

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

Задания заключительного этапа 2025/2026 учебного года для 9 классов

1. В 9:15 из пункта A вышел пешеход, а в 10:15 вслед за ним отправился велосипедист, который догнал пешехода в 10:30. В какой момент времени нужно было выехать велосипедисту из пункта A , чтобы догнать пешехода в 10:00? (Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.)

2. Известно, что 4001 – простое число. Найдите все натуральные n , при которых $n(n + 4001)$ является квадратом натурального числа.

3. Будем обозначать $\text{Окр}(x)$ результат округления числа x до ближайшего целого по стандартным математическим правилам, например, $\text{Окр}(3,14) = 3$, $\text{Окр}(2,71) = 3$, $\text{Окр}(4,5) = 5$. Задана последовательность чисел $a_n = n + \text{Окр}(\sqrt{n})$, $n = 1, 2, \dots$. Существует ли в этой последовательности участок, состоящий из 2026 последовательных натуральных чисел?

Если такого участка нет, в ответе укажите 0. Если такой участок существует, в ответе укажите наименьшее значение k , для которого $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+2025}$ являются последовательными натуральными числами.

4. На доске были написаны некоторые целые числа. На каждом шаге мы выбираем числа a и b и заменяем их на числа $5a - 3b$ и $7a - 5b$. Вначале на доске были записаны числа 15, 16, 17, ..., 40. Можно ли через конечное число шагов получить на доске числа 2001, 2002, 2003, ..., 2026?

5. В городской парк прибыли 49 волонтеров для уборки мусора. Они разбились на две группы, каждая группа собрала одинаковое количество мусора. Обе группы начали сбор мусора одновременно, но первая группа закончила на 1 час позже второй. Каждая группа делала перерыв на обед, известно, что во второй группе перерыв занял не менее 1 часа, но не более 1 ч. 20 мин. Если бы первая группа работала без перерыва, то она собрала бы в $1\frac{3}{4}$ раз больше мусора. Если бы вторая группа работала без перерыва, она собрала бы в $1\frac{2}{3}$ раз больше мусора. Сколько человек было в первой группе? Производительность всех волонтеров (количество собранного мусора в час) считать одинаковой.

6. В правильном семиугольнике провели самые длинные диагонали. Получившуюся семиугольную звёздочку вырезали и раскрасили, будто это ромашка (см. рис.). Потом белые лепестки согнули у основания по пунктирным линиям так, чтобы они накрывали центр. Найдите площадь множества всех точек, которые накрываются всеми лепестками одновременно. В ответе укажите отношение этой площади к площади изначального семиугольника.

