

Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (3 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Найдите количество целых решений неравенства

$$\frac{2\sqrt{x+24} - x - 16}{x^2 - 14x + 45} \geq 0.$$

Если целых решений нет, запишите в ответе 0. Если целых решений бесконечно много, запишите в ответе 9999.

Решение. Разложив на множители знаменатель, получаем

$$\frac{2\sqrt{x+24} - x - 16}{(x-5)(x-9)} \geq 0.$$

Так как

$$2\sqrt{x+24} \geq x+16 \Leftrightarrow \begin{cases} -24 \leq x \leq -16, \\ 4x+96 \geq (x+16)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24 \leq x \leq -16, \\ -20 \leq x \leq -8, \end{cases}$$

то выражение в числителе неотрицательно при $x \in [-24; -8]$, и отрицательно при $x > -8$.

Выражение в знаменателе отрицательно при $5 < x < 9$, и неотрицательно при остальных значениях x .

Поэтому $x \in (5; 9) \cup [-24; -8]$, и целых решений будет $3 + 17 = 20$.

Ответ: 20.

2. Решите уравнение $3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3$.

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $A = [-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}]$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Решение. Уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} 6 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x &= 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x \Leftrightarrow \\ 5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow 5 \operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 1 = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$. Так как $\frac{1}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3}$, то на заданный интервал попадает одна точка: $x = -\frac{3\pi}{4}$. Поэтому ответ: $-\frac{3\pi}{4} \approx -2,356 \dots \approx -2,36$.

Ответ: $-2,36$ (точное значение: $-\frac{3\pi}{4}$).

3. Найдите сумму квадратов всех высот треугольника, если известны два его угла α и β и площадь S . Если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \frac{2\pi}{3}, \quad S = 8. \right)$$

Решение. Проведем высоту h_b на сторону b . Тогда из прямоугольных треугольников найдем $c = \frac{h_b}{\sin \alpha}$, $a = \frac{h_b}{\sin \gamma}$. Так как $S = \frac{ac}{2} \sin \beta$, то отсюда:

$$h_b^2 = \frac{2S \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Аналогично получаются формулы для двух других высот, и тогда:

$$\begin{aligned} h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 &= \frac{2S \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{2S \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta} + \frac{2S \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \\ h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 &= 2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \right). \end{aligned}$$

Ответ: 46.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 88, \\ x^2y + xy^2 = 48. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\frac{y_k}{x_k}$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Решение. Умножим первое уравнение на 6, второе на (-11) и сложим:

$$6x^3 - 11x^2y - 11xy^2 + 18y^3 = 0.$$

Поделив обе части на x^3 и обозначив $t = \frac{y}{x}$, получим:

$$18t^3 - 11t^2 - 11t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)(9t^2 - t - 6) = 0.$$

Отсюда $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{217}}{18}$.

Минимальное значение $\frac{y_k}{x_k}$ равно $\frac{1 - \sqrt{217}}{18} \approx -0,76$.

Ответ: $-0,76$ (точное значение: $\frac{1 - \sqrt{217}}{18}$).

5. Машина проехала участок пути AB со скоростью v_1 , затем вдвое больший участок пути со скоростью v_2 и, наконец, третий участок пути, который в три раза больше AB , со скоростью v_3 . Найдите среднюю скорость автомобиля на всём маршруте. В ответе укажите, на сколько процентов найденная средняя скорость больше скорости v_1 , при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

$$v_1 = 40, v_2 = 50, v_3 = 60.$$

Решение. Пусть длина первого участка равна a , тогда длина второго участка равна $2a$, а третьего $3a$. Время прохождения каждого из участков равно соответственно: $\frac{a}{v_1}$, $\frac{2a}{v_2}$, и $\frac{3a}{v_3}$. Поэтому средняя скорость на всём маршруте равна

$$\frac{a + 2a + 3a}{\frac{a}{v_1} + \frac{2a}{v_2} + \frac{3a}{v_3}} = \frac{6}{\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} + \frac{3}{v_3}} = \frac{6}{\frac{1}{40} + \frac{2}{50} + \frac{3}{60}} = \frac{1200}{23}.$$

Эта скорость больше, чем $v_1 = 40$, на $\left(\frac{1200}{23 \cdot 40} - 1\right) \cdot 100 = \frac{700}{23} \approx 30,43\%$.

Ответ: 30,43.

