем, что красная чашка в горошек которая стоит 6, 8 или 9 монет, стоит дешевле, чем фиолетовая в полосочку, которая стоит 1, 2, 3, 4, 5 или 7 монет. Понятно, что такое возможно лишь если красная чашка стоит 6 монет, а фиолетовая в полосочку — 7. Не красные чашки не в полосочку суммарно стоят 25 монет, фиолетовая в полосочку — 7 монет, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку — 8 и 9 монет (в некотором порядке), а значит, оранжевая чашка в клеточку стоит $25 - 7 - 8 - 9 = 1$ монету.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	20
Доказано, что красная чашка в полоску стоит 6 монет, а оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку — 8 и 9 монет в каком-то порядке	16
Доказано, что красная чашка в полосочку, оранжевая в полосочку и фиолетовая в клеточку стоят 6, 8 и 9 монет в каком-то порядке	12
Только правильный ответ без пояснений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

7.6. Некоторые клетки квадрата $n \times n$ покрасили в красный цвет, при этом в каждой строке и в каждом столбце покрашено ровно 100 клеток. Известно, что никакие две красные клетки не касаются друг друга сторонами или углами. При каком наименьшем n такое могло произойти? (Г.Ю. Караваев)

Ответ. При $n = 400$.

Решение. Оценка. Отметим все узлы квадрата $n \times n$ (узлы — вершины квадратиков 1×1). Заметим, что если никакие две красные клетки не касаются друг друга сторонами и углами, все уголки красных клеточек являются различными узлами. Посмотрим на первую и вторую строки квадрата. Заметим, что на отрезке, отделяющем первую строку от второй, всего $n + 1$ узел. С другой стороны, 200 узлов на этом отрезке будут нижними углами красных квадратиков верхней строки, а 200 — верхними углами квадратиков второй строки. Значит, $n + 1 \geq 400$.

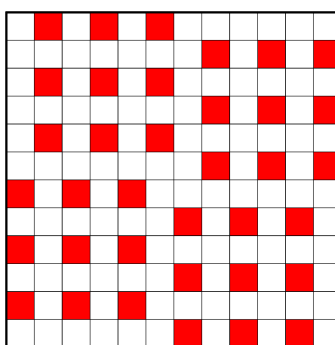
Предположим, что $n = 399$. Тогда для каждого $k < 399$ на отрезке, отделяющем строку k от строки $k + 1$, все узлы будут углами красных квадратиков. В частности, самый левый узел каждого из этих отрезков будет углом красного квадрата. Но тогда как минимум 398 узлов левой стороны квадрата будут углами красных клеток, а это возможно только если в первом столбце будет хотя бы 199 красных клеток. Значит, $n > 399$.

Пример. Покажем, как покрасить клетки квадрата 400×400 так, чтобы условие выполнялось.

Разделим квадрат 400×400 на 4 *больших* квадрата 200×200 . Каждый из больших квадратов разрежем на 10000 *малых* квадратов размера 2×2 . Теперь покрасим в красный цвет некоторые клетки больших квадратов следующим образом:

- 1) В левом верхнем большом квадрате закрасим правую верхнюю клетку каждого малого квадрата.
- 2) В правом верхнем большом квадрате закрасим правую нижнюю клетку каждого малого квадрата.
- 3) В левом нижнем большом квадрате закрасим левую верхнюю клетку каждого малого квадрата.
- 4) В правом нижнем большом квадрате закрасим левую нижнюю клетку каждого малого квадрата.

Ниже — пример для поля 12×12 и 3 красных клеток в каждой строке и каждом столбце.



Легко видеть, что для данной раскраски все условия выполняются, а значит, искомое n равно 400.

Критерии. Максимальный балл: 22.

Содержание критерия	Балл
Приведен верный пример и полностью доказана верная оценка	22
Приведен верный пример и оценка на $n \geq 398$, случай $n = 399$ не разобран или разобран ошибочно	17
Полностью доказана оценка на $n \geq 400$, пример на 400 отсутствует или ошибочен	16
Приведен верный пример на $n = 400$, в доказательстве оценке нет продвижений	10
Присутствует только доказательство оценки на $n \geq 399$, случай $n = 399$ не разобран или разобран ошибочно, пример отсутствует	8
Только пример на $n = 500$	2
Только правильный ответ без пояснений	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Критерий примера на $n = 500$ не суммируется с критерием оценки без примера.