

Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба»
2026 год
2 этап

Решения задач
Математика, 11 класс

СОДЕРЖАНИЕ

Условия задач	3
Решения задач и задача 1	4
Задача 2	6
Задача 3	8
Задача 4	10
Задача 5	13
Задача 6	15

Условия задач

11.1. (13) Фокусник и его ассистент готовятся показать следующий фокус. У них есть колода из 2026 различных карт. Они сообщают зрителю натуральное число $k \leq 1013$. Зритель выбирает k произвольных карт из колоды, убирает их в конверт и заклеивает его. Затем ассистент выбирает k карт из оставшихся и передает их зрителю. Тот перетасовывает эти карты как хочет и отдает фокуснику. Задача фокусника — отгадать карты, которые лежат в конверте. Для каких k фокусник и ассистент могут договориться действовать так, чтобы фокус гарантированно удался?

11.2. (14) Найдите все многочлены $P(x)$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющие условию: для $P(x)$ существует такое бесконечное множество целых чисел S , что для любого числа n из S число $\frac{1}{P\left(\frac{1}{n}\right)}$ является целым.

11.3. (14) В пространстве размещен выпуклый многогранник. Для каждой четверки его вершин, если эта четверка не лежит в одной плоскости, вычислили объем тетраэдра с вершинами в ней. Оказалось, что все вычисленные объемы равны. Сколько вершин могло быть у исходного многогранника? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

11.4. (17) Зафиксировано натуральное число $n \geq 4$. В пространстве выбрана система прямоугольных координат $Oxyz$ и размещен куб с ребром n , разбитый на кубики с ребром 1 (ребра куба параллельны осям координат). Изначально в некоторых n кубиках записаны натуральные числа от 1 до n , каждое по одному разу. Назовем x -, y - или z -координатой кубика соответствующую координату его центра. За одно действие разрешается выбрать кубик, в котором записано число k , и в любой из пустых кубиков, соседних с выбранным кубиком по грани и имеющих хотя бы одну большую координату, записать число $k + 1$, а затем стереть число $k + 1$ из кубика, в котором оно было записано ранее. При этом нельзя записывать число в кубик, если это число уже когда-то было в нем записано. Найдите наименьшее M , для которого можно гарантировать, что нельзя сделать больше M таких действий.

11.5. (19) На плоскости отмечено 800 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два несовпадающих треугольника с вершинами в отмеченных точках, отношение периметров которых отличается от 1 менее чем на $1/3800000$.

11.6. (23) В каждой клетке таблицы 2026×2026 записано натуральное число от 1 до 2026, причем в каждом столбце числа не повторяются, а также в каждой строке числа не повторяются. Все клетки таблицы закрыты карточками. Разрешается один раз выбрать несколько карточек, а затем одновременно убрать их. Какое наименьшее количество карточек нужно убрать, чтобы гарантированно узнать содержимое каждой клетки таблицы?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

11.1. Фокусник и его ассистент готовятся показать следующий фокус. У них есть колода из 2026 различных карт. Они сообщают зрителю натуральное число $k \leq 1013$. Зритель выбирает k произвольных карт из колоды, убирает их в конверт и заклеивает его. Затем ассистент выбирает k карт из оставшихся и передает их зрителю. Тот перетасовывает эти карты как хочет и отдает фокуснику. Задача фокусника — отгадать карты, которые лежат в конверте. Для каких k фокусник и ассистент могут договориться действовать так, чтобы фокус гарантированно удался? (М.В. Алексеев, Г.Ю. Караваев)

Ответ. Для всех $k \leq 1013$.

Решение 1. Покажем, что фокусник и ассистент могут придумать стратегию, согласно которой для всех $k \leq 1013$ фокус будет успешным. Обозначим $n = 2026$. Пусть фокусник и ассистент договорятся о расположении карт по кругу. Получив остаток колоды, ассистент однозначно восстанавливает, какие карты забрал зритель. В случае четного n и $k = n/2$ фокус очевидно всегда будет успешен, поэтому далее считаем, что $k < n/2$. Предложим алгоритм для ассистента и фокусника для произвольного $k < n/2$.

После того, как зритель выберет некоторые карты, ассистент сопоставит каждой из карт некоторую другую карту в соответствии с алгоритмом, предложенным ниже.

Покрасим все карты, выбранные зрителем, в красный цвет. Теперь выберем каждую красную карту, для которой следующая по часовой стрелке красной не является. Каждой такой карте сопоставим следующую за ней, покрасим сопоставленную карту в синий цвет и удалим все такие пары из круга. Будем повторять данные действия до тех пор, пока в круге не закончатся красные карты, после чего отдадим фокуснику все синие карты.

Для восстановления карт зрителя фокусник ищет синие карты, следующие за которыми против часовой стрелки синими не являются, красит их в красный цвет и удаляет из круга, после чего называет все красные карты выбранными зрителем.

Покажем, что алгоритм работает. Для этого достаточно показать, что на каждом шаге алгоритм фокусника и алгоритм ассистента составляют один и тот же набор пар красных и синих карт. Заметим, что если ассистент на некотором шаге сопоставил некоторой красной карте синюю, то следующая за этой красной картой по часовой стрелке не является красной. Но тогда и следующая против часовой стрелки карта за синей не будет синей, а значит, на том же этапе алгоритма фокусник сопоставит этой синей карте красную. Аналогично, если фокусник некоторой синей карте сопоставит красную, то ассистент сопоставит этой красной карте синюю, а значит, они составят один и тот же набор пар карт, что и требовалось.

Решение 2. Зафиксируем $k \leq n/2$ и рассмотрим двудольный граф, вершинами одной доли которого являются всевозможные комбинации из k зрительских карт, а второй долей являются всевозможные комбинации из k ассистентских карт (эти доли идентичны и по существу являются всевозможными наборами из k различных карт колоды), а ребра проведены между вершинами разных долей, если соответствующие наборы карт не пересекаются. По вершине, соответствующей набору зрительских, ассистент должен выдать набор карт, соответствующих смежной вершине. Степени всех вершин в этом графе равны $\binom{n-k}{k}$, так как каждой вершине одной доли сопоставляются всевозможные наборы из k карт из остатка колоды размером $n - k$. Это двудольный граф с равными по размерам долями, в котором степени всех вершин равны, поэтому согласно следствию из леммы Холла в этом графе существует паросочетание, покрывающее все вершины обеих долей (совершенное паросочетание). Для каждого k фокусник и ассистент договариваются о выборе конкретного паросочетания, поэтому по картам ассистента всегда можно будет восстановить карты зрителя.

Критерии. Максимальный балл: 13.