6. Найдите все целые значения a , не превосходящие по абсолютной величине 15, при каждом из которых неравенство

$$2ax + 3a^2 - 24a + 48 > a^2 \cdot \sqrt{x-1}$$

выполняется при всех x из промежутка $[5; 10]$. В ответе укажите сумму всех таких a .

Решение. Обозначим $t = \sqrt{x-1}$. Тогда получаем, что неравенство

$$f(t) \equiv 2at^2 - a^2t + 3a^2 - 22a + 48 > 0$$

должно выполняться при всех $t \in [2; 3]$.

Необходимое условие для этого $f(2) > 0$, $f(3) > 0$, откуда получаем:

$$f(2) = 8a - 2a^2 + 3a^2 - 22a + 48 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 6) \cup (8; +\infty);$$

$$f(3) = 18a - 3a^2 + 3a^2 - 22a + 48 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 12).$$

Таким образом, $a \in (-\infty; 6) \cup (8; 12)$. Выясним, является ли это условие достаточным.

Значения $a \in (-\infty; 0]$ подходят, так как тогда функция $f(t)$ либо линейная, либо выпукла вверх и поэтому положительна на всём интервале $t \in [2; 3]$.

При $a \in (0; 6) \cup (8; 12)$ имеем параболу с ветвями, направленными вверх. Абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$. Дискриминант равен

$$a^4 - 24a^3 + 176a^2 - 384a = a(a-4)(a-8)(a-12).$$

Если $a \in (8; 12)$, то дискриминант отрицателен, и функция положительна.

Если же $a \in (0; 6)$, то вершина параболы левее интервала $t \in [2; 3]$. Это гарантирует положительность функции на этом интервале.

Таким образом, все значения $a \in (-\infty; 6) \cup (8; 12)$ удовлетворяют условию. Условию $|a| \leq 15$ удовлетворяют $a \in [-15; 6) \cup (8; 12)$.

Сумма целых значений: $-15 - 14 - 13 - 12 - 8 - 7 - 6 = -75$.

Ответ: -75 .

Отборочный этап.

Набор творческих задач.

I. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2021^{2023} + 0, 3)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Решение. Понятно, что 2021^{2023} — нечётное, поэтому $2021^{2023} = 2k + 1$. Следовательно,

$$10 \arcsin(\sin((2021^{2023} + 0, 3)\pi)) = 10 \arcsin(\sin(1, 3\pi)) = 10(-0, 3\pi) = -3\pi \in (-10; -9).$$

Так как, по определению, целая часть числа x есть наибольшее целое, не превышающее x , то $[-3\pi] = -10$.

Ответ: -10 .

□

1.1. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2021^{2023} + 0, 3)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -10 .

1.2. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2023^{2021} + 0, 4)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -13 .

1.3. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2021^{2022} + 0, 2)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -7 .

1.4. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2023^{2022} + 0, 1)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -4 .

1.5. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2022^{2021} + 1, 3)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -10 .

1.6. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2022^{2023} + 1, 4)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -13 .

1.7. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2020^{2021} + 1, 2)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -7 .

1.8. Найдите значение выражения

$$\left[10 \arcsin(\sin((2020^{2023} + 1, 1)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -4 .

1.9. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2021^{2023} - 0, 3)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -10 .

1.10. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2023^{2021} - 0, 4)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -13 .

1.11. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2021^{2022} - 0, 2)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -7 .

1.12. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2023^{2022} - 0, 1)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -4 .

1.13. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2022^{2021} + 0, 7)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -10 .

1.14. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2022^{2023} + 0, 6)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -13 .

1.15. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2020^{2021} + 0, 8)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -7 .

1.16. Найдите значение выражения

$$\left[10 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}((2020^{2023} + 0, 9)\pi))\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: -4 .

II. Высота треугольника равна 10. Какие значения может принимать его площадь, если тангенсы всех трёх углов треугольника выражаются целыми числами?

В случае нескольких значений площади укажите в ответе их сумму (если она конечна), или число 999999 (если сумма бесконечна). В случае невозможности ситуации укажите в ответе 0. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 183,33.

Решение. Обозначим углы треугольника $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда $\alpha \leq 60^\circ$. Значит, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, то есть $\alpha = 45^\circ$. Тогда $\beta + \gamma = 135^\circ$.

