

9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $3^{25}7^{38}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 3 и 7. Пусть $a = 3^{\alpha_1}7^{\beta_1}$, $b = 3^{\alpha_2}7^{\beta_2}$, $c = 3^{\alpha_3}7^{\beta_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Рассмотрим отдельно делимость на 3 и 7.

1) Из того, что ab делится на 3^{11} , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 9$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 21$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{11+18+21}{2} = 25$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 25$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 14$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 9$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 18$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 21$).

2) Из того, что ac делится на 7^{38} следует, что $\beta_1 + \beta_3 \geq 38$. Заметим, что $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \beta_1 + \beta_3 \geq 38$. $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ может равняться 38, если, например, $\beta_1 = 19$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 19$.

Так как минимум каждой из сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ не зависит от другого, то и минимальное значение abc равно

$$3^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}7^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = 3^{25}7^{38}.$$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$. При каком наибольшем m могло оказаться, что дробь сократима на m ?

Ответ: 10.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(a^2 - 8ab + b^2; a + b)$. Так как $a^2 - 8ab + b^2 = a(a + b) - 9ab + b^2 = a(a + b) - 9b(a + b) + 10b^2$, т.е. $10b^2 = (a^2 - 8ab + b^2) + (9b - a)(a + b)$, из этого равенства следует, что $10b^2$ делится нацело на d . Аналогично доказывается что $10a^2$ делится нацело на d . Поэтому $d \leq \text{НОД}(10b^2; 10a^2) = 10 \cdot \text{НОД}(a^2; b^2) \leq 10$, так как числа a и b взаимно просты и $\text{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 10$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 19$, $b = 1$ – при этом дробь равна $\frac{20}{210} = \frac{2}{21}$.

3. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

Решение. Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$, $v = \sqrt{2x^2 + x + 3}$. Тогда $1 - 4x = u^2 - v^2$, и уравнение принимает вид

$$u - v = u^2 - v^2 \Leftrightarrow (u - v)(1 - u - v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ u + v = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет одно решение $x = \frac{1}{4}$ (принадлежащее области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$ больше правой при всех допустимых значениях x (что означает, что у уравнения нет решений). Для этого достаточно доказать, что первое слагаемое больше единицы при всех x . Это несложно проверить: $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Итак, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{1}{4}$.

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

Ответ: $\sqrt{52}$.



Ответ: 90 километров.

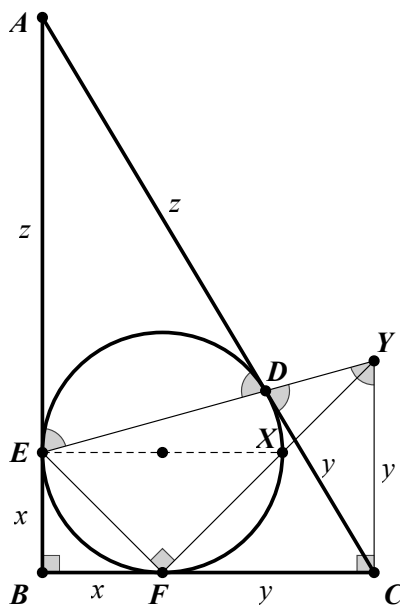
Решение. Пусть x – скорость мотоциклиста, y – скорость велосипедиста, а S – расстояние между A и B . По условию имеем

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 2, \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{x} = 96, \\ \frac{S}{y+6} - \frac{S}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S(x-y)}{xy} = 2, \\ \frac{S(x-y)}{(x+6)(y+6)} = \frac{5}{4}, \\ \frac{S(x^2-y^2)}{xy} = 96. \end{cases}$$

Разделив третье уравнение на первое, получаем равенство $x + y = 48$, а разделив первое уравнение на второе – равенство $\frac{(x+6)(y+6)}{xy} = \frac{8}{5}$. Последнее уравнение может быть преобразовано так: $5(xy + 6x + 6y + 36) = 8xy \Leftrightarrow xy - 10(x + y) - 60 = 0$. Так как $x + y = 48$, отсюда следует, что $xy = 540$. Полученная система имеет два решения $(18; 30)$ и $(30; 18)$. Поскольку $x > y$ (мотоциклист приезжает раньше, следовательно, едет быстрее), подходит только второе решение. Тогда $S = \frac{2xy}{x-y} = 90$.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.



Решение. Пусть $BE = BF = x$, $CF = CD = y$, $AD = AE = z$. Поскольку $CY \parallel AE$, то треугольники AED и CYD подобны по двум углам. Так как треугольник ADE равнобедренный, то и треугольник CDY равнобедренный, $CY = CD = y$. Тогда треугольник CYF – равнобедренный прямоугольный, как и треугольник BEF , $\angle YFC = \angle EFB = 45^\circ$. Следовательно, треугольник EFX – равнобедренный прямоугольный с катетом $FX = x\sqrt{2}$ и гипотенузой $EX = 2x$. Далее, $XY = FY - FX = y\sqrt{2} - x\sqrt{2} = (y - x)\sqrt{2}$. По условию $EX = 2XY\sqrt{2} = 4(y - x)$. Итак, $2x = 4(y - x)$, откуда $y = \frac{3}{2}x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC имеем $(x + y)^2 + (z + x)^2 = (y + z)^2$. Подставляя в это равенство $y = \frac{3}{2}x$, раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим, что либо $x = 0$, что невозможно, либо $z = 5x$. Отсюда $\frac{z}{y} = \frac{5x}{3x/2} = \frac{10}{3}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** По 1 баллу за оценку и за пример для каждого простого множителя.

Неверное утверждение о делимости в решении, например, $x|a \ \& \ y|b \Rightarrow \frac{x}{y} \Big| \frac{a}{b}$ – 0 баллов за задачу.

2. **(4 балла)** Знаменатель дроби преобразован к виду $(a + b)^2 - \gamma ab$ и других продвижений нет – 1 балл за задачу;

получена оценка $m \leq d$ на наибольшее значение числа m (где d является ответом в задаче) – 3 балла;

доказано, что это значение m может достигаться – 1 балл.

3. **(5 баллов)** При любом способе решения: получен хотя бы один лишний корень – не более 2 баллов за задачу.

- Если задача решается, как в приведённых решениях:
 - левая часть уравнения разложена на множители – 1 балл;
 - получена совокупность двух уравнений – 1 балл;
 - решено уравнение с равенством двух радикалов – 1 балл;
 - решено уравнение, в котором сумма двух радикалов равна единице – 2 балла.
 - При другом способе решения: после умножения обеих частей на сопряжённое к левой части найден корень уравнения – 1 балл;
 - обосновано, что других корней нет – 4 балла.
-

4. **(4 балла)** Найдены радиусы окружностей – 2 балла.
-

5. **(4 балла)** Получено однородное уравнение второй степени с двумя неизвестными или квадратное уравнение относительно одной из дробей $\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{z}{y}$ – 1 балл;

получены линейные соотношения между переменными (например, $y = ax, z = bx$) – 2 балла.

6. **(5 баллов)** Составлена система из трёх уравнений с тремя неизвестными (скорости и расстояние) – 2 балла;

решена полученная система – 3 балла.

7. **(6 баллов)** Доказано, что треугольник CFY равнобедренный – 1 балл;

доказано, что $EX \parallel BC$ – 2 балла;

составлено уравнение (система уравнений) относительно отрезков касательных – 1 балл;

решено полученное уравнение – 1 балл.