Содержание критерия	Балл
Любое верное решение	13
А1. В решении через лемму Холла не проверяются явно ее условия, но указано, что степени всех вершин равны	13
А2. Решение состоит из ссылки на лемму Холла без указания регулярности графа и проверки её условия, или же с неверной проверкой условия	7
А3. Задача переформулирована в терминах доказательства существования паросочетания в двудольном графе, дальнейших продвижений нет	0
Б1. В решении через расстановку карт по кругу сформулирован алгоритм за Ассистента. Возможно (но не обязательно) сформулирован алгоритм за фокусника (аналогичный). Обоснование, почему фокусник восстановит именно карты зрителя, отсутствует или неверно	10
Б2. В круговом решении алгоритм за ассистента сформулирован неоднозначно	7
Б3. Алгоритм за ассистента не сформулирован явно и не обоснована его корректность, но из контекста сам алгоритм можно восстановить	≤ 3
Б4. Присутствует только идея поставить числа по кругу и, возможно, «сдвигать» блоки подряд идущих, если этому ничего не мешает, обоснования отсутствуют или неверны, дальнейших продвижений нет	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за разные критерии не суммируются.

11.2. Найдите все многочлены $P(x)$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющие условию: для $P(x)$ существует такое бесконечное множество целых чисел S , что для любого числа n из S число $\frac{1}{P(\frac{1}{n})}$ является целым. (М.В. Алексеев)

Ответ. Непостоянные многочлены $P(x) = ax^m$, где a — произвольное рациональное, если $m \geq 1$, и постоянные многочлены $P(x) = 1/b$ для произвольных целых $b \neq 0$.

Решение 1. Если многочлен $P(x)$ постоянный и равен числу c , то c имеет вид $1/b$ для целого $b \neq 0$. Очевидно, что все такие постоянные многочлены подходят. Далее в этом и последующих решениях будем считать, что P — непостоянный многочлен. Докажем вначале лемму.

Лемма. Пусть для многочлена $P(x)$ с рациональными коэффициентами существует бесконечное множество целых чисел n и фиксированное число d , для каждого из которых число n^d делится на $P(n)$. Тогда $P(x) = ax^m$.

Доказательство леммы. Представим каждый коэффициент многочлена P в виде несократимой дроби и домножим каждый коэффициент на M — наименьшее общее кратное всех знаменателей (далее в этом и последующих решениях M остается таким же). Получим многочлен $Q(x) = b_mx^m + \dots + b_1x + b_0$ уже с целыми коэффициентами, а условие делимости переписывается как делимость числа Mn^d на $Q(n)$ для всех $n \in S$. Если $Q(x) = bx^m$, то $P(x) = ax^m$, что и требовалось. Пусть хотя бы два коэффициента $Q(x)$ не равны нулю. Без ограничения общности можно считать, что $b_0 \neq 0$, в противном случае, пусть $b_k, k < m$ — ненулевой коэффициент с наименьшим номером, тогда в дроби $\frac{n^d}{b_m n^m + \dots + b_k n^k} = \frac{n^{d-k}}{b_m n^{m-k} + \dots + b_k}$ сократим n^k и задача сведется к задаче для показателя $d' = d - k$ и многочлена $\tilde{Q}(x) = Q(x)/x^k$ с ненулевым свободным членом.

По условию для каждого n из S число Mn^d делится на $Q(n) = b_m n^m + \dots + b_0$. Представим $Q(n) = b_0 + nR(n)$, где R — ненулевой многочлен. Тогда $nR(n) = Q(n) - b_0$ и $nR(n) \equiv -b_0 \pmod{Q(n)}$. Возведем данное сравнение в степень d и домножим на M : $Mn^d(R(n))^d \equiv M(-b_0)^d \pmod{Q(n)}$, откуда с учетом условия делимости Mn^d на $Q(n)$ имеем делимость $M(-b_0)^d$ на $Q(n)$ для всех $n \in S$. Множество S бесконечно и состоит из целых чисел, поэтому оно не ограничено, а значит и множество значений $Q(S)$ не ограничено (в частности, бесконечно). Но из предыдущего следует, что ненулевое число $M(-b_0)^d$ делится на каждое число из бесконечного множества, чего быть не может, поэтому, $b_0 = 0$. Аналогично, для всех $i < m$ верно $b_i = 0$, откуда $Q(x) = b_mx^m$, а значит и $P(x) = ax^m$. Лемма доказана.

Из доказанного следует, что если $P(x)$ имеет ненулевой свободный член, то он обязан быть постоянным.

Теперь перепишем выражение $\frac{1}{P(\frac{1}{n})} = \frac{1}{a_m(\frac{1}{n})^m + \dots + a_0} = \frac{n^m}{a_m + \dots + a_0 n^m}$. В знаменателе стоит многочлен $P^*(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$, коэффициенты которого равны коэффициентам $P(x)$, но расположены в обратном порядке. Применяя лемму к многочлену $P^*(x)$ и учитывая, что $a_m \neq 0$ (т.е. $P^*(x)$ имеет ненулевой свободный член), заключаем, что $P^*(x)$ — постоянный. А это означает, что $P(x) = ax^m$. Наконец, для любого рационального числа a , представленного в виде несократимой дроби k/ℓ , можно подобрать множество целых чисел, для которых $\frac{1}{P(\frac{1}{n})}$ будет целым — например, подойдет множество $S = \{rk, r = 1, 2, 3, \dots\}$.

Таким образом, все $P(x) = ax^m$ подходят, а других быть не может.

Решение 2. Докажем лемму из предыдущего решения немного по-другому. Снова представим $P(x)$ в виде $x^k Q(x)/M$, где $Q(x)$ уже целочисленный многочлен с ненулевым свободным членом. В этом случае условие леммы переписывается следующим образом: число Mn^{d-k} делится на $Q(n)$ для всех чисел из бесконечного множества S . Многочлены Mx^{d-k} и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты и взаимно просты, поэтому из линейного выражения НОД многочленов следует существование целочисленных многочленов $\alpha(x), \beta(x)$ и ненулевого целого числа K , для которых $\alpha(x) \cdot Mx^{d-k} + \beta(x)Q(x) = K$. Подставим n из S в

это равенство: $\alpha(n) \cdot Mn^{d-k} + \beta(n)Q(n) = K$, а с учетом делимости Mn^{d-k} на $Q(n)$ имеем $K = Q(n)(\alpha(n)\ell(n) + \beta(n))$. Если многочлен $Q(x)$ непостоянный, то его значения на неограниченном множестве S неограничены, поэтому произведение $Q(n)(\alpha(n)\ell(n) + \beta(n))$ либо неограничено (как следствие, принимает бесконечно много различных значений), либо тождественный нуль для всех $n \in S$. Оба варианта противоречат построению K — оно ненулевое и не может иметь бесконечно много делителей. Поэтому $Q(x)$ обязан быть постоянным многочленом, что доказывает лемму. Дальнейший вывод аналогичен концу первого решения.

Решение 3. Вначале докажем лемму.

Лемма. Пусть $R(x) = \frac{S(x)}{T(x)}$ — рациональная функция с целыми коэффициентами, про которую известно, что она принимает целые значения на некотором бесконечном множестве целых чисел. Тогда многочлен $S(x)$ делится на многочлен $T(x)$.