Отсюда $\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = -1$, то есть $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = -1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \Leftrightarrow$
 $\operatorname{tg} \gamma \neq 1$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma + 1}{\operatorname{tg} \gamma - 1} = 1 + \frac{2}{\operatorname{tg} \gamma - 1}$.

Значит, $(\operatorname{tg} \gamma - 1)$ принимает одно из значений: $\pm 1, \pm 2$.

В результате получаются целые решения: $\operatorname{tg} \gamma = 3$, $\operatorname{tg} \beta = 2$, и треугольник имеет углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = \operatorname{arctg} 2$, $\gamma = \operatorname{arctg} 3$.

В зависимости от того, к какой стороне проведена известная высота $h = 10$, данная сторона равна или $h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \frac{3}{2}h$, или $h(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \frac{5}{6}h$, или $h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) = \frac{4}{3}h$. Поэтому площадь треугольника может быть равна или $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}h \cdot h = \frac{3}{4}h^2$, или $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}h \cdot h = \frac{5}{12}h^2$, или $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}h \cdot h = \frac{2}{3}h^2$. Сумма возможных значений площади равна $\frac{11}{6}h^2$.

При $h = 10$ ответ: $\frac{1100}{6} = \frac{550}{3} \approx 183,33$.

Варианты:

2.1. $h = 10$. Ответ: 183.33.

2.2. $h = 5$. Ответ: 45.83.

2.3. $h = 2$. Ответ: 7.33.

2.4. $h = 4$. Ответ: 29.33.

2.5. $h = 7$. Ответ: 89.83.

2.6. $h = 8$. Ответ: 117.33.

2.7. $h = 11$. Ответ: 221.83.

2.8. $h = 13$. Ответ: 309.83.

2.9. $h = 14$. Ответ: 359.33.

III. Коридор имеет ширину 3 и длину n . Имеется паркетная плитка двух размеров: 1×2 и 2×2 . Найдите количество способов уложить паркет на пол в этом коридоре. В ответе укажите две последние цифры найденного числа (например, если получено число 1234567, то в ответе следует указать 67).

Решение. Пусть $f(n)$ — количество вариантов укладки для коридора размера $3 \times n$, а $g(n)$ — количество вариантов укладки полосы размера $3 \times n$, у которой вырезана одна угловая клетка. Тогда:

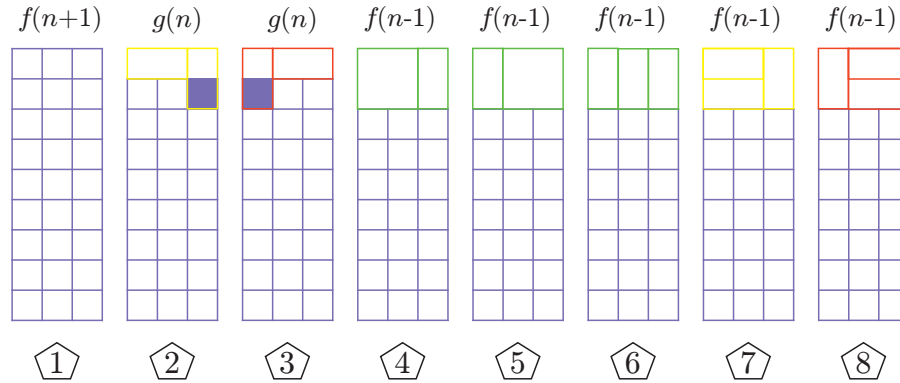


Рис. 1:

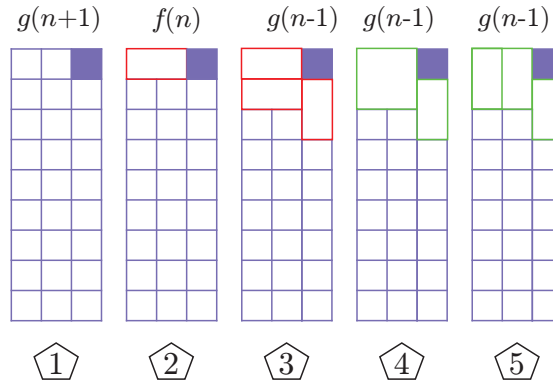


Рис. 2:

$$f(n+1) = 2g(n) + 3f(n-1) \quad (1)$$

$$g(n+1) = f(n) + 2g(n-1). \quad (2)$$

Соотношение (1) получено с учётом того (см. рис. 1), что варианты укладки, изображенные столбиком под номером 7, содержатся в вариантах укладки, изображённых столбиком 2, а варианты укладки, изображенные столбиком под номером 8, содержатся в вариантах укладки, изображённых столбиком 3.

