9 класс

1. Монету бросили 2021 раз. Какова вероятность, что выпадет четное количество «орлов»?

Ответ: ½.

Решение: Обозначим через p вероятность того, что при первых 2020 бросках выпало четное число «орлов» и $q = 1 - p$ - вероятность того, что нечетное. Тогда на 2021 раз выпадет орел с вероятностью ½ и вероятность будет $\frac{1}{2}q$ или решка, тогда вероятность $\frac{1}{2}p$. Суммарная вероятность равна $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$

2. Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

Ответ: На 30%.

Решение: Увеличив скорость на 60%, т.е. в 1.6 раз, Иван Семенович уменьшил время в 1.6 раз и выиграл 40+25=65 минут. Обозначив обычное время поездки за Т, получим $\frac{T}{1.6} = T - 65$, откуда $T = \frac{520}{3}$. Для того, чтобы доехать за $T - 40 = \frac{400}{3}$ надо было увеличить скорость в $\frac{520}{3} \div \frac{400}{3} = 1.3$ раз, т.е. на 30%.

3. Сравните числа $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$

Ответ: $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{5}{16}$

Решение: Заметим, что $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$. Поэтому $A = \frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{101}{102} \times \frac{103}{104} \times \ldots \times \frac{1021}{1022} \times \frac{1023}{1024} = B$. Перемножив и сократив дроби, получим $A \times B = \frac{100}{1024} = \frac{25}{256} = \left(\frac{5}{16}\right)^2$. С другой стороны, т.е. $A < B$, то $A^2 < A \times B = \left(\frac{5}{16}\right)^2$.

4. Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т.е. если А знает В, то и В знает А). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов.

Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

Ответ: 100 рукопожатий.

Решение: Выберем джентльмена, имеющего наибольшее количество знакомых (если таких несколько - выберем любого). Допустим, он имеет *n* знакомых. Эти знакомые не могут быть попарно знакомы между собой. Рассмотрим оставшихся $(20 - n - 1)$ джентльменов, каждый из них имеет не более n знакомых, значит количество рукопожатий, которые они сделают не превосходит $(20 - n - 1) \cdot n$. Значит общее число не превосходит $(20 - n) \cdot n$. Это число максимально, когда n=10. Можно показать, что 100 рукопожатий возможно - разбив джентльменов на 2 группы по 10 человек и чтобы каждый из 1-й группы был знаком с каждым из второй (а внутри групп знакомств не было).

5. Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

Ответ: 20 девочек.

Решение: Выберем и зафиксируем произвольных 2 мальчиков - M_1 и M_2. Допустим, что они находятся на расстоянии 5 м от некоторой девочки - Д. Тогда M_1, M_2 и Д образуют равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 5м. При фиксированных позициях M_1 и M_2 существует не более двух таких треугольников (*тут нужна картинка!*). Следовательно, для любой пары мальчиков может быть не более двух девочек. Всего пар мальчиков $C_5^2 = 10$, откуда и получим верхнюю оценку.

Несложно показать, что она достигается - просто поставив мальчиков в ряд с интервалом 1м и построив все возможные равнобедренные треугольники (у них вершины, очевидно, будут разные).

6. Космический зонд, двигаясь прямолинейно с постоянной скоростью, пролетает мимо Марса и каждый день ровно в 12:00 замеряет расстояние до этой планеты. Известно, что 1-го февраля расстояние было 5 млн. км, 10-го февраля - 2 млн. км и 13-го февраля - 3 млн. км.

Определите, когда зонд пройдет на минимальном расстоянии от Марса.

В этой задаче Марс можно считать точкой.

Ответ: 9 февраля.

Обозначим $d(t)$ - расстояние до Марса в момент времени t. Пусть Марс находится в начале координат, зонд стартует из точки (x_0, y_0, z_0) и его вектор скорости равен (v_x, v_y, v_z).

Тогда в момент времени t зонд окажется в точке $(x_0 + t \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y, z_0 + t \cdot v_z)$, которая находится на расстоянии $d(t) = \sqrt{\left((x_0 + t \cdot v_x)^2 + \left(y_0 + t \cdot v_y\right)^2 + (z_0 + t \cdot v_z)^2\right)}$ от Марса.

Возведем в квадрат и заметим, что $D(t) = d^2(t)$ является квадратичной функцией от t.

Запишем $D(t)$ в виде $D(t) = at^2 + bt + c$ и найдем коэффициенты a, b, c.

Для упрощения выкладок введем шкалу времени t таким образом, чтобы момент $t = 0$ пришелся на 10 февраля, тогда 1 февраля соответствует $t = -9$ и 13-е февраля $t = 3$.

Подставим известные значения функции D: $D(-9) = 25, D(0) = 4, D(3) = 9$ и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} 81a - 9b + c = 25 \\ c = 4 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = 4 \end{cases}$$

Найдем вершину параболы (графика функции $D(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + 4$):

Это точка $t_0 = -\frac{b}{2a} = -1$, она является точкой минимума функции $D(t)$, ей соответствует 9 февраля.

7. Дан многочлен $P(x)$, не равный нулю тождественно. Известно, что при всех x выполняется тождество $(x - 2020) \cdot P(x+1) = (x + 2021) \cdot P(x)$. Сколько корней имеет уравнение $P(x) = 0$?

Ответ: 4042

Решение:

Сначала докажем две вспомогательные леммы:

<u>Лемма 1</u>. Если $x_0 \neq 2020$- корень $P(x)$, то $x_0 + 1 -$ тоже корень.

<u>Док-во</u>: Подставим $(x_0 - 2020) \cdot P(x_0 + 1) = (x_0 + 2021) \cdot P(x_0) = 0$ но $(x_0 - 2020) \neq 0$.

<u>Лемма 2</u>. Если $x_0 \neq -2021$- корень $P(x)$, то $x_0 - 1 -$ тоже корень.

<u>Док-во</u>: Подставим $0 = (x_0 - 2020) \cdot P(x_0 + 1) = (x_0 + 2021) \cdot P(x_0)$ но $(x_0 + 2021) \neq 0$.

Подставим в тождество $x = 2020$, получим $0 = 4041P(2020)$, отсюда 2020 является корнем.

Последовательно применяя лемму 2, получим, что $x = 2019, 2018, \ldots, -2021$ являются корнями.

Докажем, что других нет.

1) Допустим, что корень x_0 не является целым, то по лемме 1 получим, что корнями являются $x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots, x_0 + n, \ldots$ Но многочлен (не тождественно равный нулю) не может иметь бесконечно много корней - противоречие.

2) Допустим, что x_0 - целый и не принадлежит отрезку $[-2021; 2020]$. Если $x_0 > 2020$, то (по лемме 1) корнями являются и $x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots, x_0 + n, \ldots$ Если же $x_0 < -2021$, то (по лемме 2) корнями являются и $x_0 - 1, x_0 - 2, \ldots, x_0 - n, \ldots$ В любом случае ненулевой многочлен не может иметь бесконечно много корней - противоречие.

Итак, корнями являются целые числа от -2021 до 2020 включительно, их количество равно 4042.