

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!



Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках.

Максимальный балл за всю работу равен 100.

11.1. (13) Фокусник и его ассистент готовятся показать следующий фокус. У них есть колода из 2026 различных карт. Они сообщают зрителю натуральное число $k \leq 1013$. Зритель выбирает k произвольных карт из колоды, убирает их в конверт и заклеивает его. Затем ассистент выбирает k карт из оставшихся и передаёт их зрителю. Тот перетасовывает эти карты как хочет и отдаёт фокуснику. Задача фокусника — отгадать карты, которые лежат в конверте. Для каких k фокусник и ассистент могут договориться действовать так, чтобы фокус гарантированно удался?

11.2. (14) Найдите все многочлены $P(x)$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющие условию: для $P(x)$ существует такое бесконечное множество целых чисел S , что для любого числа n из S число $\frac{1}{P\left(\frac{1}{n}\right)}$ является целым.

11.3. (14) В пространстве размещён выпуклый многогранник. Для каждой четвёрки его вершин, если эта четвёрка не лежит в одной плоскости, вычислили объём тетраэдра с вершинами в ней. Оказалось, что все вычисленные объёмы равны. Сколько вершин могло быть у исходного многогранника? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

11.4. (17) Зафиксировано натуральное число $n \geq 4$. В пространстве выбрана система прямоугольных координат $Oxyz$ и размещён куб с ребром n , разбитый на кубики с ребром 1 (рёбра куба параллельны осям координат). Изначально в некоторых n кубиках записаны натуральные числа от 1 до n , каждое по одному разу. Назовём x -, y - или z -координатой кубика соответствующую координату его центра. За одно действие разрешается выбрать кубик, в котором записано число k , и в любой из пустых кубиков, соседних с выбранным кубиком по грани и имеющих хотя бы одну большую координату, записать число $k + 1$, а затем стереть число $k + 1$ из кубика, в котором оно было записано ранее. При этом нельзя записывать число в кубик, если это число уже когда-то было в нём записано. Найдите наименьшее M , для которого можно гарантировать, что нельзя сделать больше M таких действий.

11.5. (19) На плоскости отмечено 800 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два несовпадающих треугольника с вершинами в отмеченных точках, отношение периметров которых отличается от 1 менее чем на $1/3800000$.

11.6. (23) В каждой клетке таблицы 2026×2026 записано натуральное число от 1 до 2026, причём в каждом столбце числа не повторяются, а также в каждой строке числа не повторяются. Все клетки таблицы закрыты карточками. Разрешается один раз выбрать несколько карточек, а затем одновременно убрать их. Какое наименьшее количество карточек нужно убрать, чтобы гарантированно узнать содержимое каждой клетки таблицы?