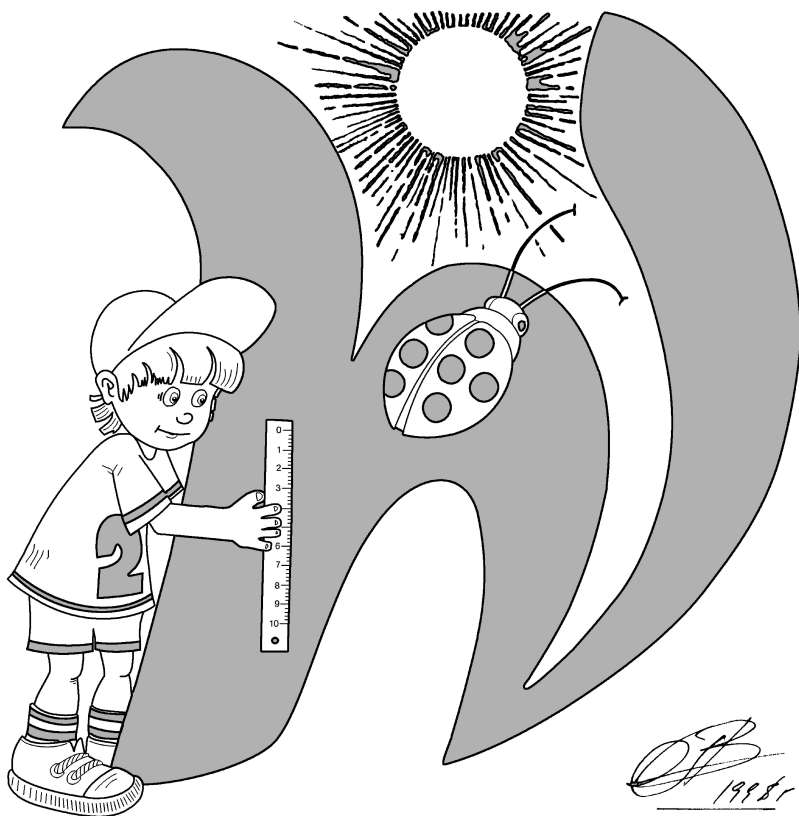


Министерство просвещения Российской Федерации
Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур

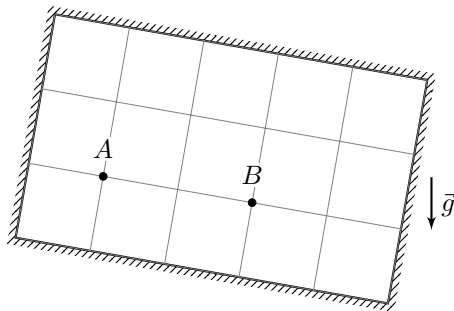


Москва, 2026 г.

9 класс

Задача №1. Игра в шайбу

В вертикальной плоскости расположена прямоугольная рамка с жёсткими стенками. Точки A и B находятся внутри рамки так, как показано на рисунке: все расстояния до стенок, а также взаимное расположение точек следует принимать согласно масштабу рисунка. Перед началом опыта всю конструкцию (рамку вместе с точками A и B) можно повернуть в пределах одной вертикальной плоскости. После поворота рамки маленькую гладкую шайбу помещают в точку A и отпускают без начальной скорости.



Найдите все возможные ориентации рамки, при которых шайба после одного удара попадёт из точки A в точку B , и для каждой из них определите угол между отрезком AB и ускорением свободного падения.

Отражение шайбы от стенок рамки считайте абсолютно упругим: угол падения равен углу отражения, скорость не изменяется по модулю.

Задача №2. Нелинейная лента

На рисунке 1 изображена система, состоящая из двух пружин и упругой ленты. Обе пружины с коэффициентом жёсткости $k = 100$ Н/м подчиняются закону Гука. График зависимости силы упругости от удлинения ленты изображён на рисунке 2. В недеформированном состоянии общая длина первой пружины и ленты равна длине второй пружины. К планке на правом конце системы прикладывают внешнюю силу F так, чтобы планка постоянно оставалась параллельной стене.

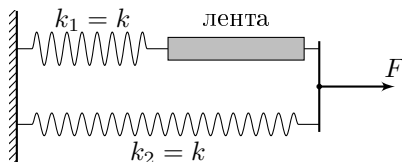


Рис. 1

1. Найдите удлинения пружин Δx_1 , Δx_2 и упругой ленты Δx для двух значений внешней силы: $F = 1,0$ Н и $F = 20$ Н.

2. С какой максимальной внешней силой $F_{\max}$ можно растягивать систему, если лента рвётся при удлинении $\Delta x_{\max} = 25$ см?

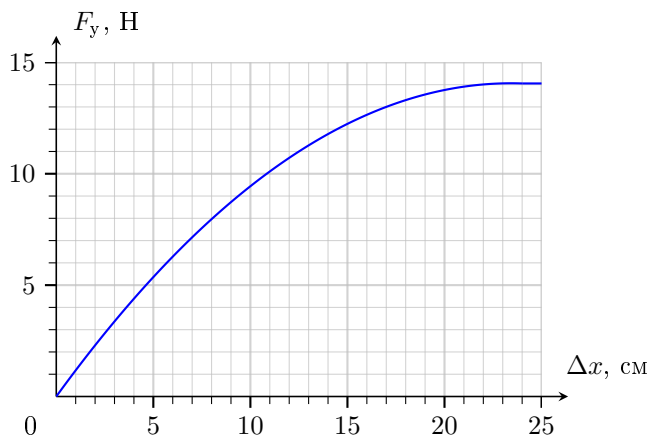
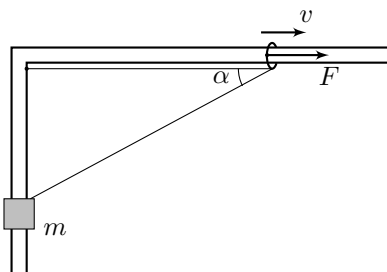


Рис. 2

Задача №3. Тянем-потянем

Гладкий тонкий стержень согнут под прямым углом и зафиксирован в горизонтальной плоскости. По одной его стороне может перемещаться небольшая втулка массой m , по другой — лёгкое маленькое колечко. К вершине прямого угла прикреплен один конец невесомой нерастяжимой нити длиной l . Нить продета через кольцо, и другой конец нити привязан к втулке. α — это угол между направлением от кольца к вершине прямого угла и направлением от кольца к втулке (см. рисунок). Колечко перемещают из вершины прямого угла с постоянной скоростью v . Трение отсутствует. В процессе всего движения нить натянута.

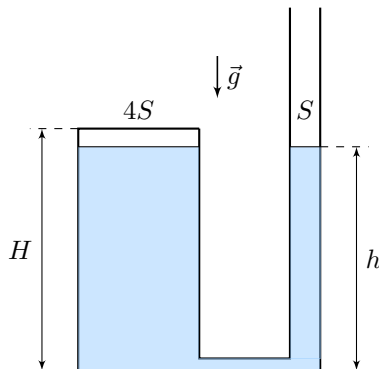


1. Определите скорость движения втулки в начальный момент времени, когда колечко движется вблизи вершины прямого угла.
2. Как зависит скорость движения втулки от угла α ?

3. Чтобы колечко двигалось с постоянной скоростью v , к нему прикладывают силу F , направленную вдоль стержня. Как зависит сила F от угла α ?

Задача №4. Нагрев жидкости

Два вертикальных цилиндрических сосуда соединены внизу тонкой трубкой, обеспечивающей свободное перетекание жидкости. Площади поперечных сечений сосудов равны $4S$ и S (см. рисунок). Сосуд большего сечения имеет высоту H и сверху герметично закрыт горизонтальной жёсткой крышкой, сосуд меньшего сечения значительно выше и открыт сверху. Снаружи вакуум. Сосуды заполняют экспериментальной жидкостью до высоты $h = 0,95H$ при температуре t_0 . Известно, что при изменении температуры этой жидкости в интервале от t_0 до $2t_0$, её плотность линейно уменьшается с температурой от значения ρ_0 до значения $0,5\rho_0$. Температуру жидкости в сосуде большего сечения медленно повышают от t_0 до $2t_0$. После нагрева и установления равновесия в системе найдите:

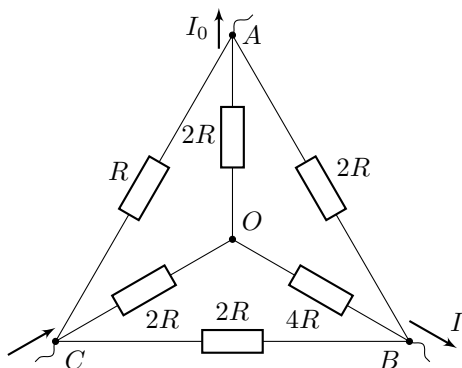


1. давление жидкости на дне сосудов;
2. давление жидкости на крышку в сосуде большего сечения;
3. температуру жидкости в сосуде меньшего сечения.

Давлением насыщенных паров жидкости, теплоёмкостью сосудов, а также теплообменом с окружающей средой и через трубку, соединяющую сосуды, пренебречь. Ускорение свободного падения равно g . Удельную теплоёмкость жидкости считайте постоянной.

Задача №5. Звезда и треугольник

Фрагмент электрической цепи состоит из шести резисторов, соединённых так, как показано на рисунке. Из узла A всегда вытекает ток постоянной силы I_0 . Из узла B вытекает ток силой I , которую можно регулировать как по модулю, так и по направлению (при $I > 0$ его направление совпадает с изображённым). Эту силу тока будем называть регулируемой. Втекающий в третий узел C ток определяется из закона сохранения электрического заряда.

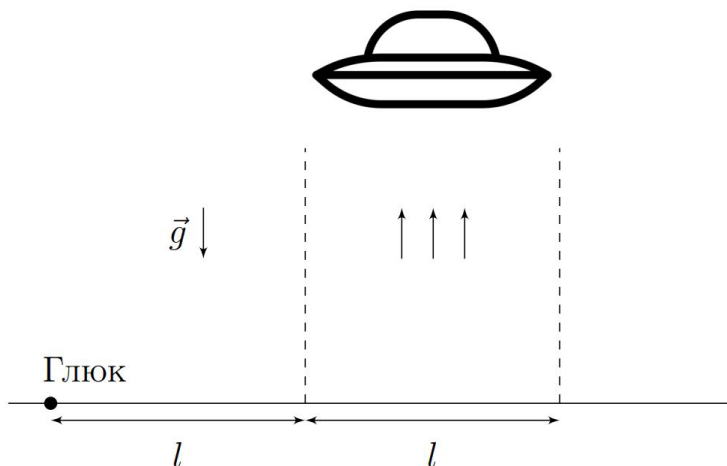


1. Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{верх}}$ через резистор $2R$ между узлами A и O , если регулируемый ток увеличить на ΔI . Ответ выразите через ΔI .
2. Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{нижн}}$ через резистор $2R$ между узлами B и C , если регулируемый ток увеличить на ΔI . Ответ выразите через ΔI .
3. При каком значении регулируемой силы тока $I' > 0$ ток в одном из резисторов становится равным нулю? Укажите этот резистор. Ответ выразите через I_0 .
4. При каком значении регулируемой силы тока I^* суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, будет минимальна? Чему равна эта минимальная мощность $P_{\min}$? Ответы выразите через I_0 и R .

10 класс

Задача №1. Опять 45?

В фантастических фильмах иногда показывают, как НЛО захватывает тела на земле с помощью «притягивающего луча» (англ. «tractor beam»). Предположим, он устроен таким образом, что в небольшой вертикальной области пространства на любое произвольное тело массой m со стороны него действует сила $\vec{F}_{\text{тб}} = -2m\vec{g}$, направленная противоположно силе тяжести и вдвое превосходящая её по модулю (сила тяжести действовать, конечно, не перестаёт). Экспериментатору Глюку приснилось, что он оказался на расстоянии l от такой области, ширина которой тоже l (см. рисунок).

