

**Олимпиада школьников  
«Покори Воробьевы горы»  
по математике**

Задания заочного этапа 2021/2022 учебного года для 9 класса

---

1) Учитель дал Коле и Мише четыре различных натуральных числа. Коля их сложил, а Миша - перемножил и получил 225. Какой результат получил Коля?

**Ответ:** 24.

**Решение.** Заметим, что  $225 = 3^2 \times 5^2 = 15^2$ . Упорядочим 4 числа:  $a < b < c < d$ . Тогда  $a * b < 15 < c * d$ , откуда  $a=1$  или  $a=3$ . Случай  $a = 3$  невозможен, поскольку тогда  $5 \leq b < c < d \Rightarrow abcd \geq 3 * 5^3 = 375$ . Аналогичными рассуждениями получаем  $b=3, c=5, d=15$ .

2) Два курьера, один на велосипеде, другой на мотоцикле выехали из пункта А в пункт В одновременно. К тому времени, когда мотоциклист прибыл в В, велосипедист прибыл в пункт С, расположенный между А и В на расстоянии 10км от А и продолжил движение в направлении пункта В. Мотоциклист по прибытии в пункт В отдал груз и немедленно направился в пункт А. К тому моменту, когда курьеры встретились, велосипедист проехал еще 2 км. Найдите расстояние между пунктами А и В.

**Ответ:** 15км

**Решение:** Запишем отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста, оно равно отношению отрезков пути, который они проезжают за одно время:

$$\frac{AB}{10} = \frac{AB - 12}{2}$$

$$2AB = 10AB - 120 \Rightarrow AB = 15.$$

3) Коля разобрал часы со стрелками и неправильно их собрал: перепутал часовую стрелку с минутной, кроме того, они начали идти в обратную сторону.

Коля запустил часы в полдень, выставив точное время. Сколько раз за период с 12:01 до 23:59 такие часы покажут правильное время?

**Ответ:** 12

**Решение:** Точное время такие часы показывают, когда часовая и минутная стрелки расположены симметрично. Такой момент будет в каждый из промежутков 12-13, 13-14, ..., 23-24.

4) Число  $x$  является корнем уравнения  $x^3 - 4x - 4 = 0$ . Найдите возможные значения  $y = \frac{x^4 + 6}{2x^2 + 2x + 3}$ . Если возможных значений несколько - в ответе укажите их сумму. Если одно - то запишите это число.

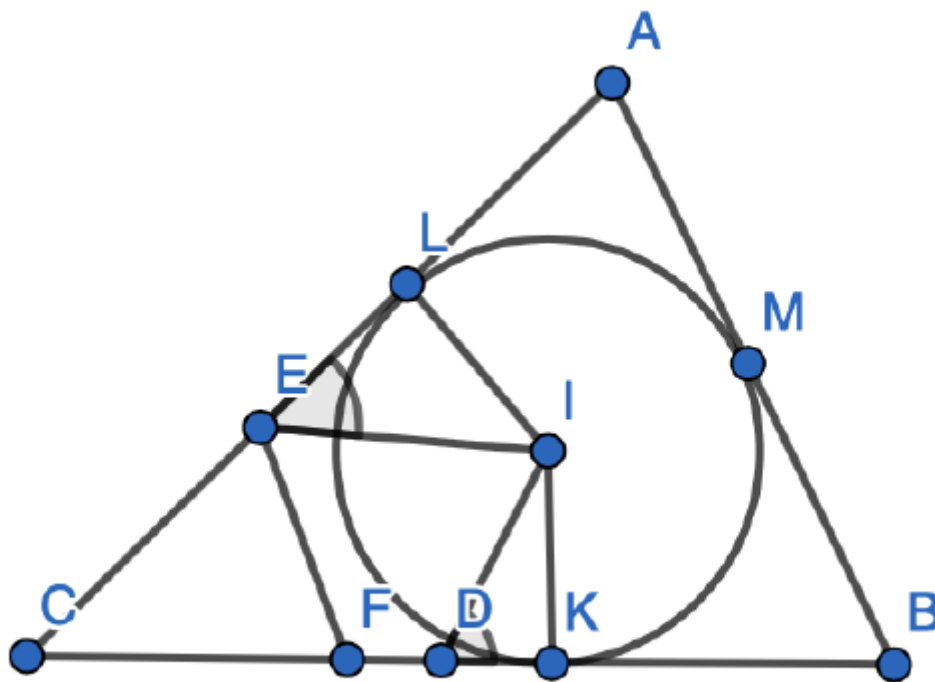
**Ответ:** 2.

**Решение:**  $x^3 = 4x + 4 \Rightarrow x^4 + 6 = 4x^2 + 4x + 6 = 2(2x^2 + 2x + 3)$ .

5) Вписанная в  $\triangle ABC$  окружность с центром в точке  $I$  касается стороны  $BC$  в точке  $K$ . На отрезке  $CK$  выбираем точку  $D$ , на отрезке  $CD$  выбираем точку  $F$ , на отрезке  $AC$  выбираем точку  $E$  так, что  $CD = CE$ ,  $EF = KD + KF$ . Найдите  $\angle EFD$ , если  $\angle EID = 23^\circ$

**Ответ:**  $157^\circ$

**Решение:**



обозначим  $L, M$  – точки касания окружности со сторонами  $AC, AB$ , соответственно. Тогда  $CL = CK$  как отрезки касательных, поэтому  $EL = CL - CE = CK - CD = KD$ .  $AL = AM$ ,  $BM = BK$  как отрезки касательных. Значит, можем записать цепочку равенств  $EF + AB = EF + (AM + MB) = EF + (AL + KB) =$

$(DK+KF)+(AL+KB) = (EL+KF)+(AL+KB) = (EL+AL)+(KF+KB) = EA+FB$ , поэтому по признаку описанного четырехугольника:  $EFBA$  описанный и  $EF$  касается окружности. Значит,  $EI$  – биссектриса угла  $AEF$ .  $IL \perp AC$ ,  $IK \perp CB$  как радиусы, проведенные к точкам касания. Треугольники  $\triangle ILE$  и  $\triangle IKD$  равны по двум катетам ( $EL = KD$  по доказанному,  $IL = IK = R$ , где  $R$  – радиус окружности), поэтому  $\angle IEF = \angle IDK$  и по признаку четырехугольник  $EFDI$  вписанный. Значит,  $\angle EFD = 180^\circ - \angle EID = 157^\circ$  по свойству вписанного четырехугольника.

б) Найдите сумму всех положительных несократимых дробей вида  $\frac{n}{1001}$ , не превосходящих 2.

**Ответ:** 1440.

**Решение.** Разобьем на интервалы  $(0; 1)$  и  $(1; 2)$ . У каждой дроби из второго интервала есть пара из первого на 1 меньше.

Из чисел  $1, 2, \dots, 1001$  отбросим все, которые делятся на 7 или на 11 или на 13, останется 720 чисел. На первом интервале разобьем на пары, симметричные относительно  $\frac{1}{2}$ , таких пар 360, а на втором - симметричные относительно 1.5, таких тоже 360.

Сумма в каждой паре на  $(0, 1)$  равна 1, а на  $(1, 2)$  - 3. Значит на  $(0, 1)$  сумма 360, а на  $(1, 2)$  - 1080.