

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!

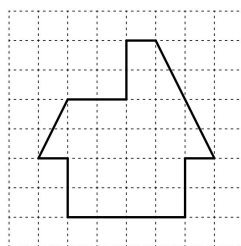


Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках.

Максимальный балл за всю работу равен 100.

7.1. (9) Разрежьте данную фигуру на три равные по форме и размеру части. Фигуры, отличающиеся поворотом или отражением, считаются равными.



7.2. (16) Двадцать три одинаковых блинчика разделили поровну между семью гостями. Назовем кусочком часть блинчика, которая меньше, чем целый блинчик. Какое наименьшее число кусочков могло получиться?

7.3. (16) Четверо детей (не младше 3 и не старше 12 лет, возраст считается целым числом лет) сделали по два утверждения: одно истинное и одно ложное.

Первый: «Сумма наших возрастов нечётная. Мой возраст чётный.»

Второй: «Только у одного из нас нечётный возраст. Произведение наших возрастов равно 810.»

Третий: «Произведение наших возрастов нечётное. Мой возраст нечётный.»

Четвёртый: «Мы высказали наши утверждения в порядке возрастания возраста. Мы высказали наши утверждения в порядке убывания возраста.»

Сколько лет каждому из детей, если среди них нет ровесников? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

7.4. (17) У бизнесмена есть 4 чемодана, которые весят 12 кг, 13 кг, 24 кг и 29 кг. Он находится на первом этаже небоскрёба и хочет подняться вместе со всеми чемоданами на верхний этаж. Лифт сломался и едет вверх или вниз, только если суммарный вес пассажиров и их вещей в килограммах делится нацело на 5 или на 7. Сможет ли бизнесмен подняться наверх вместе со всеми чемоданами, если он весит 73 кг? Он может совершить несколько поездок на лифте и оставлять чемоданы на первом и на верхнем этажах, но не может пользоваться помощью других людей, а также использовать посторонние предметы.

7.5. (20) В магазине продаются 9 разных чашек трёх цветов (красные, оранжевые, фиолетовые) с тремя узорами (в горошек, в полосочку и в клеточку). Все чашки стоят целое число монет от 1 до 9, причём все цены попарно различны.

Известно, что все не красные чашки не в горошек суммарно стоят 25 монет, все не оранжевые чашки не в полосочку стоят 22 монеты, а все не фиолетовые чашки не в клеточку стоят 21 монету. Также известно, что красная чашка в горошек стоит дешевле, чем фиолетовая в полосочку. Сколько может стоить оранжевая чашка в клеточку? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

7.6. (22) Некоторые клетки квадрата $n \times n$ покрасили в красный цвет, при этом в каждой строке и в каждом столбце покрашено ровно 100 клеток. Известно, что никакие две красные клетки не касаются друг друга сторонами или углами. При каком наименьшем n такое могло произойти?