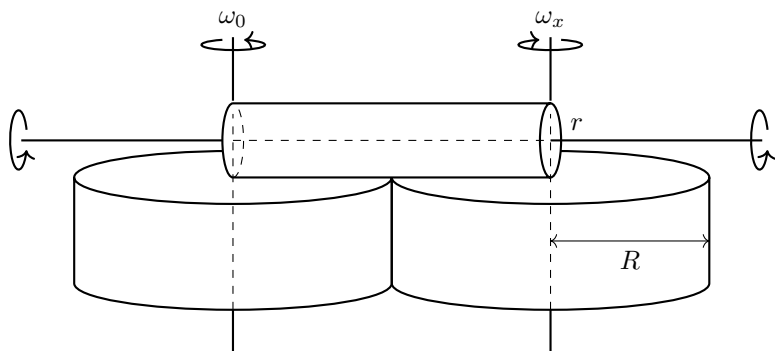


1. С какой минимальной скоростью v_{m1} Глюк должен бросить камень с поверхности земли, чтобы он достиг притягивающего луча?
2. С какой минимальной скоростью v_{m2} Глюк должен бросить камень, чтобы он пролетел область, ограниченную лучом, насквозь?
3. Какова максимальная дальность броска L_{m2} , если начальная скорость камня равна $v_0 (v_0 \geq v_{m2})$?
4. Найдите максимальную дальность броска L_{m3} в случае $v_0 = v_{m2}$.

Считайте, что камень не отскакивает от земли, а НЛО находится так высоко, что камень ни при каких условиях не может в него попасть. Поверхность земли горизонтальна. Ускорение свободного падения g .

Задача №2. Раскрутка трением

Два одинаковых диска с радиусами R насажены на параллельные вертикальные оси, на которых они могут вращаться без трения. Расстояние между осями чуть больше $2R$, так что между боковыми поверхностями дисков остаётся небольшой зазор. Верхние основания дисков лежат в одной горизонтальной плоскости. Цилиндрический валик радиуса r , длины $2R$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, плоскость которой лежит в одной плоскости с осями дисков. Сам валик располагается между осями дисков и прижимается к верхним основаниям дисков с одинаковыми силами. Линия касания валика и дисков совпадает с радиусами дисков. Один из дисков вращается с помощью электродвигателя с постоянной угловой скоростью ω_0 и приводит во вращение из-за трения между соприкасающимися поверхностями валик, который в свою очередь раскручивает второй диск.



1. Определите установившуюся скорость вращения ω_x второго диска.

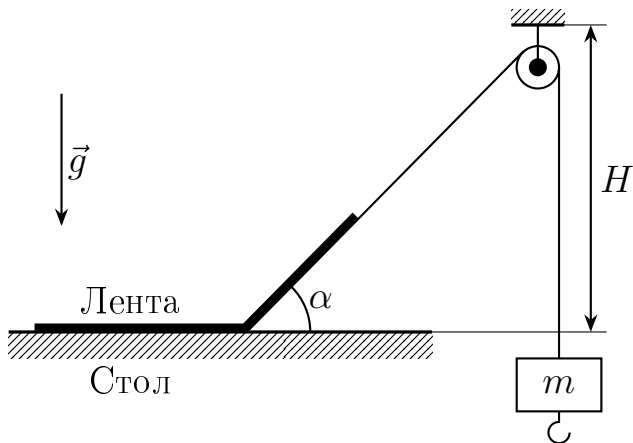
Примечание. При вращении твёрдого тела с постоянной угловой скоростью сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю.

Задача №3. Клейкая лента

Длинная клейкая лента шириной $d = 2$ см приклеена к горизонтальной поверхности стола. Известно, что для того, чтобы оторвать единицу площади такой ленты от стола, нужно совершить работу $\sigma = 10$ Дж/м² (считайте, что эта величина не зависит от угла, под которым тянут ленту). Лента является невесомой и нерастяжимой.

1. Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?
2. Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити

и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45^\circ$. К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?

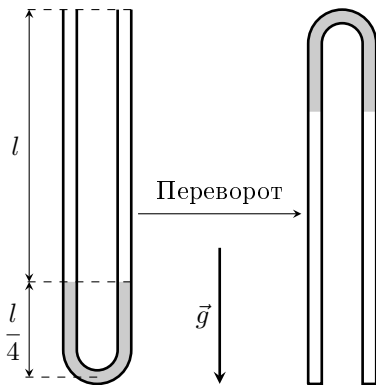


3. К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30^\circ$ к горизонту. Найдите массу второго груза M , расстояние Δh , на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2 .

Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Задача №4. Трубка со ртутью

В U-образную трубку, расположенную вертикально открытыми концами вверх, залили ртуть, после чего концы трубки запаяли. Радиус закругления внизу трубки и внутренний диаметр трубки много меньше длины прямых участков. Длина столбиков воздуха в исходном положении составляла $l = 625$ мм, длина столбиков ртути справа и слева от места изгиба трубки равнялась $l_2 = l/4$ (см. рисунок). Трубку повернули вокруг горизонтальной оси на 180° . Через некоторое время ртуть заняла устойчивое положение равновесия.



1. На какое расстояние h_0 сместятся концы столбика ртути после переворота, если в конечном состоянии температура не изменится и будет равна T_0 ?
 2. На какое расстояние h_1 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_1 = 0,8T_0$?
 3. На какое расстояние h_2 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_2 = 0,7T_0$?
 4. Докажите устойчивость положения равновесия, найденного в п.3.
- Капиллярными эффектами и колебаниями столбика ртути можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно g . Атмосферное давление во время эксперимента $P_A = 750$ мм.рт.ст.

Задача №5. Термистор

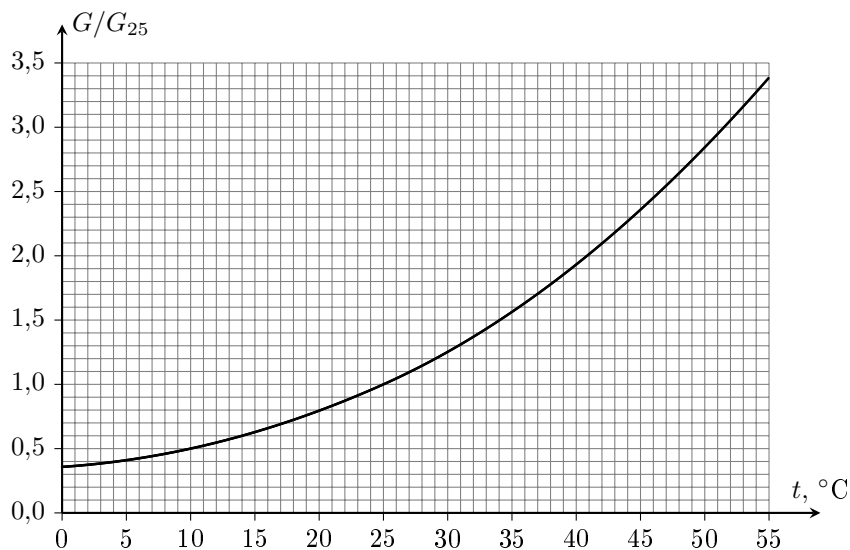
Для измерения температуры используется термистор — элемент, проводимость G которого сильно зависит от его температуры. На графике этой зависимости, представленном на отдельном листе, G_{25} — проводимость термистора при 25°C . Термистор подключается последовательно к источнику постоянного напряжения и амперметру, показания которого встроенный компьютер переводит в числовое значение температуры, выводимое на экран. Известно, что при номинальном напряжении источника экран показывает **верное** значение **температуры термистора**. Экспериментатор Глюк решил поэкспериментировать с этим прибором в собственной лаборатории. Оказалось, что при реальном значении температуры воздуха 27°C и поданном на термистор номинальном напряжении экран показывает 29°C . При ответе на вопросы 1 и 2 считайте, что напряжение на термисторе равно номинальному.

1. При какой температуре воздуха t_1 экран прибора показал бы значение, превышающее t_1 на 1°C ?
2. Какое значение показал бы экран прибора при температуре воздуха $38,5^\circ\text{C}$?
3. Продолжая эксперименты, Глюк увеличил напряжение источника, сделав его вдвое больше номинального. Какое значение температуры покажет экран в этом случае, если Глюк не менял настройки компьютера, а температура воздуха в лаборатории равна 24°C ?

Амперметр можно считать идеальным. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Термистор во всех экспериментах находится в воздухе, не контактируя с другими предметами, а все измерения проводятся в установившемся режиме.

Примечание:

1. Проводимостью элемента электрической цепи называется физическая величина, равная отношению силы тока, текущего через данный элемент, к напряжению на этом элементе.



2. На отдельном листе приведены два одинаковых экземпляра графика зависимости проводимости термистора от его температуры. При сдаче работы этот лист вкладывается в решение участника.

11 класс

Задача №1. По окружности и побыстрее

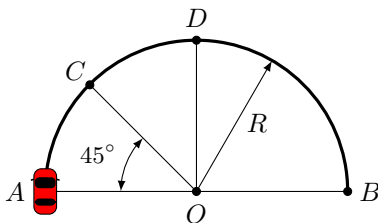
Автомобилист проезжает полуокружность AB радиусом $R = 80$ м так, чтобы, стартовав из положения покоя, добраться до ее конца как можно быстрее. Поверхность дороги горизонтальна, автомобиль — небольшой по размеру, с мощным двигателем и четырьмя ведущими колесами. Общий коэффициент трения всех колес о дорогу можно считать постоянным и равным $\mu = 0,5$. Ускорение свободного падения примите равным $g \approx 10$ м/с².

1. До какой максимальной скорости может разогнаться автомобиль на этой дороге?

2. Определите скорость автомобиля при прохождении точек C , D и B во время заезда (см. рисунок).

3. Найдите общее время прохождения полуокружности AB .

Указание: считайте известной константой $\beta \equiv \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx 1,311$.

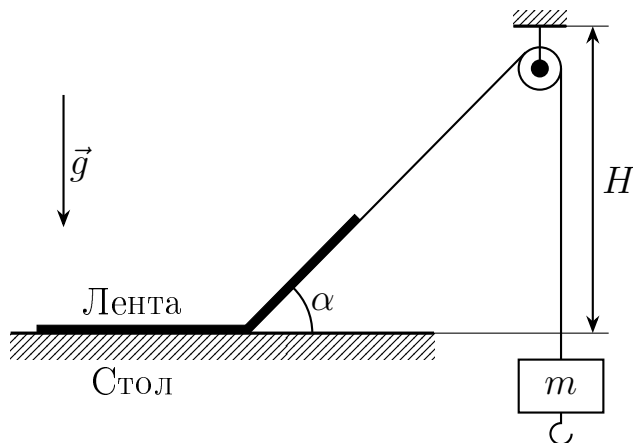


Задача №2. Клейкая лента

Длинная клейкая лента шириной $d = 2$ см приклеена к горизонтальной поверхности стола. Известно, что для того, чтобы оторвать единицу площади такой ленты от стола, нужно совершить работу $\sigma = 10$ Дж/м² (считайте, что эта величина не зависит от угла, под которым тянут ленту). Лента является невесомой и нерастяжимой.

1. Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?

2. Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45^\circ$. К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?



3. К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30^\circ$ к горизонту. Найдите массу второго груза M , расстояние Δh , на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2 .

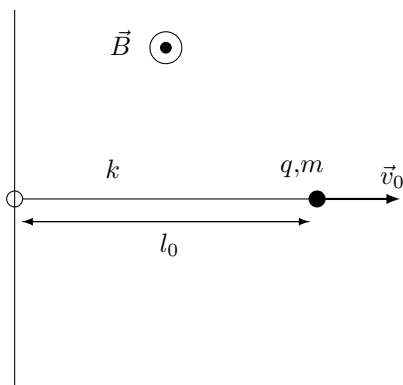
Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Задача №3. Быстрые поршни

Два одинаковых вертикальных тонкостенных цилиндрических сосуда внутреннего радиуса r , в которых под поршнями находятся равные количества идеального газа, поставили в комнату с температурой воздуха T_0 . В одном сосуде газ имеет температуру $T_X < T_0$, а в другом — температуру $T_\Gamma > T_0$. Поршень и дно цилиндров теплоизолированные. Мощность тепловых потерь через боковые стенки прямо пропорциональна произведению площади контакта и разности температур содержимого сосуда и окружающей среды: $N = \alpha S \Delta T$, где α — некоторая константа. Атмосферное давление p_0 , поршни легкие. Молярная теплоемкость газа в сосудах при постоянном давлении C_p . Известно, что максимальные скорости, с которыми двигались поршни каждого из цилиндров вплоть до установления в них комнатной температуры равны по модулю ($v_X^{\max} = v_\Gamma^{\max}$). Выразите T_Γ через T_0 и T_X .

