

ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ – 2024-25. МАТЕМАТИКА.

Критерии проверки. 11 класс

Каждая из шести задач оценивается в 20 баллов. Максимальная оценка = 100 баллов.

Участники, набравшие 100 или больше 100 баллов, получают оценку 100.

В каждой из задач за различные недостатки (ошибки в логике, пропущенные переходы, недостатки обоснований, ошибки и т. д.), могло быть снято от 5 до 20 баллов.

Кроме этого, некоторые стандартные ошибки описаны ниже.

Задача № 1 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Ответ верен, но имеются незначительные дефекты в обосновании	$\pm$	15
Решение верное и обоснованное, но в ответе приведена сумма очков не второй команды	$+/2$	10
Ответ верен, но обоснование содержит ошибки	$\mp$	5
Ответ неверен	$-$	0

Задача № 2 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Рассмотрены обе конфигурации. Решение верное и обоснованное. Получен верный ответ в одном случае, во втором случае ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\pm$	15
Рассмотрены обе конфигурации. Получен верный ответ в обоих случаях. Имеются ошибки в обосновании	$\pm$	15
Рассмотрены обе конфигурации. Решение верное и обоснованное. В обоих случаях ответ неверен из-за вычислительных ошибок	$+/2$	10
Рассмотрены только одна конфигурация. Решение верное и обоснованное. Получен верный ответ	$+/2$	10
Рассмотрены только одна конфигурация. Решение верное и обоснованное. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Идейно верное решение неравенства, переход к уравнению сделан, корень найден. Имеются дефекты в обосновании единственности	$\pm$	15
Идейно верное решение неравенства, переход к уравнению сделан, корень найден. Ошибочное обоснование единственности	$+/2$	10
Идейно верное решение неравенства, переход к уравнению сделан, корень найден. Обоснование единственности отсутствует	$\mp$	5

Переход к уравнению не сделан. Корень угадан.	–	0
---	---	---

Задача № 4 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании. При этом получен правильный ответ	$\pm$	15
Идейно верное решение, ответ неверен из-за одной вычислительной ошибки	$\pm$	15
Идейно верное решение, ответ неверен из-за нескольких вычислительных ошибок	$\mp$	5

Задача № 5 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Получен правильный ответ.	$\pm$	15
Идейно верное решение, ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\pm$	15
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\mp$	5

Задача № 6 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Получен правильный ответ.	$\pm$	15
При идейно правильном решении допущены вычислительные ошибки	$\pm$	15
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\mp$	5

Ответы и решения

1-1. Ответ: 54.

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть участвовало n команд, за победу дается a очков.

Пусть x — количество очков, набранных последней командой. Посчитаем число

разыгранных очков двумя способами. С одной стороны, это число равно $a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, так как очки распределились в арифметической прогрессии, то, обозначив ее разность через d , получим $nx + d \frac{n(n-1)}{2}$.

Значит, $nx + d \frac{n(n-1)}{2} = a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Так как $d = k \cdot a$, где k — натуральное число, то

$$nx + ka \frac{n(n-1)}{2} = a \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

откуда $nx = (1-k)a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, то есть $\frac{x}{a} = (1-k) \frac{n-1}{2}$.

Значит, для k есть две возможности: $k = 1$, $k = 0$. При $k = 0$ получается $d = 0$, что не годится по условию. Следовательно, $k = 1$ и $x = 0$.

Тогда при $a = 3$, $n = 20$ получаем $d = 3$ и первая команда наберет $0 + 3 \cdot 19 = 57$ очков, а вторая $0 + 3 \cdot 18 = 54$ очка.

Другой способ решения. Последняя команда в таблице набрала не менее 0 очков, 19-я команда — не менее 3 очков, 18-я команда — не менее 6 очков, ..., 2-я команда — не менее $0 + 3(19 - 1) = 54$ очков, 1-я команда — не менее $0 + 3(20 - 1) = 57$ очков. В то же время, 1-я команда не могла набрать более $19 \cdot 3 = 57$ очков, так как она сыграла 19 игр. Значит, 1-я команда набрала 57 очков, 2-я команда — 54 очка, 3-я команда — 51 очко, ..., 19-я команда — 3 очка, 20-я команда — 0 очков.