Доказательство леммы. Разделим числитель $R(x)$ на знаменатель с остатком и представим ее в виде суммы $R(x) = A(x) + F(x)$, где $A(x)$ — многочлен, а $F(x)$ — рациональная дробь, в которой степень числителя строго меньше степени знаменателя. Тогда $A(x)$ будет многочленом с рациональными коэффициентами. Домножим равенство на НОК знаменателей коэффициентов $A(x)$: целочисленность значений $R(x)$ сохранится, а $F(x)$ останется рациональной функцией, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, поэтому далее считаем, что $A(x)$ имеет целые коэффициенты. Тогда по условию $R(n) = A(n) + F(n)$ — целое число для бесконечно многих n . Значит, $F(n) = R(n) - A(n)$ тоже целое как разность целого $R(n)$ и значения целочисленного многочлена $A(n)$ в целых точках n . С другой стороны, $F(n) = \frac{\alpha_k n^k + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_\ell n^\ell + \dots + \beta_1 n + \beta_0} = \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \dots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_\ell n^{\ell-k} + \dots}$, причем $\ell > k$, откуда видно, что числитель ограничен на любом множестве ненулевых целых чисел (при любых целых $n \neq 0$ его абсолютная величина не превосходит $|\alpha_k| + |\alpha_{k-1}| + \dots + |\alpha_0|$), а знаменатель неограничен на бесконечном множестве целых чисел S , таким образом, при всех достаточно больших n это отношение мало по абсолютной величине (в частности, его абсолютная величина меньше 1), что обязывает его быть равным 0. Но тогда и само $F(x)$ тождественный нуль, так как в противном случае $F(n)$ было бы равно нулю лишь для конечного набора n . Это показывает, что $F(x)$ — тождественный нуль, а значит, $S(x)$ делится на $T(x)$. Лемма доказана.

Применим лемму к рациональной функции $\frac{1}{P(\frac{1}{x})} = \frac{x^m}{a_m + \dots + a_0 x^m} = \frac{Mx^m}{b_m + \dots + b_0 x^m}$, где коэффициенты b_i уже целые. По доказанной лемме функция $\frac{Mx^m}{b_m + \dots + b_0 x^m}$ обязана быть многочленом, т.е. $MP^*(x) = b_m + \dots + b_0 x^m$ делит многочлен Mx^m , поэтому $P^*(x) = cx^k$. Но с учетом того, что его свободный член b_m не равен нулю, остается только вариант, когда все остальные коэффициенты $P^*(x)$ равны нулю, т.е. $P^*(x)$ постоянный. Значит, $P(x) = ax^m$.

Критерии. Максимальный балл: 14.

Содержание критерия	Балл
Найдены все подходящие многочлены и доказано, что других нет	14
В верном решении не указаны явно подходящие постоянные многочлены	13
В решении, аналогичном решению 3 выше, ошибочно предполагается, что неполное частное при делении числителя рациональной функции на ее знаменатель имеет целые коэффициенты	12
Полностью приведен и обоснован верный пример (включая постоянные), иных продвижений нет	4
Приведен верный пример без учета подходящих постоянных многочленов	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за разные критерии не суммируются.

11.3. В пространстве размещен выпуклый многогранник. Для каждой четверки его вершин, если эта четверка не лежит в одной плоскости, вычислили объем тетраэдра с вершинами в ней. Оказалось, что все вычисленные объемы равны. Сколько вершин могло быть у исходного многогранника? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (М.В. Алексеев)

Ответ. 4, 5 или 6 вершин.

Решение. Пример. На 6 вершин подходят примеры правильного октаэдра и правильной треугольной призмы (а также их аффинные образы), а на меньшее число можно убрать одну или две точки из этих примеров (например, подойдут четырехугольная пирамида с параллелограммом в основании и любой тетраэдр).

Оценка. Покажем, что 7 и более вершин у такого многогранника быть не может. Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть выпуклый многогранник P имеет пять или более вершин. Тогда существует вершина, после удаления которой остальные вершины не все будут лежать в одной плоскости.

Доказательство утверждения. Предположим противное, т.е. что существует некоторый многогранник с 5 или более вершинами, для каждой из которых остальные лежат в одной плоскости. Возьмем произвольные его пять вершин a, b, c, d, e . Тогда обе четверки b, c, d, e и a, c, d, e лежат в одной плоскости, но эти плоскости пересекаются по трем точкам c, d, e , а значит, эти плоскости совпадают. Таким образом, все пять вершин лежат в одной плоскости. Это верно для любой пятерки вершин, поэтому и любая четверка вершин лежит в одной плоскости. Значит, все вершины лежат в одной плоскости, а это противоречит тому, что это вершины выпуклого многогранника. Утверждение доказано.

Из утверждения следует, что если существует выпуклый многогранник, удовлетворяющий условию задачи с $n \geq 5$ вершинами, то существует и удовлетворяющий условию многогранник с $n-1$ вершинами (так как множество четверок тетраэдров у многогранника с удаленной вершиной содержится в множестве четверок тетраэдров у исходного многогранника). Таким образом, достаточно доказать отсутствие таких многогранников с ровно 7 вершинами, что будет сделано от противного. Предположим, что существует требуемый многогранник с $n \geq 7$ вершинами. Тогда есть такой многогранник с 7 вершинами. Обозначим за V, E, F количества вершин, ребер и граней этого многогранника соответственно. В каждой вершине сходится не менее трех ребер, значит, $2E \geq 3V = 21$, откуда $E \geq 21/2$, т.е., $E \geq 11$. Покажем, что у многогранника есть хотя бы одна треугольная грань. Пусть такой грани нет, тогда $2E \geq 4F$, откуда из формулы Эйлера $7 - E + E/2 \geq 2$, а значит, $E \leq 10$, что противоречит выведенному выше условию на количество ребер. Значит, есть хотя бы одна треугольная грань.

Рассмотрим эту грань, назовем ее ABC . Помимо вершин ABC есть 4 точки, которые обязаны находиться на равном расстоянии от плоскости этой грани (в противном случае, два тетраэдра с вершинами в двух точках на разном расстоянии от плоскости треугольной грани и сама эта треугольная грань образуют два тетраэдра с заведомо различными объемами), а значит, они находятся в параллельной плоскости (так как плоскость грани не может разделять вершины выпуклого многогранника). Если эти точки образуют не параллелограмм, то очевидно найдутся два треугольника разной площади с вершинами в этой четверке, и тогда тетраэдры, образованные этими двумя треугольниками и любой вершиной из параллельной грани, будут иметь различные объемы. Поэтому эти 4 вершины образуют параллелограмм (назовем его $PQRS$). Рассмотрим ребро AC и вторую грань, содержащую это ребро — без ограничения общности, третья вершина этой грани P , а точка S не лежит в этой грани (из двух смежных с P вершин Q, S как минимум одна не лежит в плоскости с AC), кроме того, точки R и B тоже не лежат в плоскости грани ACP . Так как они лежат по одну сторону от плоскости треугольника ACP , в силу равенства объемов тетраэдров $SACP$, $RACP$ и $BACP$ точки S, R, B удалены на одно расстояние от плоскости ACP , т.е. плоскость BRS параллельна плоскости ACP . Рассматривая тетраэдры с основанием в BRS убеждаемся, что и Q должна находиться на том же расстоянии от плоскости BRS , что и ACP , значит,