Задача №4. Заряд на резинке

На длинную закреплённую гладкую спицу насажено лёгкое маленькое колечко, к которому прикреплен лёгкий резиновый шнур. В нерастянутом состоянии шнура его длина равна l_0 , коэффициент жёсткости равен k . К другому его концу прикреплен точечный положительный заряд q массы m . Система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка. В начальный момент времени расстояние от заряда до спицы равно l_0 , а его скорость направлена перпендикулярно спице от неё и равна v_0 .



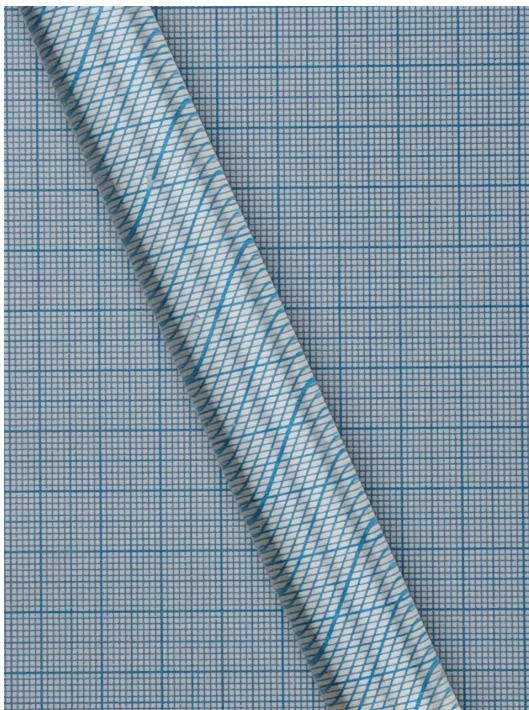
1. Определите траекторию заряда.
2. Определите дрейфовую скорость заряда.

Примечания

- На заряд действуют силы только со стороны шнура и магнитного поля.
- Заданные по условию величины связаны соотношением: $mv_0 < qBl_0$.
- Под дрейфовой скоростью понимается модуль вектора средней скорости за время $T \gg m/qB$.

Задача №5. Цилиндр

У стеклянного цилиндра плоскостью, параллельной его оси, отрезана часть. Цилиндр лежит плоской поверхностью на листе миллиметровой бумаги (см. рис.). Его сфотографировали с большого расстояния камерой, направленной перпендикулярно листу миллиметровки.



1. Определите показатель преломления стекла n .
2. Какая часть радиуса цилиндра отсечена плоскостью?

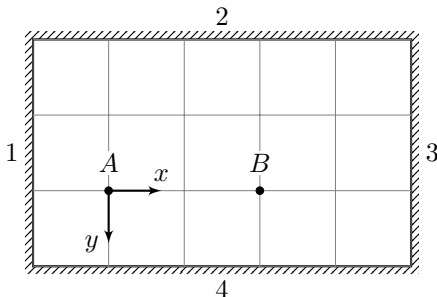
Примечания

- Для итоговых геометрических построений и получения числовых значений расстояний и углов, необходимых для решения задачи, используйте фотографию, выданную на отдельном листе
- Не забудьте сдать этот лист вместе с остальными

Возможные решения

Задача №9-Т1. Игра в шайбу

Пронумеруем стороны рамки и введём координаты x , y с началом в точке A , направив их вдоль и перпендикулярно отрезку AB .



Пусть координаты точки A равны $(0; 0)$, координаты точки B равны $(L; 0)$, а расстояние от точек до стороны — H . Будем искать проекции ускорения свободного падения g_x и g_y .

Рассмотрим движение шайбы из A в B с отскоком от стороны 4. Из уравнения движения по оси y получим, что время падения из точки A до стенки равно $\sqrt{2H/g_y}$. После удара шайба будет лететь столько же по времени до точки B .

Полное время составит:

$$t = 2\sqrt{\frac{2H}{g_y}}.$$

По оси x шайба движется равноускоренно, так как при упругом ударе проекция скорости на ось x не меняется.

$$L = g_x \frac{t^2}{2} = g_x \cdot \frac{4H}{g_y}.$$

Откуда получим:

$$\frac{g_x}{g_y} = \frac{L}{4H}.$$

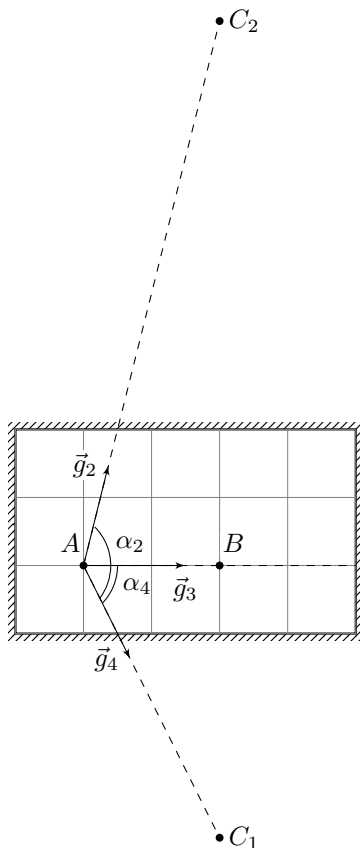
В случае отскока от стенки 4 $L = 2l$ и $H = l$, где l — сторона заданной масштабной сетки. Из полученного отношения проекций ускорений легко найти направление $\vec{g}$. Например, можно отметить точку C_1 с координатами $(2l; 4l)$. Тогда $\vec{g}$ будет направлено вдоль прямой AC_1 и, в частности, первая часть траектории шайбы будет лежать вдоль этой прямой.

Аналогично можно поступить со стороной 2. В этом случае $L = 2l$ и $H = 2l$, тогда ускорение свободного падения будет направлено вдоль отрезка AC_2 , где координаты точки C_2 это $(2l; -8l)$.

После отскока от стороны 1 шайба не сможет попасть в точку B , так как та расположена дальше точки A по оси x . По тем же соображениям отражение от стороны 3 подходит. Соответствующее этому случаю направление ускорения свободного падения будет вдоль оси x .

С помощью найденных в предыдущем пункте координат точек C_1 и C_2 вычислим углы между направлением AB и ускорением свободного падения:

$$\alpha_4 = \arctg 2 \approx 63^\circ, \alpha_2 = \arctg 4 \approx 76^\circ, \alpha_3 = 0^\circ.$$



Задача №9-Т2. Нелинейная лента

Пусть F_1 — сила упругости ленты и первой пружины, а F_2 — сила упругости второй пружины.

Сила F , с которой растягивают данную систему, уравновешивается данными силами F_1 и F_2 :

$$F = F_1 + F_2.$$

Закон Гука для пружин: $F_1 = k\Delta x_1$ и $F_2 = k\Delta x_2$.

Суммарное удлинение первой пружины и ленты равно удлинению второй пружины:

$$\Delta x_1 + \Delta x = \Delta x_2.$$

Из этих уравнений получим:

$$\Delta x = \Delta x(F_1) = \frac{F}{k} - \frac{2}{k}F_1, \quad (1)$$

или

$$F_1(\Delta x) = \frac{F}{2} - \frac{k}{2}\Delta x. \quad (1')$$

При $F_1 < 1$ Н лента ведёт себя как пружина с коэффициентом жёсткости $k_0 \approx 120$ Н/м, который можно определить с помощью коэффициента наклона касательной к начальному участку графика. Следовательно, зависимость удлинения ленты от растягивающей её силы можно выразить как:

$$F_1 = k_0\Delta x. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\Delta x = \frac{F}{k} - \frac{2k_0}{k}\Delta x$$

или

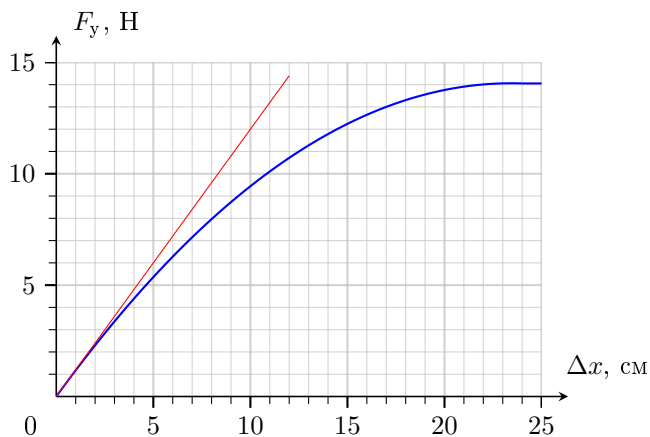
$$\Delta x = \frac{F}{2k_0 + k} \approx 2,9 \text{ мм.}$$

Тогда

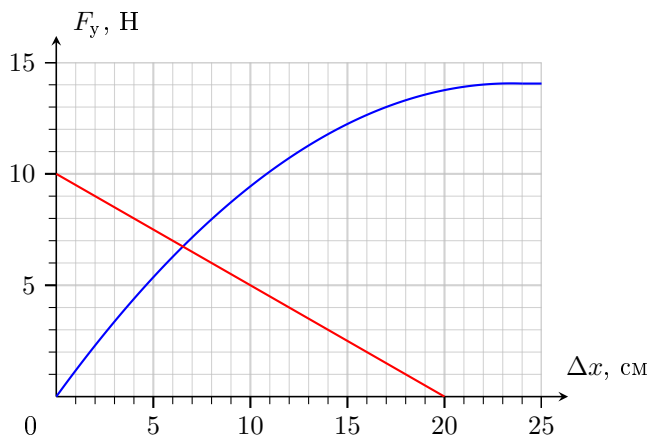
$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{k_0}{k}\Delta x = \frac{k_0 F}{(2k_0 + k)k} \approx 3,5 \text{ мм}$$

и

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 6,4 \text{ мм.}$$



Для нахождения растяжений при $F = 20$ Н построим зависимость (1') (аналог нагрузочной прямой из электричества) на графике из условия.



Пересечение этих прямой и кривой позволяет найти силу упругости ленты $F_1 \approx 6,7$ Н и её удлинение

$$\Delta x \approx 6,5 \text{ см.}$$

Следовательно, удлинение первой пружины

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} \approx 6,7 \text{ см}$$

и удлинение второй пружины

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 13,2 \text{ см.}$$

Угловой коэффициент прямой (1') не зависит от прикладываемой силы.

Проведём прямую с таким угловым коэффициентом через крайнюю точку графика (25 см; 14 Н) либо решим уравнение аналитически, подставив в соответствующие значения

$$F_1 = \frac{F_{\max}}{2} - \frac{k}{2} \Delta x_{\max}.$$

Тогда максимальная сила: $F_{\max} = 53 \text{ Н.}$

Задача №9-Т3. Тянем-потянем

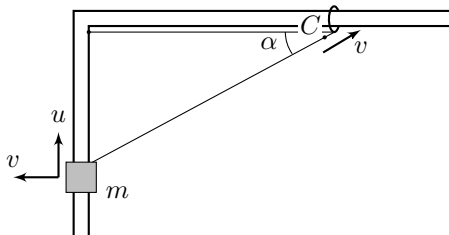
За небольшое время Δt колечко пройдет расстояние $v\Delta t$, оставив позади себя кусочек нити длиной $v\Delta t$. Такой же по длине кусочек нити должен освободиться из-за приближения втулки к колечку. Значит, $u(0)\Delta t = v\Delta t$, и:

$$u(0) = v.$$

Ответ на второй вопрос можно получить разными способами.

Способ 1. Перейдем в систему отсчета, связанную с колечком. В этой СО колечко неподвижно, а у втулки появляется составляющая скорости, перпендикулярная стержню (см. рисунок). При этом относительно точки C , выбранной вблизи колечка, втулка движется по окружности. Проекции скоростей втулки и точки C на направление участка нити между втулкой и кольцом должны компенсировать друг друга так, чтобы длина этого участка оставалась постоянной. Точка C движется со скоростью v , поэтому:

$$v = u \sin \alpha - v \cos \alpha.$$



Способ 2. Пусть расстояния от вершины прямого угла до колечка и до втулки равны соответственно x и y . Тогда запишем полную длину нити следующим образом:

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = l.$$

Возьмём производную по времени:

$$\dot{x} + \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dot{l} = 0;$$

$$\dot{y} = -\frac{\dot{x}}{y}(\sqrt{x^2 + y^2} + x);$$

$$u = \frac{v}{y}(\sqrt{x^2 + y^2} + x).$$

$$u = v \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = v \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Способ 3. Рассмотрим маленький промежуток времени Δt . Колечко прошло расстояние $v\Delta t$, а втулка $u\Delta t$. Проецируя эти перемещения на отрезок, соединяющий колечко с ниткой, получим маленькое изменение длины куска нити между ними:

$$\Delta R = v\Delta t \cos \alpha - u\Delta t \sin \alpha.$$

Кусок нити между вершиной прямого угла и колечком увеличился на $v\Delta t$. Так как полная длина нити не меняется:

$$(v \cos \alpha - u \sin \alpha + v)\Delta t = 0.$$

Откуда:

$$u = v \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Ответ на третий вопрос можно получить разными способами.