Соотношение (2) получено с учётом того (см. рис. 2), что варианты укладки, изображенные столбиком под номером 3, содержатся в вариантах укладки, изображённых столбиком 2.

Из уравнения (1) следует, что

$$f(n+2) = 2g(n+1) + 3f(n) \quad (3)$$

$$f(n) = 2g(n-1) + 3f(n-2). \quad (4)$$

Если к уравнению (3) прибавить удвоенное уравнение (2) и вычесть удвоенное уравнение (4), то получим, что

$$f(n+2) = 7f(n) - 6f(n-2). \quad (5)$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде $f(n) = a \cdot x^n + b$ (где a и b — константы). Тогда рекуррентное соотношение $f(n+2) = 7f(n) - 6f(n-2)$ можно записать в виде $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$, откуда $x^2 = 1$ или $x^2 = 6$.

Таким образом $f(n) = a6^{n/2} + b$, где a и b — неопределенные константы. Учитывая начальные условия $f(0) = 1^1$, $f(2) = 5$, находим $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}$. Следовательно для четных n получили соотно-

¹Здесь мы использовали $f(0) = 1$, так как несуществующий коридор можно уложить только единственным способом — никаким.

шение $f(n) = \frac{4 \cdot 6^{n/2} + 1}{5}$. Других решений нет, так как эта формула верно задает $f(0)$ и $f(2)$, а по двум начальным условиям решение рекуррентного соотношения задаётся однозначно.

Для всех нечетных n получаем $f(n) = 0$ ($f(1) = 0$, $f(3) = 0$, откуда по рекуррентному соотношению получаем тождественный нуль). То, что $f(n) = 0$ для нечетных n , можно показать и без рекуррентных соотношений. В этом случае площадь коридора нечетна, а плитками можно покрыть только четную площадь.

Определим две последние цифры числа $f(n) = \frac{4 \cdot 6^{n/2} + 1}{5}$. Пусть $n = 2s$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{4 \cdot 6^s + 1}{5} &= \frac{4(1+5)^s + 1}{5} = \frac{1}{5} \left(4(1+5s + \frac{s(s-1)}{2} \cdot 5^2) + 1 \right) \pmod{100} = \\ &= 1 + 4s + s(s-1)10 \pmod{100} = 10s^2 - 6s + 1 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Ответ: $10s^2 - 6s + 1 \pmod{100}$, где $n = 2s$.

Варианты:

- 3.1.** $n = 2022$. Ответ: 45.
- 3.2.** $n = 2024$. Ответ: 69.
- 3.3.** $n = 2026$. Ответ: 13.
- 3.4.** $n = 2028$. Ответ: 77.
- 3.5.** $n = 2030$. Ответ: 61.
- 3.6.** $n = 2032$. Ответ: 65.
- 3.7.** $n = 2034$. Ответ: 89.
- 3.8.** $n = 2036$. Ответ: 33.
- 3.9.** $n = 2038$. Ответ: 97.
- 3.10.** $n = 2040$. Ответ: 81.
- 3.11.** $n = 2042$. Ответ: 85.
- 3.12.** $n = 2046$. Ответ: 53.
- 3.13.** $n = 2048$. Ответ: 17.
- 3.14.** $n = 2054$. Ответ: 29.
- 3.15.** $n = 2056$. Ответ: 73.
- 3.16.** $n = 2058$. Ответ: 37.
- 3.17.** $n = 2060$. Ответ: 21.
- 3.18.** $n = 2062$. Ответ: 25.
- 3.19.** $n = 2064$. Ответ: 49.
- 3.20.** $n = 2066$. Ответ: 93.
- 3.21.** $n = 2068$. Ответ: 57.
- 3.22.** $n = 2070$. Ответ: 41.
- 3.23.** $n = 2072$. Ответ: 45.
- 3.24.** $n = 2074$. Ответ: 69.
- 3.25.** $n = 2076$. Ответ: 13.
- 3.26.** $n = 2078$. Ответ: 77.
- 3.27.** $n = 2080$. Ответ: 61.
- 3.28.** $n = 2082$. Ответ: 65.
- 3.29.** $n = 2084$. Ответ: 89.
- 3.30.** $n = 2086$. Ответ: 33.