Q лежит в плоскости ACP и $ACPQ$ тоже параллелограмм. Теперь рассмотрим пару треугольников AQR и CPS . Так как AQ параллельно CP и QR параллельно PS , в плоскости AQR нашлись две непараллельные прямые, которые обе параллельны плоскости CPS , что означает параллельность плоскостей AQR и CPS . В этих двух параллельных плоскостях лежат 6 вершин многогранника, а седьмая вершина B лежит в плоскости, проходящей через AC и параллельную плоскости $PQRS$. Если точка B не лежит в плоскости AQR или CPS , то объем тетраэдра с вершиной B и основанием CPS или AQR будет отличаться от объема тетраэдра с тем же основанием и вершинами из наборов A, Q, R или C, P, S соответственно, а значит, точка B обязана лежать в какой-нибудь из этих плоскостей, пусть AQR , что так же обязывает четырехугольник $AQRB$ быть параллелограммом. Таким образом мы имеем три параллелограмма, сходящиеся в одной вершине, а значит, 7 вершин нашего многогранника — это в точности 7 вершин параллелепипеда. Но тогда объем тетраэдра $QBSC$ (он образован диагоналями граней соответствующего параллелепипеда) будет вдвое больше объема тетраэдра с вершинами QBR («угловой» тетраэдр параллелепипеда), что противоречит предположению. Это противоречие показывает, что 7 и более вершин у такого многогранника быть не может.

Критерии. Максимальный балл: 14.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	14
A1. Доказано, что у многогранника не может быть больше 8 вершин	7
A2. Доказано, что все вершины многогранника лежат в двух параллельных плоскостях, иных продвижений нет	3
B1. Доказано, что не может быть 7 и 8 вершин	4
B1. Приведены явно примеры на 4,5 и 6 вершин	3
B2. Приведены примеры не для всех чисел из набора $\{4, 5, 6\}$ или для хотя бы одного из этих чисел приведен некорректный пример, при этом, корректные примеры отсутствуют	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за критерии с разными литерами суммируются, баллы за критерии с одной литерой не суммируются. Обоснования корректности приведенных примеров не требовалось, за его отсутствие баллы не снижаются. Баллы не снижаются за наличие некорректных примеров, даже с количеством вершин большим 6, если присутствует хотя бы один корректный пример для каждого из чисел.

11.4. Зафиксировано натуральное число $n \geq 4$. В пространстве выбрана система прямоугольных координат $Oxyz$ и размещен куб с ребром n , разбитый на кубики с ребром 1 (ребра куба параллельны осям координат). Изначально в некоторых n кубиках записаны натуральные числа от 1 до n , каждое по одному разу. Назовем x -, y - или z -координатой кубика соответствующую координату его центра. За одно действие разрешается выбрать кубик, в котором записано число k , и в любой из пустых кубиков, соседних с выбранным кубиком по грани и имеющих хотя бы одну большую координату, записать число $k + 1$, а затем стереть число $k + 1$ из кубика, в котором оно было записано ранее. При этом нельзя записывать число в кубик, если это число уже когда-то было в нем записано. Найдите наименьшее M , для которого можно гарантировать, что нельзя сделать больше M таких действий.

(М.В. Алексеев, Г.Ю. Караванов)

Ответ. $\binom{n+3}{4} - n$.

Решение. Оценка. Посчитаем вначале наибольшее количество положений для каждого числа $1 \leq k \leq n$ и сложим полученные числа. При этом в этот подсчет будет включено изначально положение каждого числа, поэтому для получения оценки на число действий из полученной суммы нужно будет вычесть n .

Оценим сколько различных положений может принять число $m \leq n$. Каждый момент записи числа m в конкретном кубике будем считать отдельным событием «число m впервые появилось в данном кубике». Зафиксируем число $r \leq m - 1$ и будем называть записи числа m имеющими прародителя r , если эта запись получена выбором кубиков с числами, большими r — все такие записи попадают в часть таблицы, лежащую строго выше, правее и впереди кубика, в котором изначально было записано число r . Другими словами, для каждого события записи числа m раскрутим назад цепочку записей (как было получено $m - 1$, $m - 2$ и т.д.), и если в процессе этой цепочки выяснилось, что число r стояло на своем исходном положении, а любое большее число меняло свое положение, то это событие называется имеющим прародителя r . Очевидно, что количество записей числа m не может превосходить суммы количества событий с прародителями $r \leq m - 1$ по всем таким r . Обозначим множество кубиков, в которых бывало m , с прародителем r через $P(m, r)$. Теперь оценим количество записей m с фиксированным прародителем r , т.е. мощность $P(m, r)$.

Лемма. Всякий кубик из $P(m, r)$ является сдвигом из кубика, в котором изначально было r , на векторы вида (a, b, c) где $a, b, c \geq 0$ и $a + b + c = m - r$.

Доказательство леммы. Зафиксируем конкретную запись числа m с прародителем r . Проследим за цепочкой порождения назад: сама запись m получена из записи $m - 1$ с прародителем r , которая получена из записи $m - 2$ с прародителем r , ... и т.д., поэтому в конце мы придем к записи r , так как все иные записи числа r могли получиться только через выборы кубиков с числами, строго меньшими r , а это противоречит определению прародителя r . На каждом шаге цепочки $m \rightarrow m - 1 \rightarrow m - 2$ одна из координат (по x , по y или по z) увеличивалась на 1, поэтому суммарный прирост суммы координат $a + b + c$ составил ровно $m - r$ (какая-то одна координата росла ровно на 1, всего это было $m - r$ раз). Лемма доказана.

Из леммы следует, что $|P(m, r)| \leq \binom{m-r+2}{2}$ (количество упорядоченных способов разбить натуральное число $m - r$ в сумму трех целых неотрицательных). Так как множества $P(m, r)$ не пересекаются для разных прародителей r , то количество кубиков, в которых бывало m , не превосходит $|P(m, 1)| + |P(m, 2)| + \dots + |P(m, m)| \leq \binom{m+1}{2} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{2}{2}$.

Последняя сумма равна $\binom{m+2}{3}$. Таким образом, для каждого числа m положений не может быть больше $\binom{m+2}{3}$, для всех чисел таких положений не может быть больше $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$, а значит, действий не может быть больше $\binom{n+3}{4} - n$.