Способ 1. Скорость втулки при её движении по окружности относительно точки C равна:

$$v \sin \alpha + u \cos \alpha = v \frac{\sin^2 \alpha + \cos \alpha(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} = v \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Нормальная компонента ускорения:

$$a_n = \frac{v^2(1 + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha \cdot R},$$

где $R = \frac{l}{1 + \cos \alpha}$ — длина участка нити между втулкой и точкой C . Полное ускорение втулки a направлено вдоль стержня, а a_n является его проекцией на нить. Поэтому

$$a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{v^2(1 + \cos \alpha)^3}{\sin^3 \alpha \cdot l}.$$

Способ 2. Воспользуемся полученной в предыдущем пункте связью u и v :

$$u = \frac{v}{y}(\sqrt{x^2 + y^2} + x) = v \frac{l}{y}.$$

Возьмём производную по времени от этого выражения:

$$a = -vl \frac{\dot{y}}{y^2} = \frac{v^2 l^2}{y^3}.$$

Так как нить нерастяжима:

$$l = \frac{y}{\sin \alpha} + \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow y = \frac{l \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Тогда:

$$a = \frac{v^2(1 + \cos \alpha)^3}{\sin^3 \alpha \cdot l}.$$

Далее $ma = T \sin \alpha$, откуда

$$T = m \frac{v^2(1 + \cos \alpha)^3}{\sin^4 \alpha \cdot l}.$$

Сила F , прикладываемая к колечку, равна сумме проекций двух сил натяжения на стержень:

$$F = T + T \cos \alpha = m \frac{v^2(1 + \cos \alpha)^4}{l \sin^4 \alpha}.$$

Задача №9-Т4. Нагрев жидкости

Зависимость плотности от температуры:

$$\rho(t) = \rho_0 - \frac{\rho_0}{2} \cdot \frac{t - t_0}{t_0} = \rho_0 \frac{3t_0 - t}{2t_0}. \quad (1)$$

Начальная масса m_{L0} жидкости в левом сосуде:

$$m_{L0} = 4Sh\rho_0 = 4SH\rho.$$

Следовательно сосуд большего сечения заполнится доверху, когда плотность в нём уменьшится до $\rho = 0,95\rho_0$. Из (1) получаем:

$$\rho = 0,95\rho_0 \Rightarrow 3t_0 - t_1 = 1,9t_0 \Rightarrow t_1 = 1,1t_0.$$

После этого жидкость начинает перетекать из левого (широкого) сосуда в правый. При достижении температуры $t = 2t_0$ масса m_L жидкости в левом сосуде равна:

$$m_L = 4SH \cdot \frac{\rho_0}{2} = 2\rho_0 SH.$$

Полная масса m жидкости изначально:

$$m = (4S + S)h\rho_0 = 5S \cdot 0,95H\rho_0 = 4,75\rho_0SH.$$

Следовательно, масса m_R жидкости в правом сосуде после нагрева:

$$m_R = m - m_L = 2,75\rho_0SH.$$

Тогда давление на дне:

$$p_{\text{дно}} = \frac{m_R g}{S} = 2,75\rho_0 gH.$$

Давление p_K жидкости на крышку в сосуде большего сечения найдём из равенства давлений:

$$p_K = p_{\text{дно}} - 0,5\rho_0 gH = 2,25\rho_0 gH.$$

Поскольку объём левого сосуда фиксирован (при достижении высоты H), уменьшение массы в нём прямо пропорционально уменьшению плотности при нагреве. При нагреве левого сосуда на малую величину Δt плотность уменьшается на $\Delta\rho$, и в правый сосуд перетекает масса:

$$\Delta m = 4SH \Delta\rho, \quad (2)$$

температура которой равна текущей температуре t в левом сосуде.

Способ 1. Можно считать, что нагреватель сообщил количество теплоты массе Δm уже после того, как она переместилась в правый сосуд. Тогда количество теплоты, поступающее в правый сосуд:

$$\Delta Q = c\Delta m (t - t_0) = 4cSH(t - t_0)\Delta\rho,$$

где c — теплоёмкость жидкости.

Если воспользоваться графиком зависимости $\rho(t)$, то можно заметить, что величине ΔQ пропорциональна площадь полоски шириной $\Delta\rho$ и длиной $t - t_0$ (см. рисунок 1), домноженной на $4cSH$.

Полное количество «перенесённой» в правый сосуд теплоты Q пропорционально площади трапеции, показанной на рисунке 2, с домножением на $4cSH$. Тогда:

$$Q = 0,99\rho_0 t_0 cSH.$$

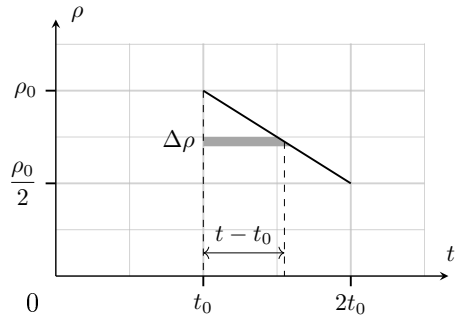


Рис. 1

Эта теплота, распределённая по массе $m_R = 2,75\rho_0 SH$, повысит температуру правого сосуда:

$$t_R = t_0 + \frac{Q}{cm_R} = t_0 + \frac{0,99\rho_0 t_0 c SH}{c \cdot 2,75\rho_0 SH}.$$

Способ 2. Из (1) и (2) получим, что при повышении температуры левого сосуда от $t_1 = 1,1t_0$ до $t_2 = 2t_0$ масса, перетекающая в правый сосуд, увеличивается равномерно с температурой:

$$\Delta m = \frac{2SH}{t_0} \cdot \Delta t.$$

Следовательно, распределение масс по температуре равномерное, и средняя температура приходящих порций жидкости равна среднему арифметическому концов интервала:

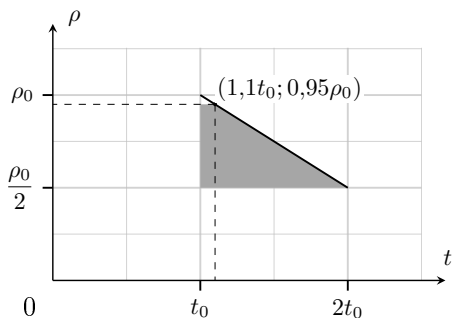


Рис. 2

$$t_{\text{cp}} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1,1t_0 + 2t_0}{2} = 1,55t_0.$$

Уравнение теплового баланса для правого сосуда:

$$m_{R0}c(t_R - t_0) + \Delta mc(t_R - t_{\text{cp}}) = 0,$$

где m_{R0} — начальная масса жидкости в правом сосуде. Отсюда:

$$t_R = \frac{m_{R0}t_0 + \Delta m t_{\text{cp}}}{m_{R0} + \Delta m}.$$

Способ 3. Малая масса, перетекающая при возрастании температуры на dt :

$$dm = -4SH d\rho.$$

Из (1):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho_0}{2t_0} \Rightarrow dm = \frac{2\rho_0 SH}{t_0} dt.$$

Количество теплоты, переносимое этой массой:

$$dQ = c(t - t_0) dm = c(t - t_0) \frac{2\rho_0 SH}{t_0} dt.$$

Интегрируем от $t_1 = 1,1t_0$ до $2t_0$:

$$Q = \frac{2\rho_0 SHc}{t_0} \int_{1,1t_0}^{2t_0} (t - t_0) dt = \frac{2\rho_0 SHc}{t_0} \left[\frac{(t - t_0)^2}{2} \right] \bigg|_{1,1t_0}^{2t_0}.$$

Подставляем пределы:

$$Q = \frac{2\rho_0 SHc}{t_0} \cdot \frac{t_0^2 - 0,01t_0^2}{2} = 0,99\rho_0 ct_0 SH.$$

Далее, как и в первом способе:

$$t_R = t_0 + \frac{Q}{cm_R}.$$

Окончательно:

$$t_R = 1,36t_0.$$

Задача №9-Т5. Звезда и треугольник

Способ 1. Воспользуемся методом наложения токов. Представим два независимых источника тока: один создаёт ток силой I_0 , другой — регулируемый ток I (см. рисунок 1). При расстановке токов учтём, что часть цепи для каждого источника представляет собой сбалансированный мост.

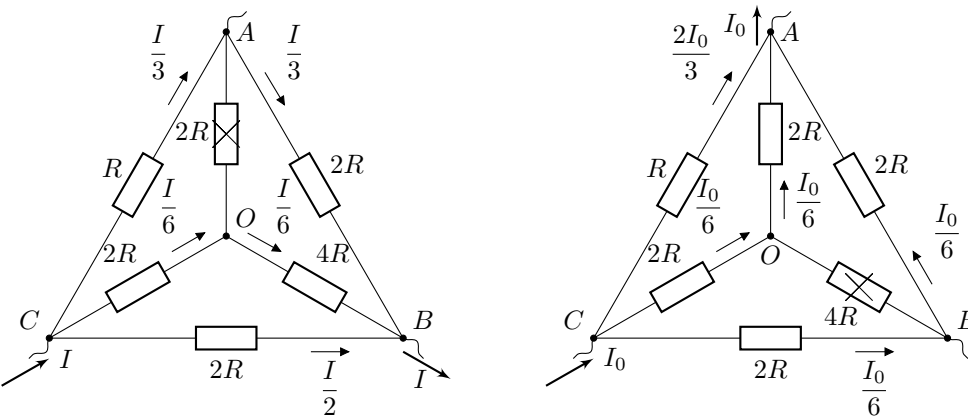


Рис. 1

Способ 2. Введём токи I_1 и I_2 , далее, с учётом первого и второго правил Кирхгофа выразим через них токи во всех остальных участках разветвлённой цепи (см. рисунок 2).

Запишем первое правило Кирхгофа для узлов A и B и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2I_2 + 2I_1 + I_1 = I_0 + 2I_2 - 3I_1, \\ 3I_2 - 2I_1 + I_2 - I_1 + 2I_2 - 3I_1 = I. \end{cases}$$
$$\begin{cases} I_1 = I_0/6, \\ I_2 = (I + I_0)/6. \end{cases}$$

Заметим, что ток I никак не влияет на силу тока через верхний резистор, следовательно:

$$\Delta I_{\text{верх}} = 0.$$

Изменение силы тока через нижний резистор

$$\Delta I_{\text{нижн}} = \Delta \left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6} \right) = \frac{\Delta I}{2}.$$

Единственный резистор, через который токи от двух источников направлены противоположно, — это резистор $2R$ между узлами A и B . Условие обнуления тока:

$$I'/3 = I_0/6.$$

Таким образом $I' = I_0/2$.

Ответ на четвертый вопрос можно получить разными способами.