1-2. Ответ: 16.

1-3. Ответ: 30.

1-4. Ответ: 26.

2-1. Ответ: 63 или 45.

Решение. Во-первых, заметим, что и точки B, C , и точки E, F лежат по одну сторону от прямой AD , так как в противном случае $CE \geq 16$, а по условию $CE = 1$.

По обратной теореме Фалеса PQ параллельна AD .

Возможны две конфигурации.

1) Точки B, C, E, F расположены последовательно.

Если обозначить расстояние от точки P до прямой BF через

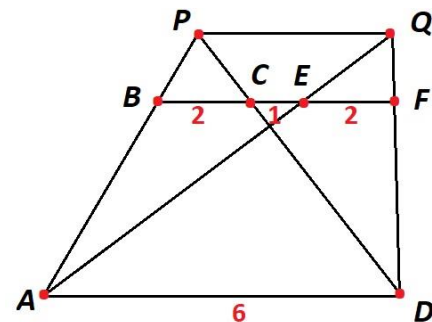
h , то из подобия треугольников PBC и PAD вытекает:

$$\frac{h}{h+8} = \frac{2}{6}, \text{ откуда } h = 4.$$

Далее из подобия треугольников ABE и APQ : $\frac{3}{PQ} = \frac{8}{8+4}$,

$$\text{откуда } PQ = \frac{9}{2}.$$

Тогда площадь трапеции $APQD$ равна $\frac{6+\frac{9}{2}}{2} \cdot 12 = 63$.

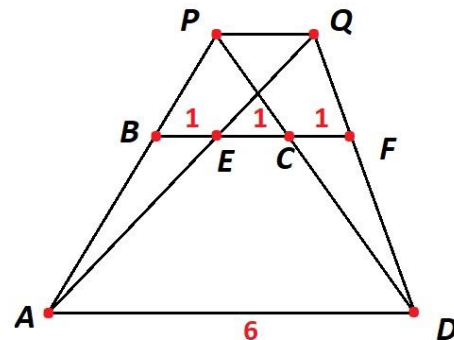


2) Точка E расположена между точками B и C .

Аналогично $\frac{h}{h+8} = \frac{2}{6}$, откуда $h = 4$.

И из подобия треугольников ABE и APQ : $\frac{1}{PQ} = \frac{8}{8+4}$, откуда

$$PQ = \frac{3}{2}. \text{ Площадь трапеции } APQD \text{ равна } \frac{6+\frac{3}{2}}{2} \cdot 12 = 45.$$



2-2. Ответ: 126 или 90.

2-3. Ответ: 126 или 90.

2-4. Ответ: 252 или 180.

3-1. Ответ: 1.

Решение. Так как $\log_3(x+3) = \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 3}$, а $\log_2(x+8) = \frac{\log_3(x+8)}{\log_3 2}$, то $\log_3(x+3) \log_2(x+8) = \log_2(x+3) \log_3(x+8)$, и исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \cdot \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) - 16$$

$$\Leftrightarrow (\log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) - 4)^2 \leq 0.$$

Отсюда $\log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) = 4$.

При $x \geq -2$ функция $f(x) = \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8)$ монотонно возрастает, и так как $f(1) =$

4, то уравнение $f(x) = 4$ имеет единственный корень $x = 1$. (Отметим, что

утверждение о том, что так как обе функции $\log_2(x + 3)$ и $\log_3(x + 8)$ возрастают при $x > -3$, то и их произведение функция возрастающая, неверно.)

На оставшимся множестве определения функции $f(x)$, т.е. на множестве $x \in (-3; -2)$ функция $f(x)$ отрицательна, а поэтому уравнение $f(x) = 4$ не имеет решений.

3-2. Ответ: 2.

3-3. Ответ: -1 .

3-4. Ответ: -2 .

4-1. Ответ: 251.

Решение. Так как для натуральных чисел n от 1 до 7 (включительно) $\left[\sqrt[3]{n} \right] = 1$, то все они входят в множество A . Всего 7 чисел.

