

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!



Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках.

Максимальный балл за всю работу равен 100.

10.1. (11) Дан многочлен $P(x) = x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 6x + 1$. Существует ли натуральное n , при котором многочлен $(P(x))^n$ не имеет отрицательных коэффициентов?

10.2. (13) На окружности отмечено 1000 синих точек. Известно, что каждая из них является вершиной равнобедренного треугольника, остальные вершины которого тоже синие. Могло ли оказаться так, что общее количество равнобедренных треугольников с синими вершинами составляет ровно 10000?

10.3. (16) В некоторой стране 100 городов, один из которых — столица. Некоторые пары городов соединены двусторонним железнодорожным сообщением, причем известно, что из любого города можно проехать в любой другой пользуясь железнодорожным транспортом, а также что между любой парой городов проходит не более одной железной дороги. На каждой дороге установлен тариф проезда: 2, 6, 10 или 18 монет, не зависящий от направления проезда вдоль неё (но, возможно, неодинаковый по всей стране).

В день концерта многие жители страны решили посетить столицу. Каждый ехал из своего города в столицу самым дешёвым маршрутом, состоящим из нескольких железнодорожных проездов, а если таковых было несколько — выбирал любой. Известно, что каждой железной дорогой воспользовался хотя бы один из посетителей концерта. Найдите наибольшее возможное количество железных дорог в этой стране.

10.4. (18) Дана функция f , определённая на всей числовой прямой и принимающая числовые значения, такая, что для любых двух чисел x, y верно равенство

$$f(x + y) = f(x)f(2026 - y) + f(2026 - x)f(y).$$

Обязательно ли $f(1) < 1$?

10.5. (20) Дано натуральное число $n > 4$. Архипелаг Дракона состоит из $3n$ островов. Между островами действуют паромные переправы трёх различных транспортных компаний, каждая из которых владеет ровно k различными паромами. Каждый паром осуществляет одностороннюю переправу с одного острова на другой; для всякой упорядоченной пары островов (I, J) и всякой компании существует не более одного парома от I к J , принадлежащего данной компании. Назовём остров A зацикленным посредством компании T , если существует нетривиальный маршрут, использующий только паромы этой компании, который начинается и заканчивается в A . Найдите наименьшее k , при котором обязательно найдётся остров, зацикленный посредством всех трёх компаний.

10.6. (22) На плоскости ввели прямоугольную систему координат и отметили все 10 точек, у которых обе координаты являются натуральными числами, причём абсцисса не превышает 2, а ордината не превышает 5. Каждую пару отмеченных точек с различными абсциссами соединили либо красным, либо синим отрезком. Назовём два отрезка *похожими*, если у них есть общий конец, а угловые коэффициенты прямых, содержащих их, отличаются на 1. За один ход разрешается выбрать любой набор отрезков, состоящий из некоторого отрезка и всех похожих на него, и все красные отрезки из этого набора перекрасить в синий цвет, а все синие — в красный. Всегда ли можно перекрасить все отрезки в один цвет за несколько ходов?