Способ 1. Мощность можно рассчитать как сумму мощностей воображаемых источников токов I_0 и I . Напряжение между узлами B и C :

$$U_{BC} = \left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6} \right) \cdot 2R,$$

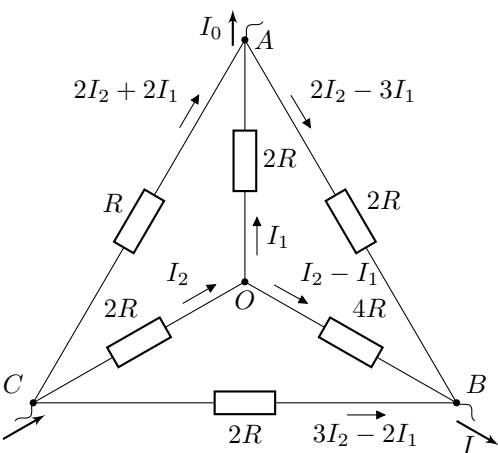


Рис. 2

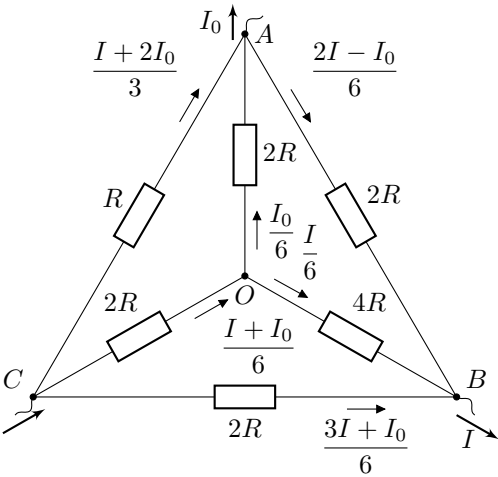


Рис. 3

а между узлами A и C :

$$U_{AC} = \left(\frac{I}{3} + \frac{2I_0}{3}\right) \cdot R.$$

Тогда суммарная тепловая мощность, выделяющаяся в цепи равна:

$$P(I) = U_{BC}I + U_{AC}I_0 = RI^2 + \frac{2}{3}II_0R + \frac{2}{3}RI_0^2.$$

Способ 2. Тот же результат можно получить как сумму тепловых мощностей на каждом резисторе:

$$\begin{aligned} P(I) = R \left(\frac{I}{3} + \frac{2I_0}{3}\right)^2 + 2R \left(\frac{I_0}{6}\right)^2 + 2R \left(\frac{I}{6} + \frac{I_0}{6}\right)^2 + \\ + 4R \left(\frac{I}{6}\right)^2 + 2R \left(\frac{I}{3} - \frac{I_0}{6}\right)^2 + 2R \left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Минимум выражения $P(I)$ (вершина параболы) достигается при:

$$I^* = -\frac{I_0}{3}.$$

Соответствующая минимальная мощность:

$$P_{\min} = P(I^*) = \frac{5}{9}RI_0^2.$$

Задача №10-Т1. Опять 45?

Пока камень не долетел до притягивающего луча, он движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Дальность полёта камня, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту равна

$$l_0 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Это выражение принимает максимальное значение при $\alpha = 45^\circ$, следовательно

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

Направим ось OX горизонтально, а ось OY — вертикально вверх; в качестве начала отсчёта O выберем положение Глюка. Левую и правую (по ходу полёта камня) границы области, ограниченной притягивающим лучом, пронумеруем 1 и

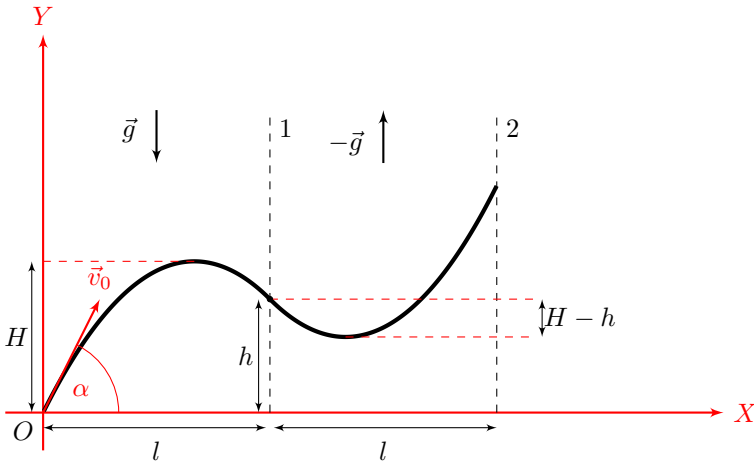
2 соответственно (см. рисунок). Ясно, что внутри луча камень движется с ускорением $-\vec{g}$, и если он пересекает границу 1 так, что проекция его скорости $v_y \geq 0$, то камень достигнет и границы 2. Этому соответствует условие

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 \geq 0,$$

где $t_1 = l/(v_0 \cos \alpha)$, а α — угол между $\vec{v}_0$ и горизонтом. Следовательно, чтобы пролететь область, ограниченную лучом, насквозь, заведомо достаточно скорости

$$v'_{m2} = \sqrt{\frac{2gl}{\sin 2\alpha}}.$$

Проверим, что $v_{2m} < v'_{m2}$. Характерная для такого случая траектория камня приведена на рисунке. Её участок левее границы 2 обладает центральной симметрией относительно точки пересечения границы 1. Пусть H — наибольшая высота подъёма камня на участке слева от луча, а h — высота, на которой камень пересекает границу 1.



Траектория камня при $v_0 > v_{m1}$ обладает центральной симметрией

Из сказанного выше следует (см. рисунок), что для того, чтобы камень достиг границы 2, достаточно

$$H - h < h \quad \Rightarrow \quad h > H/2.$$

Из закона равноускоренного движения следует, что

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$h = y(l) = \operatorname{tg} \alpha \cdot l - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot l^2.$$

Тогда условие $h > H/2$ может быть приведено к виду

$$\frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{8gl}{\sin 2\alpha} \cdot v_0^2 + v_0^4 < 0.$$

Выделим в этом выражении полный квадрат:

$$\left(\frac{4gl}{\sin 2\alpha} - v_0^2 \right)^2 - \frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} < 0.$$

Откуда выразим v_0^2 (напомним, что нас интересуют значения $v_0^2 < 2gl / \sin 2\alpha$, так что выражение в скобках положительно):

$$v_0^2 > \frac{4gl}{\sin 2\alpha} - \frac{2\sqrt{2}gl}{\sin 2\alpha} = \frac{2(2 - \sqrt{2})gl}{\sin 2\alpha}.$$

Правая часть меньше v'_{2m} и достигает минимального значения при $\alpha = 45^\circ$, следовательно

$$v_{m2} = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})lg} \approx \sqrt{1,17lg}.$$

Горизонтальная компонента скорости камня неизменна, следовательно участок слева от притягивающего луча и внутри него камень проходит за одно время

$$t_0 = t_1 = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}.$$

Найдём скорость камня при пересечении границы 2

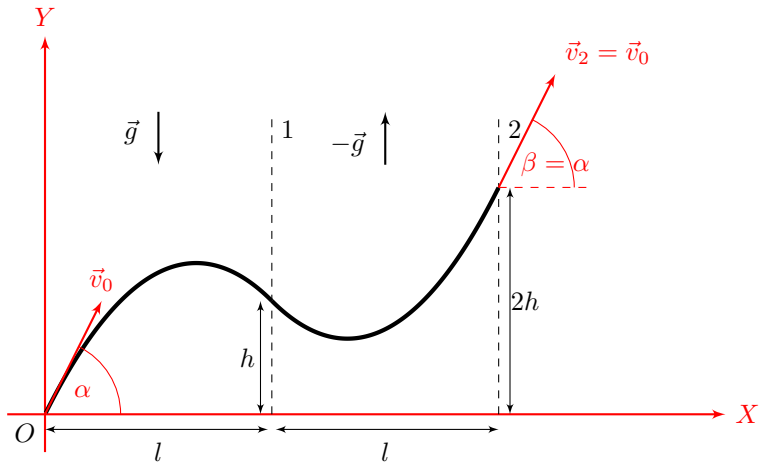
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_0 - \vec{g}t_1 = \vec{v}_0.$$

Из соображений симметрии (см. рисунок) следует, что камень пересекает границу 2 на высоте $2h$. Время t_2 , за которое он после этого упадёт на землю,

$$2h + v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{4h}{g}}.$$



Камень пересекает границу 2 со скоростью $\vec{v}_2 = \vec{v}_0$

Этому соответствует горизонтальное смещение

$$l_2 = v_0 \cos \alpha \cdot t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{4hv_0^2 \cos^2 \alpha}{g}}.$$

Подставим в это выражение

$$h = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

и получим

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{2lv_0^2 \sin 2\alpha}{g} - 2l^2}.$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

l_2 монотонно возрастает при увеличении $\sin 2\alpha$, следовательно достигает максимального значения при $\alpha = 45^\circ$:

$$l_{m2} = \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Искомое расстояние $L_{m2} = 2l + l_{m2}$.

$$L_{m2} = 2l + \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Поскольку и v_{m2} , и L_{m2} соответствуют броску под углом в 45° , достаточно подставить $v_0^2 = 2(2 - \sqrt{2})gl$ в выражение для L_{m2} . Получим

$$L_{m3} = \left(4 - \sqrt{2} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}\right)l$$

или после преобразований

$$L_{m3} = (2 + \sqrt{2})l \approx 3,41l.$$

Задача №10-Т2. Раскрутка трением

Рассмотрим момент времени, когда валик и правый диск вращаются с постоянными угловыми скоростями Ω и ω_x соответственно. Введём ось Oy , направленную вдоль оси симметрии валика влево, с началом в центре его правого основания.

Сила трения, действующая на правый диск, меняет своё направление в некоторой точке с координатой y_x . На участке с координатой от 0 до y_x скорость точек валика Ωr больше, чем скорость точек диска $v_x = \omega_x y$, значит сила трения на этом участке направлена по скорости точек валика («от нас»). Аналогично можно показать, что на участке с координатой от y_x до R , сила трения направлена против скорости точек валика («на нас»).

Сила трения, действующая на участке длиной Δy , равна $f\Delta y$, где f — сила трения, приходящаяся на единицу длины. Равнодействующая такой равномерно распределённой силы приложена к середине указанного отрезка. С учётом того, что суммарный момент внешней силы трения, действующей на правый диск, равен нулю, получаем:

$$fy_x \cdot \frac{y_x}{2} = f(R - y_x) \cdot \frac{R + y_x}{2}.$$

Откуда $y_x = R/\sqrt{2}$.

Сила трения, действующая на валик со стороны левого диска меняет своё направление в некоторой точке с координатой y_0 . Плечо этой силы равно r , а так как валик равномерно вращается, то суммарный момент силы трения, действующей на валик относительно оси вращения также равен нулю, а значит:

$$fy_x \cdot r + f(2R - y_0) \cdot r = f(y_0 - y_x) \cdot r.$$

Откуда $y_0 = y_x + R = R/\sqrt{2} + R$.

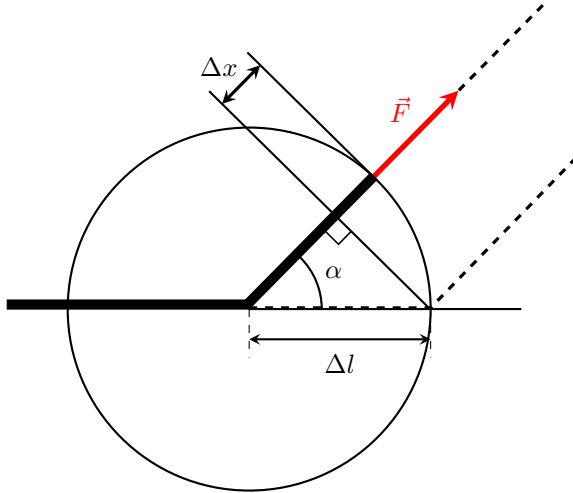
В точках с координатами y_x и y_0 , где сила трения меняет направление, скорости точек дисков равны скорости точек валика Ωr . Скорость точки правого диска с координатой y_x равна $\omega_x \cdot y_x = \omega_x \frac{R}{\sqrt{2}}$. Скорость точки левого диска с координатой y_0 равна $\omega_0 \cdot (2R - y_0) = \omega_0 \cdot (R - \frac{R}{\sqrt{2}})$. С учётом этого $\omega_x \frac{R}{\sqrt{2}} = \omega_0 \cdot (R - \frac{R}{\sqrt{2}})$ или

$$\omega_x = \omega_0(\sqrt{2} - 1).$$

Задача №10-Т3. Клейкая лента

Когда приложенная сила F постоянна по величине и направлению, угол наклона оторванной части ленты α также постоянен. Если внешняя сила достаточна по величине и приводит к отрыву части ленты малой длины Δl , точка, к которой приложена внешняя сила, перемещается на расстояние Δx , совершая при этом работу, которую можно связать с величиной σ и площадью ленты оторвавшейся части ленты $\Delta S = d \cdot \Delta l$:

$$\Delta A = \Delta x \cdot F = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot d \cdot \Delta l. \quad (1)$$



Перемещение точки приложения силы Δx может быть выражено через Δl и α :

$$\Delta x = \Delta l \cdot (1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем выражение для силы $F = F(\alpha)$, необходимой для отрывания ленты от стола под некоторым углом:

$$F = \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha}.$$

Сила принимает минимальное значение при максимальном знаменателе $1 - \cos \alpha = 2$, то есть при $\alpha = \pi$.