Из отрезка $n \in [8, 26]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n} \right] = 2$, в множество A входят четные числа 8, 10, ..., 26. Всего их $\left[\frac{26-8}{2} \right] + 1 = 10$.

Из отрезка $n \in [27, 63]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n} \right] = 3$, в множество A входят кратные 3 числа 27, 30, ..., 63. Всего их $\left[\frac{63-27}{3} \right] + 1 = 13$.

В общем случае, из отрезка $n \in [k^3, (k+1)^3 - 1]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n} \right] = k$, в множество A входят числа, делящиеся на k . Всего этих чисел $\left[\frac{(k+1)^3 - 1 - k^3}{k} \right] + 1 = 3k + 4$.

Так как наименьшее и наибольшее числа из отрезка $[25, 2025]$ равны $25 = 3^3 - 2$ и $2025 = 12^3 + 297$, соответственно, то искомое количество равно сумме трех слагаемых:

а) количество четных чисел из отрезка $[25, 3^3 - 1]$, такое число одно – это число 26;

б) количество подходящих чисел из отрезка $[3^3, 12^3 - 1]$, оно равно

$$\sum_{k=3}^{11} (3k + 4) = \frac{13 + 37}{2} \cdot 9 = 225;$$

в) количество делящихся на 12 чисел из отрезка $[12^3, 2025]$, оно равно

$$\left[\frac{297}{12} \right] + 1 = 25.$$

Суммарное количество: $1 + 225 + 25 = 251$.

4-2. Ответ: 247.

4-3. Ответ: 256.

4-4. Ответ: 242.

5-1. Ответ: $(0; 16]$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{(x+y)^2}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 4.$$

Сделав замену $t = \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2$, сведем это неравенство к неравенству

$$t^2 + \frac{a}{t} \geq \frac{a}{2} + 4.$$

Рассмотрев функцию $f(t) = t^2 + \frac{a}{t}$ при $t \geq 2$, с помощью производной получим, что точка

$$\text{минимума этой функции равна } t_0 = \sqrt[3]{a/2}.$$

Если $a \leq 16$, то $t_0 \leq 2$, и при всех $t \geq 2$ выполнено $f(t) \geq f(2) = 4 + \frac{a}{2}$.

Если же $a > 16$, то $f(t_0) < f(2) = \frac{a}{2} + 4$.

5-2. Ответ: $(16; +\infty)$.

5-3. Ответ: $(0; 8]$.

5-4. Ответ: $(8; +\infty)$.

6-1. Ответ: если $m \neq 2$, то k – любое положительное число; если $m = 2$, то $k = 1$.

Решение. Рассмотрим 3 случая.

1. Если $k = 1$, то отрезок AB достаточно расположить так, чтобы точка O стала его серединой, а значит, четырёхугольник $ACBD$ — параллелограммом.
2. Если $k \neq 1$ и $m > 2$ (случай $m < 2$ рассматривается аналогично), то проекция $C'D' = z$ отрезка $CD = m$ на прямую l имеет длину

чтобы точки A, B, C', D' на ней располагались в указанном порядке, и обозначим $AC = a$, $BD = b$, $CC' = c$, $DD' = d$, $AC' = x$, $BD' = y$.

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + c^2, & b^2 &= y^2 + d^2, \\ y &= x + z - 1 \\ &= x + \varepsilon, \end{aligned}$$
$$AC - BD = a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{x^2 - y^2 + c^2 - d^2}{a + b} = \frac{x - y + \frac{c^2 - d^2}{x + y}}{\frac{a + b}{x + y}} = \frac{-\varepsilon + \frac{c^2 - d^2}{2x + \varepsilon}}{\frac{a + b}{2x + \varepsilon}}$$

3. Если $k \neq 1$ и $m = 2$, то в обозначениях предыдущего пункта имеем

$$x = y, \quad c \neq d, \quad AC - BD = \frac{x^2 - y^2 + c^2 - d^2}{a + b} \neq 0.$$

6-4. Ответ: если $m \neq \sqrt{2}$, то k — любое положительное число, а если $m = \sqrt{2}$, то $k = 1$.