Пример. Покажем, что при некоторой начальной расстановке чисел в кубиках можно сделать ровно $\binom{n+3}{4} - n$ действий. Расставим числа на главную диагональ так: число i стоит в кубике (i, i, i) и зафиксируем конкретную пару чисел m и $r \leq m - 1$. Из леммы мы знаем, что множество кубиков $P(m, r)$ совпадает с множеством, которое получается из сдвига из начального кубика числа r на векторы (a, b, c) с целыми неотрицательными компонентами и $a + b + c = m - r$. В нашем случае мы имеем начальный кубик (r, r, r) , поэтому множество $P(m, r)$ не будет выходить за пределы куба (оно всегда лежит внутри куба с диагональю $(1, 1, 1) - (m, m, m)$). Будем действовать так: на каждом ходу двигаем наибольшее число $k + 1 \leq n$, если это возможно. Докажем, что при каждом таком действии кубики рядом с k будут свободны. Назовем удаленностью числа m величину $d_m = \frac{x_m + y_m + z_m - m}{2}$ (она всегда целая так как действие не меняет четности $x_m + y_m + z_m - m$). Тогда $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ в любой момент времени, так как в самом начале, очевидно, $d_1 < d_2 < \dots < d_n$, операция делает $d_{k+1} = d_k$, а все остальные удаленности не меняются. Предположим, что мы двигаем наибольшее число $k + 1$, которое в данный момент двигать можно, но в нужном кубике, соседнем с k , есть другое число ℓ . Тогда удаленность числа ℓ равна $d_\ell = \frac{x_k + y_k + z_k - \ell}{2}$. Если $\ell > k$, то $d_\ell < d_k$, а должно быть $d_\ell \geq d_k$, а если $\ell < k$, то наоборот, что тоже противоречит упорядоченности удаленностей в каждый момент времени. Таким образом, при попытке записать число $k + 1$ в указанный кубик, в этих кубиках не могло быть записано никакого другого числа. Значит, если мы не можем записать число k в кубик, то только лишь из-за того, что оно в нем уже было записано ранее. Пусть S_m — множество кубиков, в котором побывает число m . Оно представляется как объединение множеств $\bigcup_{r=1}^m P(m, r)$. Заметим, что $S_m = \{S_{m-1} + e_x\} \cup \{S_{m-1} + e_y\} \cup \{S_{m-1} + e_z\}$, так как по построению, m может посетить все кубики, которые может посетить $m - 1$, со сдвигом на векторы $e_x = (1, 0, 0)$, $e_y = (0, 1, 0)$, $e_z = (0, 0, 1)$. Теперь докажем индукцией, что множество посещенных m кубиков в точности равно $\binom{m+2}{3}$. База для $m = 1, 2$ тривиальна. Переход $m \rightarrow m + 1$: пусть m может посетить ровно кубики S_m и сейчас оно находится в кубике $C \in S_m$. В рамках нашей стратегии мы всегда двигаем только самое большое подвижное сейчас число, поэтому, мы не двигаем число m пока не двигалось число $m + 1$. При этом $m + 1$ должно было бы посетить кубики $C + e_x, C + e_y, C + e_z$ до того как m будет куда-либо перемещено, а ранее мы показали, что никаких препятствий к движению числа $m + 1$ не будет. Таким образом, $m + 1$ посетит в точности кубики S_{m+1} , что и требовалось. Переход доказан. Осталось лишь просуммировать $|S_1| + |S_2| + \dots + |S_n| = \binom{1+2}{3} + \binom{2+2}{3} + \dots + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$ и вычесть кубики начальных положений: $\binom{n+3}{4} - n$.

Критерии. Максимальный балл: 17.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	17
O1. Доказана верная оценка сверху на количество действий	6
A1. Предъявлена начальная расстановка чисел и сформулирован корректный алгоритм, позволяющий сделать наибольшее количество действий	6
A2. Только заявлена расстановка чисел на главной диагонали куба, дальнейших продвижений нет	0
B1. Доказана корректность алгоритма, реализующего наибольшее количество действий (из A1)	4
B1. Подсчитано число действий в алгоритме	1
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Комментарии. 1. Реализовать алгоритм из A1 могут помешать два препятствия: 1) В какой-то момент мы должны поставить число в клетку, в которой оно уже стояло 2) В какой-то момент мы должны поставить число в клетку, в которой уже стоит другое число. Обоснование отсутствия каждого препятствия весит 2 балла, дающие в сумме 4 балла по критерию B1. Количество действий может быть записано в любой форме, в частности, не требовалось считать сумму биномиальных коэффициентов в замкнутом виде.

2. Баллы за критерии с разными литерами суммируются.

11.5. На плоскости отмечено 800 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два несовпадающих треугольника с вершинами в отмеченных точках, отношение периметров которых отличается от 1 менее чем на $1/3800000$. (М.В. Алексеев)

Решение. Всего различных треугольников с вершинами в отмеченных точках $T = \binom{800}{3}$.

Выпишем периметры треугольников в порядке неубывания: $P_1 \leq P_2 \leq P_3 \dots \leq P_T$. Без ограничения общности можно считать, что наименьший периметр треугольника равен $P_1 = 1$. Обозначим $\varepsilon = 1/3800000$. Если для некоторой пары треугольников с периметрами P_i и P_{i+1} верно, что $\frac{P_{i+1}}{P_i} < 1 + \varepsilon$, то задача решена. В противном случае мы имеем неравенство

$\frac{P_{i+1}}{P_i} \geq 1 + \varepsilon$ для всех $i = 1, 2, 3, \dots, T - 1$ (в частности, это означает, что отношение периметров любых двух треугольников не меньше $1 + \varepsilon$). Тогда наибольший периметр равен

$P_T = P_1 \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \dots \cdot \frac{P_T}{P_{T-1}} \geq (1 + \varepsilon)^{T-1} = M$. Поскольку наименьший периметр равен 1, у

треугольника с таким периметром каждая сторона короче $1/2$. Так как никакие три точки не лежат на одной прямой, то как минимум одна из сторон треугольника с наименьшим периметром не будет иметь общих концов с самой длинной стороной самого большого по периметру треугольника. Обозначим сторону малого треугольника, не имеющую общих концов с самой длинной стороной самого большого треугольника за AB , а самую длинную сторону самого большого треугольника, которая не короче $M/3$, за PQ ($P \neq A, B, Q \neq A, B$). Теперь рассмотрим два треугольника APQ и BPQ . Оба треугольника содержат отрезок PQ как сторону, поэтому их периметры больше, чем $2M/3$, т.е. $P(APQ) > 2M/3, P(BPQ) > 2M/3$.

Пусть, для определенности, периметр APQ не больше периметра BPQ . Согласно неравенству треугольника, $BP < AP + AB$ и $BQ < AQ + AB$, откуда ясно, что $P(APQ) \leq P(BPQ) < P(APQ) + 2 \cdot 1/2$. Но тогда $1 < \frac{P(BPQ)}{P(APQ)} < 1 + \frac{1}{P(APQ)} < 1 + \frac{1}{2M/3} = 1 + \frac{3}{2M}$.

Теперь покажем, что $M > 3/2 \cdot 3800000 = 5700000$. Оценим $T - 1$:

$$T - 1 = \binom{800}{3} - 1 > \frac{(800 - 2)^3}{6} - 1 = \frac{800^3 - 3 \cdot 800^2 \cdot 2 + 3 \cdot 800 \cdot 2^2 - 14}{6} > \frac{512 \cdot 10^6 - 6 \cdot 700000}{6} > \\ > \frac{507 \cdot 10^6}{6} = 84500000. \text{ Теперь оценим } M \text{ двумя разными способами:}$$

$$1) M = (1 + \varepsilon)^{T-1} = \left((1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \right)^{\varepsilon(T-1)} > 2.5^{\varepsilon(T-1)} > 2.5^{\frac{84000000}{3800000}} = 2.5^{\frac{420}{19}}. \text{ Здесь мы пользовались}$$

известным неравенством $(1 + 1/n)^n > 2.5$, верным при $n \geq 10$ (нетрудно видеть, что последовательность $(1 + 1/n)^n$ возрастает, а при $n = 10$ имеем $11^{10}/10^{10} = (11^5/10^5)^2 > 1.6^2 > 2.5$). Теперь докажем, что $2.5^{420/19} > 5700000$. Понятно, что $2.5^{420/19} > 2.5^{22} = 5^{22}/2^{22}$. Оценим 2^{22} сверху, а 5^{22} — снизу. Для числа $2^{22} = 4 \cdot 1024 \cdot 1024 < 8 \cdot 1100000/2 < 9 \cdot 10^6/2 = 45 \cdot 10^5$.