Теперь рассмотрим второй случай. Силы натяжения ленты и нити равны по модулю, так что будем их обозначать T . Из условия равновесия груза $T = mg$.

Очевидно, что если сила натяжения T не превышает силу отрыва ленты для угла α_1 , то лента не будет отрываться и система будет покоиться. Максимальная сила T , которая может быть достигнута при равновесии системы $T = \sigma d / (1 - \cos \alpha_1)$. Тогда масса груза равна

$$m = \frac{\sigma d}{(1 - \cos \alpha_1) \cdot g} \approx 0,068 \text{ кг}.$$

Теперь рассмотрим случай добавления груза массой M . Для начала определим длину участка ленты ΔL , который оторвался от стола до момента остановки грузов. Его можно выразить через высоту блока H и углы α_1 и α_2 :

$$\Delta L = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} \approx 0,732 \cdot H = 0,732 \text{ м}.$$

Для нахождения Δh используем условие на сохранение полной длины нити и ленты (ввиду их нерастяжимости):

$$\Delta L + L_1 = L_2 + \Delta h,$$

где $L_1 = H / \sin \alpha_1$ и $L_2 = H / \sin \alpha_2$ — это расстояния от блока до точки отрыва ленты от стола в начальный и конечный момент соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} + \frac{H}{\sin \alpha_1} - \frac{H}{\sin \alpha_2} = \\ &= H \left(\frac{1 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} - \frac{1 - \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \right) \approx 0,146 \cdot H = 0,146 \text{ м}. \end{aligned}$$

Положение, в котором остановится система, определяется законом изменения полной механической энергии: изменение потенциальной энергии груза (кинетическая энергия в крайних положениях равна нулю) равно работе по отрыву ленты:

$$(m + M)g \cdot \Delta h = A = \sigma d \Delta L.$$

Отсюда

$$M = \frac{\sigma d \Delta L}{g \Delta h} - m \approx 0,032 \text{ кг} = 32 \text{ г.}$$

Ускорения грузов в начальный и конечный моменты времени находятся из второго закона Ньютона:

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - T(\alpha_1)$$

или

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha_1}.$$

Искомые значения:

$$a_1 = g - \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_1)} \approx 3,2 \text{ м/с}^2,$$

и

$$a_2 = \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_2)} - g \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что после остановки ускорения грузов будут равны нулю.

Задача №10-Т4. Трубка со ртутью

Пусть смещение концов столбика ртути после переворота трубки равно h_0 . Разность давлений воздуха в левой и правой частях трубки $\Delta P = P_{\text{л}} - P_{\text{п}}$ уравнивается избыточным гидростатическим давлением ртути $2\rho gh_0$. Используя закон Бойля-Мариотта, найдем:

$$P_{\text{л}} = P_{\text{А}} \frac{l}{l - h_0}, \quad P_{\text{п}} = P_{\text{А}} \frac{l}{l + h_0}.$$

Запишем условие равновесия столбика ртути:

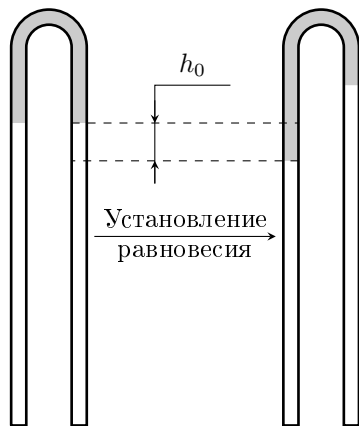
$$P_{\text{А}} \frac{l}{l - h_0} - P_{\text{А}} \frac{l}{l + h_0} = 2\rho gh_0.$$

После преобразований получаем:

$$\frac{2lh_0P_{\text{А}}}{l^2 - h_0^2} = 2\rho gh_0.$$

Решения этого уравнения

$$h_0 = 0, \quad h_0 = \pm \sqrt{l \left(l - \frac{P_{\text{А}}}{\rho g} \right)}.$$



При $P_A = 750$ мм рт.ст. > 625 мм рт.ст. $= \rho g l$ подходит только один из корней $h_0 = 0$. Таким образом, сразу после переверота столбик ртути не смещается.

Понижение температуры до $0,8 T_0$ соответствует изменению начального давления воздуха (давления воздуха в трубке с запаянными концами до её переверота) с P_A до $P_1 = 0,8 P_A = \rho g L_1$, где $L_1 = 0,8 \cdot 750$ мм = 600 мм. В этом случае существует решение:

$$h_1 = \sqrt{l \left(l - \frac{P_1}{\rho g} \right)} = \sqrt{l(l - L_1)} = \sqrt{0,625(0,625 - 0,600)} \text{ м} = \frac{l}{5} = 125 \text{ мм.}$$

Можно показать, что именно это решение соответствует устойчивому положению столбика ртути. Корень $h_1 = 0$ мм соответствует неустойчивому положению, то есть при небольшом смещении столбика ртути избыточное гидростатическое давление превышает разность давлений воздуха в левом и правом участках трубки и ртуть стремится занять положение, соответствующее устойчивому положению.

Покажем, что корень $h_1 = 125$ мм соответствует устойчивому равновесию. Пусть от положения равновесия столбик ртути сместилась дополнительно на некоторое малое расстояние x , тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_{\text{л}}(x) = \frac{lP_1}{l - h_1 - x} = \frac{lP_1}{l - h_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l - h_1}} \approx \frac{lP_1}{l - h_1} \left(1 + \frac{x}{l - h_1} \right) = \frac{lP_1}{l - h_1} + \frac{x l P_1}{(l - h_1)^2}.$$

Аналогично для давления в правой части сосуда:

$$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_1}{l + h_1 + x} \approx \frac{lP_1}{l + h_1} - \frac{x l P_1}{(l + h_1)^2}.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$\begin{aligned} F_{\text{д}}(x) &= (P_{\text{л}} - P_{\text{п}})S \approx \left(\frac{lP_1}{l - h_1} - \frac{lP_1}{l + h_1} \right) S + \left(\frac{1}{(l - h_1)^2} + \frac{1}{(l + h_1)^2} \right) x l P_1 S = \\ &= F_{\text{д}}(0) + \frac{2(l^2 + h_1^2)}{(l^2 - h_1^2)^2} x l P_1 S. \end{aligned}$$

Сила, равная разности сил тяжестей, действующих на столбики ртути в разных частях сосуда, стремится вывести столбик ртути из положения равновесия:

$$F_{\text{т}}(x) = \rho S(l/4 + h_1 + x) - \rho S(l/4 - h_1 - x) = 2\rho g S h_1 + 2\rho g S x = F_{\text{т}}(0) + 2\rho g S x.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учётом равенства $F_d(0) = F_T(0)$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_d - F_T = 2 \left(\frac{(l^2 + h_1^2)lL_1}{(l^2 - h_1^2)^2} - 1 \right) \rho g S x.$$

Подставив в выражение корень $h_1 = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta F = F_d - F_T &= 2 \left(\frac{(l^2 + 0^2)lL_1}{(l^2 - 0^2)^2} - 1 \right) \rho g S x = 2 \left(\frac{L_1}{l} - 1 \right) \rho g S x = \\ &= 2 \left(\frac{600 \text{ мм}}{625 \text{ мм}} - 1 \right) \rho g S x < 0, \end{aligned}$$

т. е. суммарная сила, действующая на систему, будет выводить её из положения равновесия, и $h_1 = 0$ мм соответствует неустойчивому положению равновесия.

Подставив $h_1 = l/5$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta F = F_{\text{давл}} - F_{\text{тяж}} &= 2 \left(\frac{(l^2 + (l/5)^2)lL_1}{(l^2 - (l/5)^2)^2} - 1 \right) \rho g S x = \\ &= 2 \left(\frac{25 \cdot 26 \cdot L_1}{24^2 \cdot l} - 1 \right) \rho g S x = 2 \left(\frac{25 \cdot 26 \cdot 600 \text{ мм}}{24^2 \cdot 625 \text{ мм}} - 1 \right) \rho g S x = \\ &= 2 \left(\frac{26}{24} - 1 \right) \rho g S x > 0, \end{aligned}$$

т. е. суммарная сила, действующая на систему, будет стремиться вернуть её в положение равновесия, и $h_1 = l/5 = 125$ мм соответствует устойчивому положению равновесия.

Расчёт по полученной формуле для смещения при начальном давлении $P_2 = 0,7 P_A = \rho g L_2$, где $L_2 = 0,7 \cdot 750 \text{ мм} = 525 \text{ мм}$, соответствующего температуре $T_2 = 0,7 T_0$, даёт результат:

$$h_2 = \sqrt{l \left(l - \frac{P_2}{\rho g} \right)} = \sqrt{0,625 (0,625 - 0,525)} \text{ м} = 0,25 \text{ м} = 250 \text{ мм} = \frac{2l}{5} > \frac{l}{4}.$$

Но в этом случае столбик ртути целиком перемещается в одну из частей трубки и выражение для избыточного гидростатического давления $2\rho g h_2$ должно быть заменено на $\rho g l/2$.

Пусть столбик ртути целиком перешёл в одну из частей трубки и его нижний конец переместился вниз на h_2 , тогда в левой и правой частях трубки давление будет соответственно равно:

$$P_{\text{л}} = P_2 \frac{l}{l - h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l - h_2}, \quad P_{\text{п}} = P_2 \frac{l}{l + h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l + h_2}.$$

Условие равновесия столбика выглядит теперь следующим образом:

$$\frac{2\rho g l L_2 h_2}{l^2 - h_2^2} = \frac{\rho g l}{2}.$$

Получим квадратное уравнение:

$$h_2^2 + 4L_2 h_2 - l^2 = 0,$$

которое имеет корни

$$h_2 = -2L_2 \pm \sqrt{4L_2^2 + l^2}.$$

Отбросив отрицательный корень, получаем ответ:

$$h_2 = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{T_2 P_A}{T_0 \rho g} \right)^2 + l^2} - \frac{2T_2 P_A}{T_0 \rho g} = \sqrt{4 \cdot 0,525^2 + 0,625^2} \text{ мм} - 2 \cdot 0,525 \text{ мм} \approx 172 \text{ мм}.$$

Покажем, что $h_2 \approx 172$ мм соответствует устойчивому положению равновесия. Пусть от положения равновесия ртуть дополнительно сместилась на малое расстояние $x > 0$, тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_{\text{л}}(x) = \frac{lP_2}{l - h_2 - x} = \frac{lP_2}{l - h_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l - h_2}} = \frac{lP_2}{l - h_2} + \Delta P_1, \quad \Delta P_1 > 0.$$

Аналогично находим давление газа в правой части сосуда:

$$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_2}{l + h_2 + x} = \frac{lP_2}{l + h_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{l + h_2}} = \frac{lP_2}{l + h_2} - \Delta P_2, \quad \Delta P_2 > 0.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$\begin{aligned} F_{\text{д}} &= (P_{\text{л}} - P_{\text{п}})S \approx \left(\frac{lP_2}{l - h_2} - \frac{lP_2}{l + h_2} \right) S + (\Delta P_1 + \Delta P_2) S = \\ &= F_{\text{д}0} + (\Delta P_1 + \Delta P_2) S. \end{aligned}$$

Сила тяжести не изменяется при движении столба жидкости внутри одной части сосуда:

$$F_{\text{т}} = \rho S l g / 2.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учетом равенства $F_{\text{д}0} = F_{\text{т}}$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_{\text{д}} - F_{\text{т}} = (\Delta P_1 + \Delta P_2) S > 0,$$

т. е. результирующая сила положительна и положение равновесия устойчиво.