С другой стороны, $5^{22} = 25 \cdot (5^5)^4 > 25 \cdot 3000^4 = 2025 \cdot 10^{12}$. Отсюда $5^{22}/2^{22} > \frac{2025 \cdot 10^{12}}{45 \cdot 10^5} = 45 \cdot 10^7 > 5.7 \cdot 10^6$, то есть неравенство $M > 5700000$ верно.

2) Без использования неравенства $(1 + 1/n)^n > 2.5$ сравнить числа можно так: рассмотрим первые три слагаемых бинома $(1 + 1/n)^n = 1 + n \cdot 1/n + \binom{n}{2} \cdot 1/n^2 + \dots$, дающие оценку

$$(1 + 1/n)^n > 2 + \frac{n-1}{2n}, \text{ что при } n > 6 \text{ превосходит } 2.4. \text{ Теперь покажем, что } 2.4^{22} > 5700000.$$

Это эквивалентно $24^{22} > 5.7 \cdot 10^{28}$. Разделим левую часть на $8^{22} > (4 \cdot 10^6)^3$, правую часть на 10^{18} и домножим на 64 левую часть: тем самым левую часть мы разделили на число, которое больше, чем то, на что разделили правую часть. Слева будет $64 \cdot 3^{22}$, а справа $5.7 \cdot 10^{10}$. Разделим на 3 обе части, слева будет $64 \cdot 3^{21}$, справа $1.9 \cdot 10^{10}$. Заметим, что $3^{21} = 27^7 > 10^{14}/4^7$, поэтому левая часть больше $64 \cdot 10^{14}/4^7 = 10^{14}/4^4 = 2.5^4 \cdot 10^{10}$, что очевидно больше $1.9 \cdot 10^{10}$. Это доказывает требуемое.

Таким образом, отношение периметров треугольников BPQ и APQ лежит между 1 и $1 + \frac{1}{3800000}$. Это противоречит нашему предположению о том, что любые два соседних по возрастанию периметра отличаются как минимум в $1 + \frac{1}{3800000}$ раз. Полученное противоречие доказывает требуемое.

Замечание. Дословно так же можно доказать, что утверждение задачи верно для любого числа точек n и отклонения $\varepsilon > 0$, для которых $\varepsilon(1 + \varepsilon)^{\binom{n}{3}-1} > 3/2$.

Критерии. Максимальный балл: 19.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	19
А1. В предположении от противного показано, что отношения самого большого периметра к самому маленькому не меньше $(1 + \varepsilon)^{T-1}$	4
Б1. Решение основано на рассмотрении конфигурации из 4 точек A, B, C, D , где AB — «достаточно длинный отрезок», являющийся стороной самого большого по периметру треугольника, CD — «достаточно короткий отрезок», являющийся стороной самого маленького по периметру треугольника. Корректно оценены периметры треугольников ABC и ABD , правильно рассмотрены возможные случаи совпадения вершин большого треугольника и вершин маленького треугольника	9
Б2. Аналогично Б1, но случаи совпадения вершин маленького и большого треугольников не рассмотрены или рассмотрены неверно	6
Б3. Рассматриваются только отрезки наибольшей и наименьшей длины без привязки к периметрам треугольников, не рассматриваются случаи когда концы отрезков совпадают	3
В1. Выполнена корректная алгебраическая оценка отношений рассмотренных периметров, показано, что это приводит к противоречию в предположении от противного	6
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

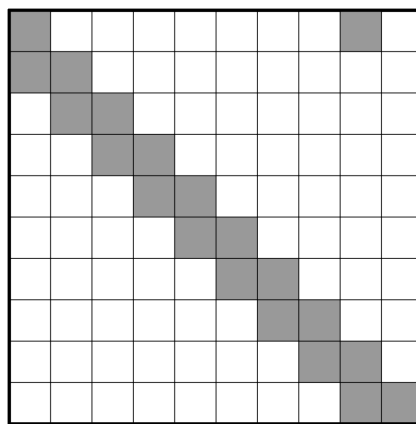
Баллы за критерии с разными литерами суммируются. Баллы за критерии с одной литерой не суммируются.

11.6. В каждой клетке таблицы 2026×2026 записано натуральное число от 1 до 2026, причем в каждом столбце числа не повторяются, а также в каждой строке числа не повторяются. Все клетки таблицы закрыты карточками. Разрешается один раз выбрать несколько карточек, а затем одновременно убрать их. Какое наименьшее количество карточек нужно убрать, чтобы гарантированно узнать содержимое каждой клетки таблицы? (Г.Ю. Караваев)

Ответ. $2024 \cdot 2026 = 4100624$.

Решение. Пример. Покажем, как открыть $2024 \cdot 2026$ карточек так, чтобы гарантированно восстановить значения каждого из чисел.

Для этого откроем все клетки таблицы, кроме главной диагонали (соединяющей левый верхний и правый нижний углы таблицы), диагонали, расположенной непосредственно под главной и предпоследней клетки верхней строки. На рисунке ниже показан аналогичный пример для таблицы 10×10 ; все клетки, которые надо оставить закрытыми, закрашены серым.



Докажем, что можно для каждой клетки однозначно определить, какое число в ней записано.

Если в строке или в столбце неизвестно значение только одного числа, то оно восстанавливается однозначно как единственное отсутствующее в соответствующей строке или соответствующем столбце.

Исходя из этого можно однозначно восстановить число, стоящее в последней клетке нижней строки, а затем и в предпоследней. В каждой из первых 2025 строк и в каждом из 2025 первых столбцов останется незаполненными ровно по 2 клетки, причем в силу их расположения, если узнать значение в любой из этих клеток, можно будет однозначно восстановить все числа в таблице.

Предположим, что однозначно восстановить числа все же нельзя. Тогда невозможно восстановить значение ни одной из закрытых клеток, находящихся не в последней строке. Заметим, что каждая такая клетка находится на пересечении строки, в которой не хватает всего двух чисел, а также столбца, в котором не хватает всего двух чисел. Если пары недостающих чисел для какой-то клетки различны, то число в данной клетке определяется однозначно как единственное число, присутствующее в обеих парах. Значит, для каждой закрытой клетки (не из последней строки) в строке, ее содержащей, и в столбце, ее содержащем, не хватает одной и той же пары чисел. Более того, в силу расположения закрытых клеток, это означает, что во всех столбцах, кроме самого правого, и во всех строках, кроме самой нижней, не хватает одной и той же пары чисел. Назовем эти числа a и b . Заметим, что число a в каждой из первых 2025 строк окажется в закрытой клетке. Значит, в самом правом столбце число a может находиться только в самой нижней клетке. Но по той же причине и число b может находиться только в самой нижней клетке правого столбца. Приходим к противоречию.