Задача №10-Т5. Термистор

Пусть U_0 — номинальное напряжение источника. Тепловая мощность, выделяющаяся на термисторе, должна в установившемся режиме рассеиваться в окружающий воздух. Поэтому

$$U_0^2 G(t) = k(t - t_{\text{в}}), \quad (*)$$

где t — собственная температура термистора, $t_{\text{в}}$ — температура воздуха, а k — коэффициент пропорциональности в законе Ньютона-Рихмана. Определяя по графику значение проводимости при температуре $t = 29^\circ\text{C}$

$$G(29^\circ\text{C}) = 1,2 G_{25}$$

и подставляя $t_{\text{в}} = 27^\circ\text{C}$, получим, что

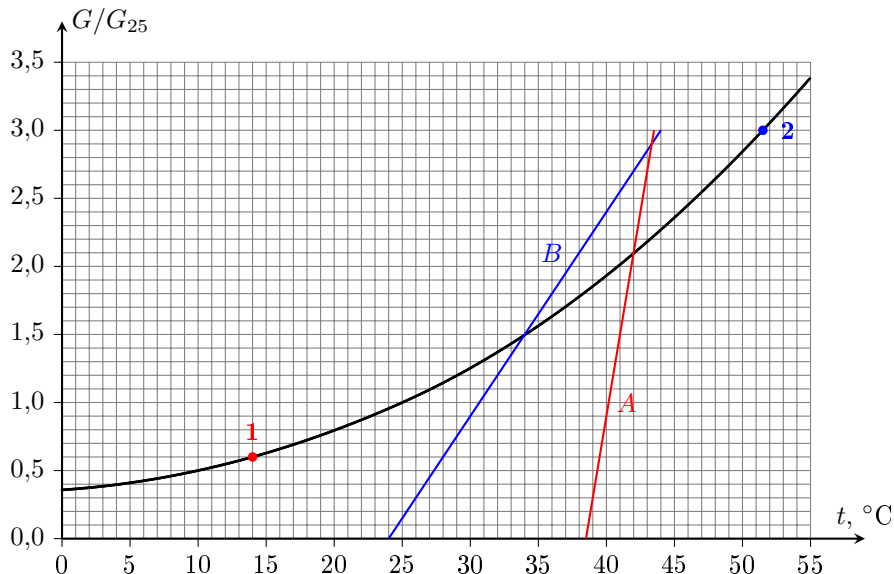
$$k = 0,6 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot U_0^2 G_{25}.$$

Пусть теперь температура воздуха равна t_1 , а температура термистора, соответственно, $(t_1 + 1^\circ\text{C})$.

Подставим эти значения в (*):

$$U_0^2 G(t_1 + 1^\circ\text{C}) = k \cdot 1^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad G(t_1 + 1^\circ\text{C}) = 0,6 G_{25}.$$

Данное значение проводимости (точка 1 на рис.) соответствует температуре $t_1 + 1^\circ\text{C} = 14^\circ\text{C}$, откуда $t_1 = 13^\circ\text{C}$.



Пусть теперь $t_{\text{в}} = 38,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Тогда

$$U_0^2 G(t) = k(t - 38,5 \text{ }^{\circ}\text{C}) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t)}{G_{25}} = 0,6 \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \cdot (t - 38,5 \text{ }^{\circ}\text{C}).$$

Полученное уравнение решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением, поверх данного в условии графика (прямая A на рис.). Точка пересечения соответствует температуре термистора $t = 42 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Пусть при напряжении источника $2U_0$ и температуре воздуха $t_{\text{в}} = 24 \text{ }^{\circ}\text{C}$, термистор в установившемся режиме имеет температуру t_2 . Запишем условие теплового равновесия для термистора и подставим в него выражение для k :

$$4U_0^2 G(t_2) = k(t_2 - t_{\text{в}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t_2)}{G_{25}} = 0,15 \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \cdot (t_2 - 24 \text{ }^{\circ}\text{C}).$$

Полученное уравнение снова решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением (прямая B на рис.):

$$t_2 = 34 \text{ }^{\circ}\text{C}, \quad G(t_2) = 1,5 G_{25}.$$

Однако экран прибора будет показывать не значение t_2 , а совершенно другое число $t_* \neq t_2$! Это связано с тем, что встроенный компьютер, переводящий показания амперметра в значение температуры, выводимое на экран настроен

на напряжение U_0 . Чтобы найти формулу для пересчёта, запишем выражения для силы тока через термистор в двух случаях: 1) напряжение равно U_0 , температура равна t_* ; 2) напряжение равно $2U_0$, температура — t_2

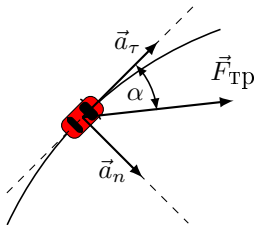
$$I_1 = U_0 G(t_*) \text{ и } I_2 = 2U_0 G(t_2).$$

Приравняв их, получим

$$G(t_*) = 2G(t_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t_*)}{G_{25}} = 3.$$

Отсюда, по графику (точка 2 на рис.), определяем, что $t_* \approx 51,5^\circ\text{C}$.

Задача №11-Т1. По окружности и побыстрее



В рамках предположений условия максимальная величина сила трения колес о поверхность дороги равна $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu N = \mu mg$, где m — масса автомобиля, и при этом ее можно направить любым направлением в горизонтальной плоскости дороги. Так как другие горизонтальные силы на автомобиль не действуют, то именно сила трения и разгоняет автомобиль, и удерживает его на нужной траектории.

Пусть α — угол между скоростью автомобиля и направлением силы трения в некоторый момент времени (см. рисунок). Тогда уравнения для касательной и центростремительной компонент ускорения автомобиля имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} ma_\tau = m \frac{dv}{dt} = \mu mg \cdot \cos(\alpha) \\ ma_n = m \frac{v^2}{R} = \mu mg \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right. \quad (1)$$

Видно, что разгон автомобиля завершается $dv/dt = 0$ и скорость достигает максимального возможного значения $v_m = \sqrt{\mu g R} = 20 \text{ м/с}$ при $\alpha = 90^\circ$. Далее угол α и скорость автомобиля поддерживаются постоянными.

Ответ на второй вопрос можно получить несколькими способами.

Уравнение для касательной компоненты ускорения можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{v \cdot dv}{v \cdot dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha). \quad (2)$$

Здесь s — путь, пройденный автомобилем от момента старта. Далее можно действовать как минимум тремя путями.

Способ 1. Подставив в (2) квадрат скорости из второго уравнения (1), находим, что

$$\mu g R \frac{d(\sin(\alpha))}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow d\alpha = \frac{2}{R} ds.$$

На старте $s = 0$ и $\alpha = 0$, то есть после суммирования приращений в этом соотношении от старта до любого момента времени в процессе разгона получаем связь угла α с пройденным автомобилем расстоянием $\alpha(s) = 2s/R$. Значит, разгон завершится в момент времени, когда $\alpha = \pi/2 \Rightarrow s = \pi R/4$, то есть точно в точке C .

Способ 2. Выразив $\sin(\alpha) = v^2/\mu g R = (v/v_m)^2$ и подставив это соотношение в уравнение (2), приводим его к виду

$$\frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4}.$$

Введем новую переменную $y \equiv (v/v_m)^2$, и получим уравнение

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2}{R} \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow \frac{2}{R} ds = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Интегрируя его по любому участку пути на дуге AC , находим, что

$$\frac{2}{R} s = \int_0^{(v/v_m)^2} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin\left(\frac{v^2}{v_m^2}\right) \Rightarrow v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right).$$

Как видно, скорость достигает максимума при $s = \pi R/4$, то есть точно в точке C .

Способ 3. Составив систему из второго уравнения в (1) и (2), можно получить из нее уравнение для зависимости $v^2(s)$ на участке AC

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ \frac{d(v^2)}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2(v^2)}{ds^2} = -2\mu g \cdot \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2}{R} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Действительно, подставляя в уравнение для $d^2(v^2)/ds^2$ полученные выражения для $\sin(\alpha)$ и $d\alpha/ds$, приходим к уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2(v^2)}{ds^2} + \frac{4}{R^2}v^2 = 0.$$

С учетом условий $v^2(0) = 0$ и $(v^2)'_s(0) = \mu g R$ приходим к решению

$$v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right).$$

Как видно, скорость достигает максимума при $s = \pi R/4$, то есть точно в точке C .

Таким образом, во время заезда с минимальным временем прохождения полуокружности скорость автомобиля в точках C , D и B равна максимальной: $v_C = v_D = v_B = v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с.

Ясно, что время прохождения участка полуокружности от C до B равно

$$t_{CB} = \frac{3\pi R}{4v_m} = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

В зависимости от способа решения в пункте 2 далее можно использовать разные способы решения и в этом пункте.

Способ 1. Исключим угол α из уравнений (1): на участке AC

$$\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu g R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4} \Rightarrow dt = \frac{v_m}{\mu g} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv v/v_m$. На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \beta \sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

Способы 2 и 3. Поскольку на участке AC $v(s) = v_m \sqrt{\sin(2s/R)} = ds/dt$, то:

$$dt = \frac{1}{v_m} \frac{ds}{\sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \sqrt{\sin(2s/R)}$. Отметим, что

$$\sin\left(\frac{2s}{R}\right) = x^2 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{2s}{R}\right) \frac{ds}{R} = 2x dx \Rightarrow \frac{ds}{R} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx.$$

На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \beta \sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

В итоге общее время прохождения полуокружности AB

$$T = t_{AC} + t_{CB} = \left(\beta + \frac{3\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 14,7 \text{ с.}$$

Задача №11-Т2. Клейкая лента

См. решение задачи №10-Т3.

Задача №11-Т3. Быстрые поршни

Поскольку поршни лёгкие и могут перемещаться без трения, давление внутри и снаружи одинаковое (равно p_0). Объём газа под поршнем $V = \pi r^2 h$, где h — высота расположения поршня. Уравнение Менделеева-Клапейрона для газа внутри цилиндра

$$p_0 \pi r^2 h = \nu RT.$$

Для малых изменений высоты и температуры

$$p_0 \pi r^2 dh = \nu R dT,$$

где $dh = v dt$.

Изменение температуры газа происходит изобарически. Уравнение теплового баланса для малого промежутка времени $\alpha h 2\pi r (T_0 - T) dt = \nu C_p dT$.

Из трёх записанных уравнений находим связь скорости и температуры:

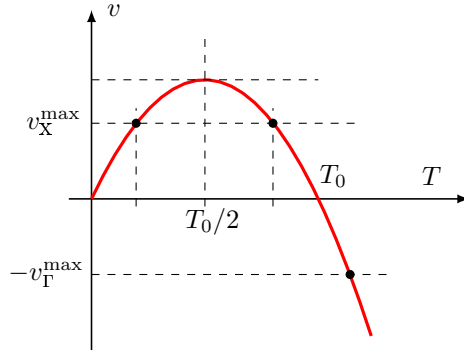
$$v = \frac{2\alpha \nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} \cdot T(T_0 - T).$$

Иначе

$$v(T) = aT(T_0 - T),$$

где $a = (2\alpha \nu R^2)/(\pi C_p p_0^2 r^3) = \text{const}$.

Графическое отображение полученной зависимости — парабола, пересекающая ось абсцисс в точках 0 и T_0 . Для горячего цилиндра максимальное значение скорости достигается в начальной точке движения при $T = T_r$ и равно по модулю $v_r^{\max} = aT_r(T_r - T_0)$.



Для холодного цилиндра максимальное значение скорости не определяется однозначно. При $T_x \geq T_0/2$ оно также достигается в начальной точке движения при $T = T_x$ и равно

$$v_x^{\max} = aT_x(T_0 - T_x).$$

Если $T_x < T_0/2$, то максимум скорости соответствует значению $T = T_0/2$ (вершина параболы) и равен

$$v_x^{\max} = aT_0^2/4.$$

Приравнивая выражения для скоростей $v_\Gamma^{\max} = v_x^{\max}$, находим искомое.

При $T_x \geq T_0/2$ получим $T_\Gamma(T_\Gamma - T_0) = T_x(T_0 - T_x)$. Решаем квадратное уравнение (относительно T_Γ):

$$T_\Gamma^2 - T_\Gamma T_0 - T_x(T_0 - T_x) = 0,$$

оставляем только положительный корень.

Итак:

$$T_\Gamma = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_x(T_0 - T_x)}}{2}.$$

При $T_x < T_0/2$ получим $T_\Gamma(T_\Gamma - T_0) = T_0^2/4$. Решаем квадратное уравнение (относительно T_Γ):

$$T_\Gamma^2 - T_\Gamma T_0 - T_0^2/4 = 0,$$

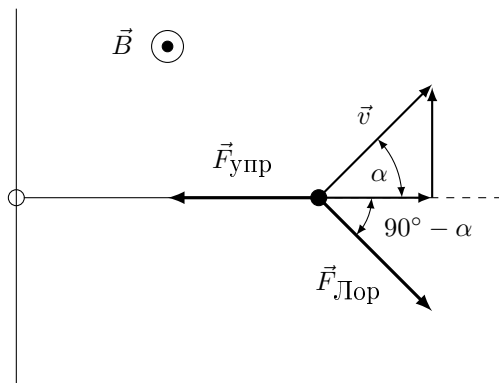
оставляем только положительный корень.

Итак:

$$T_\Gamma = T_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$T_\Gamma = \begin{cases} T_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, & \text{если } T_x < T_0/2; \\ \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_x(T_0 - T_x)}}{2}, & \text{если } T_x \geq T_0/2. \end{cases}$$

Задача №11-Т4. Заряд на резинке



Пусть ось x горизонтальна и направлена от спицы, ось y направлена вверх вдоль спицы. Начало координат находится к точке начального положения заряда.

Запишем проекции второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB \cos(90^\circ - \alpha), \\ m\ddot{y} = -qvB \sin(90^\circ - \alpha). \end{cases}$$

Преобразуем полученные уравнения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB \sin(\alpha), \\ m\ddot{y} = -qvB \cos(\alpha). \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x}. \end{cases}$$

Способ 1.

Продифференцируем по времени первое уравнение системы. Тогда

$$m\ddot{\dot{x}} = -k\dot{x} + qB\ddot{y},$$

$$\ddot{\dot{x}} + \left[\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \right] \dot{x} = 0.$$

Обозначим $\beta^2 = \frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2$:

$$\ddot{\dot{x}} + \beta^2 \dot{x} = 0.$$

Откуда

$$\dot{x}(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t).$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0, \\ \ddot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\beta t), \\ x(t) = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta t), \\ \dot{y}(t) = \frac{-qBv_0}{m\beta} \sin(\beta t), \\ y(t) = \frac{qBv_0}{m\beta^2} (\cos(\beta t) - 1). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}} \right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0, y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2} \right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} \right),$$

большой полуосью

$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = mv_0/qB$ и $\gamma = 1/\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по дуге окружности радиуса $R = (mv_0)/(qB)$.

Способ 2.

Из $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y = -\frac{qB}{m} dx = -\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y = 0$, $x = 0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y = -\Omega x.$$

Откуда:

$$\left(\frac{y + \gamma a}{\gamma a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение эллипса. Координаты центра эллипса $(0, -\gamma a)$, его большая полуось равна $a = (mv_0)/\sqrt{km + (qB)^2} = R\gamma$, а малая $b = \gamma a = (qBmv_0)/km + (qB)^2 = R\gamma^2$. Это уравнение описывает траекторию вплоть до возвращения длины резинки к исходной. Далее заряд попадает в область, где резинка провисает, и он движется по окружности радиуса $R = v_0/\Omega = mv_0/qB$ до возвращения длины резинки к исходной, после чего резинка натягивается и движение повторяется.

Способ 3.

Из второго уравнения системы $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y = -\frac{qB}{m}dx = -\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y = 0$, $x = 0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y = -\Omega x.$$

Подставим это в первое уравнение системы:

$$m\ddot{x} = -kx - qB\Omega x.$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m} + \Omega^2\right)x$$

Обозначим $\beta^2 = \Omega^2 + \frac{k}{m}$.

$$x = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\beta}. \end{cases}$$

$$x = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta t)$$

Подставим в выражение для v_y :

$$\dot{y} = -\Omega x = -\frac{\Omega v_0}{\beta} \sin(\beta t).$$

Интегрируя, получаем:

$$y = \frac{\Omega v_0}{\beta^2} (\cos(\beta t) - 1).$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}} \right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0, y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2} \right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} \right),$$

большой полуосью

$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = mv_0/qB$ и $\gamma = 1/\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по окружности радиуса $R = mv_0/qB$.

При положительном удлинении шнура $\Delta x > 0$ траектория является частью эллипса с большой и малой полуосями: $a = mv_0/\sqrt{km + (qB)^2}$, $b = qBmv_0/(km + (qB)^2)$.

При ненатянута шнуре $\Delta x = 0$ траектория является частью окружности с радиусом $R = mv_0/qB$.

В целом траектория состоит из последовательно чередующихся половинок эллипса и окружности, которые без излома и без разрыва переходят друг в друга при $x = 0$.

Определим период движения заряда:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2}} + \frac{\pi}{\frac{qB}{m}} = \frac{\pi m}{qB} \left(\frac{qB}{\sqrt{km + (qB)^2}} + 1 \right).$$

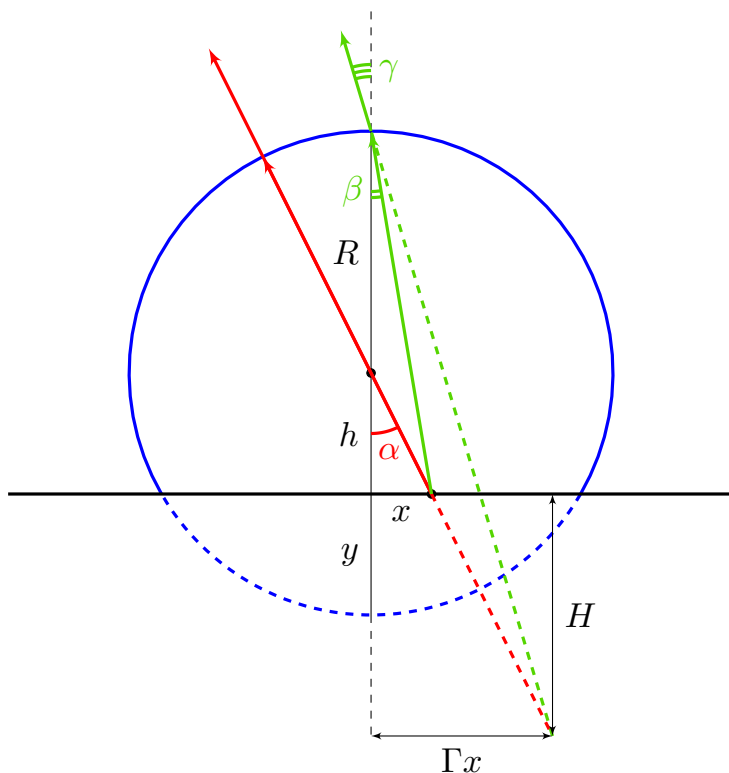
Тогда дрейфовая скорость

$$u = \frac{2(R - b)}{T} = \frac{2kmv_0}{\pi\sqrt{km + (qB)^2} \left(qB + \sqrt{km + (qB)^2} \right)}.$$

Задача №11-Т5. Цилиндр

Заметим, что по условию фотографирование происходит с большого расстояния, поэтому можно считать, что увеличение цилиндра в направлении его оси отсутствует. Дополнительно можно убедиться в этом, проверив, что точки пересечения линий миллиметровки и их изображений лежат примерно на оси цилиндра.

Теперь исследуем увеличение для параксиальных лучей в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Пусть расстояние от оси цилиндра до плоскости равно h . Будем считать его положительным, если осталось больше половины цилиндра. Рассмотрим точку, смещённую от плоскости симметрии системы на малое расстояние x . Найдём положение её изображения, образованного параксиальными лучами.



Из закона преломления света получаем:

$$\gamma = n\beta = \frac{nx}{h+R}.$$

Запишем геометрические соотношения.

$$\frac{x(h+H)}{h} = \Gamma x = \frac{nx(h+H+R)}{h+R}.$$

Выразим и подставим значение H .

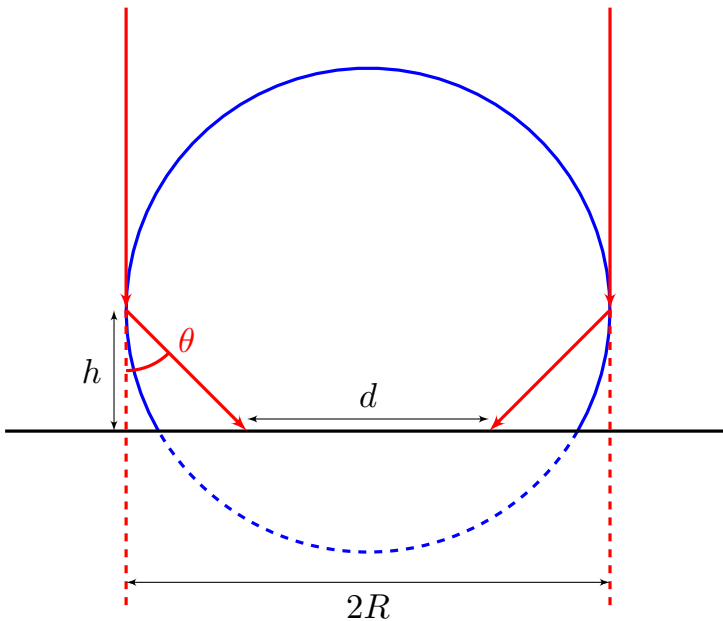
$$H = h(\Gamma - 1)$$

$$\Gamma(h+R) = n(\Gamma h+R).$$

Получаем искомое увеличение:

$$\Gamma = \frac{nR}{R - (n-1)h}.$$

Заметим, что мы видим не всю миллиметровку, которую закрывает цилиндр. Такое может быть только в случае $h > 0$, то есть отрезали меньше половины цилиндра. По фотографии видно, что область видимости ограничивают лучи, идущие по касательной к цилиндру.



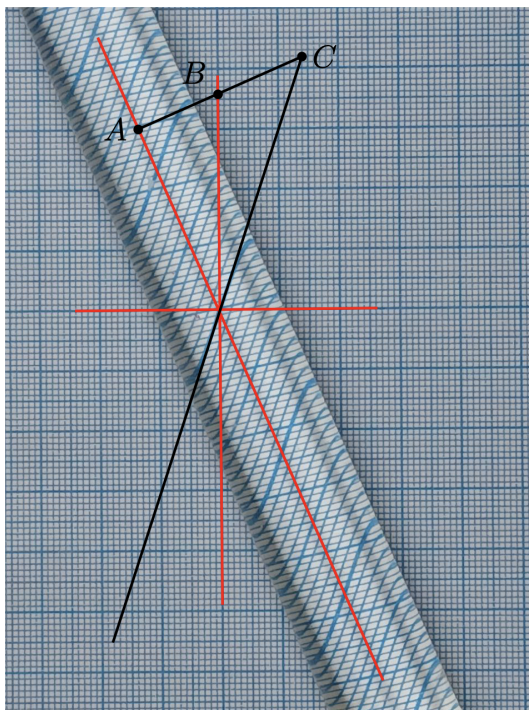
Из закона преломления света имеем:

$$\cos \theta = \frac{1}{n},$$

$$d = 2(R - h \operatorname{tg} \theta),$$

$$\frac{d}{2R} = 1 - \frac{h\sqrt{n^2 - 1}}{R}.$$

Теперь достаточно измерить по фотографии Γ и d/R . Тогда у нас будет система из двух уравнений с двумя неизвестными.



Проведём ось цилиндра, вертикальную линию миллиметровки и касательную к её изображению в точке на оси цилиндра. Отрезок CA — перпендикуляр из точки касательной на ось цилиндра. Тогда увеличение можно найти по фотографии:

$$\Gamma = \frac{AC}{AB} \approx 2,0.$$

Для поиска области видимости можем воспользоваться подобием: для любой прямой можем определить, какую её часть видно через цилиндр. Воспользуемся горизонтальной линией на миллиметровке: закрыто цилиндром 22 мм, видно через цилиндр 9 мм.

$$\frac{d}{2R} \approx 0,41.$$

Для удобства введём обозначение $\xi = h/R$.

$$\begin{cases} 2 = \frac{n}{1 - (n-1)\xi}; \\ 0,41 = 1 - \xi\sqrt{n^2 - 1}. \end{cases}$$

$$\xi = \frac{0,59}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2 - n}{2(n - 1)}.$$

Получили уравнение на n , которое можно решить численно: $n = 1,48$.

Подставляя полученное значение в формулы для ξ , получаем:

$$\xi = 0,54.$$

При этом искомая величина выражается через ξ :

$$\frac{y}{R} = \frac{R - h}{R} = 1 - \xi = 0,46.$$