Значит, расположение всех чисел в таблице действительно восстанавливается однозначно, как бы ни располагались числа в таблице.

Оценка. Покажем, что какие бы $2024 \cdot 2026 - 1$ карточек мы ни открыли, найдется такая расстановка чисел в таблице, что ее будет невозможно восстановить однозначно, используя только открытые клетки. Из этого будет следовать, что и при любом меньшем количестве открытых карточек восстановить расположение чисел однозначно не выйдет.

Построим полный двудольный граф с 2026 вершинами в каждой доле. Сопоставим каждой строке вершину из левой доли, каждому столбцу — вершину из правой доли, а каждой клетке — ребро, которое соединяет вершины, соответствующие строке и столбцу, на пересечении которых она находится. Тогда каждому ребру можно сопоставить число, записанное в соответствующей клетке. Если числа в каждой строке таблицы не повторяются и числа в каждом столбце таблицы не повторяются, то в графе это равнозначно тому, что всем 2026 ребрам, входящим в любую вершину, сопоставлены различные числа.

Предположим, что хотя бы $4053 = 2026 \cdot 2 + 1 = 2026^2 - (2024 \cdot 2026 - 1)$ карточек остались закрытыми. Докажем, что в построенном графе существует цикл длины, строго меньшей, чем 4050, состоящий только из ребер, соответствующих закрытым карточкам.

Рассмотрим подграф построенного графа, состоящий только из ребер, соответствующих закрытым карточкам. В нем 4052 вершины и 4053 ребер, а значит, в нем точно найдется цикл. Если длина этого цикла строго меньше 4050, то мы нашли искомым цикл.

Рассмотрим случай, в котором длина найденного цикла не меньше 4050. Такой цикл проходит через хотя бы 4050 вершин, степень каждой из которых не меньше 2. С другой стороны, ребер всего 4053, поэтому сумма степеней всех вершин равна 8106, откуда не более, чем $8106 - 4050 \cdot 2 = 6$ вершин в подграфе могут иметь степень, превышающую 2. Из этого следует, что среди вершин цикла найдется не менее $\frac{4050 - 6}{6} = 674$ подряд идущих вершин, каждая из которых имеет степень 2. Иными словами, все эти вершины смежны только с ребрами цикла. Удалим из подграфа какие-нибудь 4 таких вершины и все смежные с ними ребра (их, как показано выше, будет 5). В графе останется 4048 вершин и 4048 ребер, откуда в нем снова найдется цикл, на этот раз, длины не более 4048 (так как вершин всего 4048), что и требовалось.

Назовем найденный цикл *закрытым*. В силу того, что наш граф двудольный, любой цикл в нем имеет четную длину. Каждому второму ребру закрытого цикла сопоставим число 2025, а остальным ребрам сопоставим число 2026. Так как закрытый цикл имеет длину меньше, чем 4052, то рассмотрим произвольный цикл, проходящий через все вершины, не входящие в закрытый цикл (это можно сделать, так как закрытый цикл имеет четную длину, меньшую, чем 4050, а значит, в нем не более 4048 вершин, и оставшихся вершин будет четное число и хотя бы 4), и тоже сопоставим каждому второму его ребру число 2025, а остальным — число 2026. Этот цикл назовем *дополнительным*. Теперь у нас из каждой вершины выходит ровно одно ребро с числом 2025 и ровно одно ребро с числом 2026.

Покажем, что можно сопоставить каждому оставшемуся ребру число от 1 до 2024 так, чтобы из каждой вершины выходило по одному ребру с каждым числом от 1 до 2026. Это будет соответствовать тому, что в исходной таблице числа в каждой строке не повторяются и числа в каждом столбце не повторяются.

Способ 1.

Удалим из полного двудольного графа все ребра с числами 2025 и 2026. Получим двудольный граф, в котором из каждой вершины выходит ровно 2024 ребра. Докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если в двудольном графе с равными долями у всех вершин степени равны $k \geq 1$, то в нем найдется совершенное паросочетание.

Рассмотрим произвольное множество вершин левой доли L . Обозначим множество всех вершин правой доли, с которыми они соединены, за R . Исходя из того, как мы определили наши множества, каждое ребро, выходящее из любой вершины из L , входит в некоторую вершину из R . Сумма степеней вершин из L равна $k|L|$, а значит, из L суммарно выходит $k|L|$ ребер. С другой стороны, в каждую вершину из R входит не более k ребер, откуда $k|R| \geq k|L| \iff |R| \geq |L|$. Тогда по теореме Холла в данном графе найдется паросочетание, которое каждой вершине левой доли сопоставляет некоторую вершину правой доли. Так как

вершин в правой доле столько же, сколько и в левой, паросочетание будет совершенным.

Лемма 2. Если в двудольном графе с равными долями у всех вершин степени равны $k \geq 1$, то можно его ребрам сопоставить числа от 1 до k так, чтобы из каждой вершины выходило по одному ребру с каждым числом от 1 до k .

Доказывать будем по индукции.

База тривиальна. Если в двудольном графе с равными долями каждая вершина имеет степень 1, то если каждому ребру сопоставить число 1, получим требуемое.

Шаг: пусть утверждение верно для $k - 1$. Докажем его для k . Для этого заметим, что по лемме 1 в данном графе найдется совершенное паросочетание. Сопоставим всем ребрам этого паросочетания число k и рассмотрим подграф, содержащий все ребра, кроме данного паросочетания. По предположению индукции, ребрам этого подграфа можно сопоставить числа от 1 до $k - 1$ так, чтобы числа на ребрах, выходящих из каждой вершины, не повторялись. Тогда, совмещая ребра паросочетания и расстановку чисел на ребрах подграфа, полученную по предположению индукции, получим требуемую раскраску всего графа.

Применим лемму 2 к нашему графу, чтобы показать, что искомая раскраска существует. Тем самым мы доказали требуемое.

Способ 2 (набросок).

Доказать данный факт можно и без использования теоремы Холла.

Построим явно подходящую расстановку. Для этого перейдем обратно от графа к таблице и рассмотрим несколько случаев. Также введем координаты в формате (строка, столбец), причем строку пронумеруем начиная с 1 сверху вниз, а столбцы — начиная с 1 слева направо. Для целого m и натурального n обозначим за $m \bmod n$ остаток от деления m на n : целое число r от 0 до $n - 1$ такое, что $m - r$ делится на n .

Положим длину закрытого цикла равной $2n$, тогда длина дополнительного цикла равна $2(2026 - n)$. Положим $k = \max(n, 2026 - n)$ и разделим таблицу на 4 части отрезками, отделяющими строку k от строки $k + 1$ и столбец k от столбца $k + 1$. Левую верхнюю часть таблицы назовем *первой*, правую верхнюю часть — *второй*, левую нижнюю — *третьей*, а правую нижнюю — *четвертой*.

Переставим строки и столбцы так, чтобы в первой и четвертой частях таблицы на главных диагоналях (соединяющих левые верхние углы этих частей и правые нижние углы этих частей) стояло число 2026, а в клетках на диагоналях непосредственно под главными и в правых верхних углах стояло число 2025. Большой из двух циклов окажется при этом в первой части, а меньший — в четвертой.

Разберем несколько случаев.

Случай 1. Длина закрытого цикла равна 2026, $k = 1013$.

Рассмотрим клетку с координатами (a, b) . Если она лежит в первой или четвертой частях, то поставим в нее число $2026 - ((b - a) \bmod 1013)$, а в противном случае поставим в нее число $1013 - ((b - a) \bmod 1013)$. Первая и четвертая части будут представлять из себя латинские квадраты с числами от 1014 до 2026, а вторая и третья — латинские квадраты с числами от 1 до 1013. Из этого следует, что все числа в каждой строке и в каждом столбце окажутся разными.

Случай 2. $k > 1013$ и нечетное.

Начнем заполнять квадрат с четвертой части. В клетку с координатами (a, b) запишем число $2026 - ((b - a) \bmod (2026 - k))$. Тогда 4 часть будет латинским квадратом с числами от $k + 1$ до 2026.

Теперь заполним первую часть. В клетку (a, b) запишем число $2026 - ((b - a) \bmod k)$ только если это число строго больше, чем k , а иначе запишем число $((a + b - 1) \bmod k) + 1$. Тогда в каждой строке и в каждом столбце первой части таблицы обязательно окажутся числа от $k + 1$ до 2026. Также в столбцах и строках, пересекающих первую часть таблицы, будет не хватать только чисел $((a + b - 1) \bmod 2026) + 1$ для каждой клетки с координатами (a, b) , занятой числом от $k + 1$ до 2026.

Рассмотрим вторую часть таблицы. В строке под номером $a \leq k$ числа от $k + 1$ до 2026 занимают клетки с координатами $(a, ((a - (2026 - k) + r - 1) \bmod k) + 1) = (a, ((a - 2027 +$

$r) \bmod k) + 1)$, где r принимает значения от 1 до $2026 - k$. Значения в этих клетках равны $((a + ((a - 2027 + r) \bmod k) + 1 - 1) \bmod k) + 1 = ((2a + r - 2027) \bmod k) + 1$.

Используем это при заполнении второй части. Впишем в клетку с координатами (a, b) число $((2a + (b - k) - 2027) \bmod k) + 1 = ((2a + b - 2027) \bmod k) + 1$. Легко видеть, что во всех строках с номерами не больше k теперь стоят все числа. Осталось лишь показать, что в столбцах с $k + 1$ по 2026 числа не повторяются. Все числа от $k + 1$ до 2026 уже стоят в 4 части. Для этого заметим, что для любого фиксированного b и числа a , пробегающего все значения от 1 до k , числа $((2a + b - 2027) \bmod k) + 1$ также принимают все значения от 1 до k в силу того, что k нечетное, и следовательно, взаимно простое с 2.

Аналогичным образом заполним третью часть: в клетку с координатами (a, b) запишем число $((a + 2b - 2) \bmod k) + 1$. Уникальность чисел в каждой строке и в каждом столбце доказывается аналогично второй части.

Случай 3. k четное.

Если мы заполним таблицу точно так же, как и в случае 3, то в строках с номерами от 1 до k и в столбцах с номерами от 1 до k числа тоже не будут повторяться, а вот в остальных столбцах и строках возникнет проблема. В каждом столбце второй части таблицы и в каждой строке третьей части таблицы окажутся все числа одной и той же четности, каждое — по одному разу, причем четности строк и столбцов чередуются.

Для того чтобы решить эту проблему, разрежем вторую часть горизонтальным отрезком пополам. Нижнюю половину разрежем на горизонтальные доминошки и внутри каждой доминошки поменяем числа местами. Аналогично, разрежем третью часть на две равные части вертикальным разрезом, правую часть разрежем на доминошки и внутри каждой доминошки поменяем числа местами. Заметим, что в первых k строках и столбцах поменялся только порядок чисел, а значит, числа в них по-прежнему не повторяются, а в остальных строках появились недостающие числа и исчезли лишние. Значит, теперь все числа расставлены правильно.

Ниже для наглядности приведены примеры заполнения таблицы 10×10 для каждого из вышеперечисленных случаев (на ребрах закрытого и дополнительного циклов стоят числа 9 и 10, во всех формулах 2026 тоже заменено на 10).

Случай 1

10	6	7	8	9	5	1	2	3	4
9	10	6	7	8	4	5	1	2	3
8	9	10	6	7	3	4	5	1	2
7	8	9	10	6	2	3	4	5	1
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	1	2	3	4	10	6	7	8	9
4	5	1	2	3	9	10	6	7	8
3	4	5	1	2	8	9	10	6	7
2	3	4	5	1	7	8	9	10	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Случай 2

10	3	4	5	6	8	9	7	1	2
9	10	5	6	7	1	8	2	3	4
8	9	10	7	1	2	3	4	5	6
5	8	9	10	2	3	4	6	7	1
6	7	8	9	10	4	5	1	2	3
7	1	2	8	9	10	6	3	4	5
1	2	3	4	8	9	10	5	6	7
2	4	6	1	3	5	7	10	8	9
3	5	7	2	4	6	1	9	10	8
4	6	1	3	5	7	2	8	9	10

Случай 3

10	3	4	7	8	9	5	6	1	2
9	10	5	6	7	8	1	2	3	4
8	9	10	1	2	7	3	4	5	6
7	8	9	10	3	4	6	5	2	1
6	7	8	9	10	5	2	1	4	3
1	2	7	8	9	10	4	3	6	5
2	4	6	3	5	1	10	7	8	9
3	5	1	2	4	6	9	10	7	8
4	6	2	5	1	3	8	9	10	7
5	1	3	4	6	2	7	8	9	10

Вернемся к доказательству основного утверждения.

Итак, мы получили некоторую расстановку чисел на ребрах графа, в которой из каждой вершины выходят ребра, которым сопоставлены попарно различные числа, причем на ребрах закрытого графа стоят только числа 2025 и 2026. Заметим, что если мы заменим на всех ребрах закрытого графа 2025 на 2026, а 2026 — на 2025, то расстановка все еще будет удовлетворять всем правилам, при этом изменения произойдут только под закрытыми карточками.

Это означает, что однозначно восстановить расположение чисел под закрытыми карточками невозможно, что и требовалось.

Критерии. Максимальный балл: 23.

Содержание критерия	Балл
Верное решение	23
П1. Приведен верный алгоритм, показывающий, как узнать содержимое оставшихся клеток таблицы, если открыто $2024 \cdot 2026$ клеток	7
П2. Доказана корректность этого алгоритма	7
О1. Доказана оценка на $2024 \cdot 2026$	15
О2. Присутствует идея перейти к графу строки-столбцы, искать там цикл и заполнить его чередуясь двумя способами, не доведенная до полной оценки	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	0

Баллы за критерии П1, П2 суммируются, и суммируются с баллами за каждый из критериев О1 и О2 (но не более чем до 23). Баллы за критерии О1 и О2 не суммируются. Критерии П1, П2 и О1 неприменимы к решениям, в которых доказывался любой неверный ответ (в том числе 2025^2).