

ВАРИАНТ 1

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

Ответ: $(2; 2\sqrt{3}), (-4; 0), (2; -2\sqrt{3})$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся муравей и жук $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{\pi}{2}$, и при этом $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$, $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$ – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

Расстояние между муравьём и жуком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 2$ и $|AN_0| = 4$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = 2|AM_0|$, то угловая скорость муравья в 2 раза больше угловой скорости жука.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ жук продвинулся на угол ω . Тогда $\alpha_0 - 2\omega = \beta_0 + \omega + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\omega = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{3} - \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3}$, где $n = 0, -1, -2, \dots$

Различных точек будет три (при $n = 0, -1, -2$). Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Координаты положения жука найдём по формулам $x_N = 4 \cos \beta_1 = 2$, $y_N = 4 \sin \beta_1 = 2\sqrt{3}$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ и имеют, соответственно, координаты $(-4; 0)$ и $(2; -2\sqrt{3})$.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: $(1; 3), (3; 1), (-2 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 2), (\sqrt{7} - 2; -2 - \sqrt{7})$.

Решение. Если $b = 0$, то второе уравнение системы принимает вид $1 = 0$, и поэтому решений у системы нет. При всех остальных значениях параметров в каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Следовательно, оба уравнения системы определяют некоторые прямые, и для существования бесконечного количества решений нужно, чтобы эти прямые совпадали. Это возможно при пропорциональности коэффициентов уравнений, т.е. при

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}. \quad (1)$$

Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных или свободные члены обращаются в ноль в обоих уравнениях¹. Рассматривая первое равенство из (??), получаем $(a+b)^2 = 16$, $a = \pm 4 - b$. Далее подставим это во второе равенство (??):

– если $a = -4 - b$, то $-\frac{3}{b} = -4 - b$, $b^2 + 4b - 3 = 0$, $b = -2 \pm \sqrt{7}$; отсюда получаем два решения системы: $(-2 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 2)$ и $(\sqrt{7} - 2; -2 - \sqrt{7})$;

– если $a = 4 - b$, то $\frac{3}{b} = 4 - b$, $b^2 - 4b + 3 = 0$, $b = 1$ или $b = 3$; отсюда получаем ещё два решения системы: $(1; 3), (3; 1)$.

¹Вообще говоря, это существенное замечание. Например, уравнения $y + 8 = 0$ и $2y + 16 = 0$ задают одну и ту же прямую.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

Ответ: 2; $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

Решение. Раскладывая правую часть на множители, получаем $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$. Отсюда есть две возможности: либо $x+3=0$ (тогда $x=-3$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3-x+10} = x+2$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3-3x+10 = (x+2)^2, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x^2-5x+6 = 0, \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+x-3) = 0, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x=2$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, и из них неравенству удовлетворяют $x=2$ и $x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $2x^4+(x-1)^2-3x^2|x-1| \geq 0$ или $|x-1|^2-3x^2|x-1|+2x^4 \geq 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y=|x-1|$ с дискриминантом, равным $(3x^2)^2-4 \cdot 2x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{3x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1 = x^2$ и $y_2 = 2x^2$, а неравенство принимает вид $(|x-1|-x^2)(|x-1|-2x^2) \geq 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A-B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} ((x-1)^2-x^4)((x-1)^2-4x^4) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2+x-1)(x^2-x+1)(2x^2+x-1)(2x^2-x+1) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2+x-1)(2x^2+x-1) &\geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right). \end{aligned}$$

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ: 5880.

Решение. Ввиду того, что $1400 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^2$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три двойки, две пятёрки, одна семёрка и две единицы, (б) четвёрка, двойка, две пятёрки, одна семёрка и три единицы или (в) восьмёрка, две пятёрки, одна семёрка и четыре единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения двоек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем два места из пяти оставшихся для размещения пятёрок ($C_5^2 = \frac{5!}{2!3!}$ способов), затем одно место из трёх оставшихся для семёрки ($C_3^1 = 1$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{8!}{3!2!2!} = 1680$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!3!} = 3360$.

(в) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!4!} = 840$.

Окончательно получаем $1680 + 3360 + 840 = 5880$ способов.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

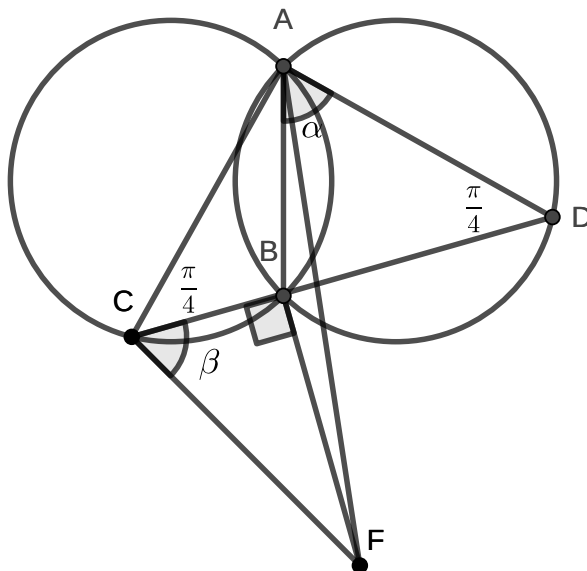


Рис. 1: вариант 1, задача 6

Ответ: 18.

Решение. Пусть $R = 9$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R \cos \alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 18$.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x - 3 - y| + |x - 3 + y| \leq 6, \\ (|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0)$, $(6; 0)$.

Решение. Рассмотрим неравенство системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x - 3 - y = 0$ и $x - 3 + y = 0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки посчитать знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; -10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке выражение $x - 3 - y$ положительно, а $x - 3 + y$ отрицательно. Таким образом, неравенство принимает вид $(x - 3 - y) - (x - 3 + y) \leq 6$, откуда $y \geq -3$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит область, лежащая выше прямой $y = -3$ и ниже прямых $x - 3 - y = 0$, $x - 3 + y = 0$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем квадрат K с вершинами в точках $A(6; -3)$, $B(6; 3)$, $C(0; 3)$ и $D(0; -3)$ (см. рисунок).

Рассмотрим уравнение системы. При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ оно принимает вид $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, и мы получаем окружность радиуса 5 с центром в точке $(3; 4)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих

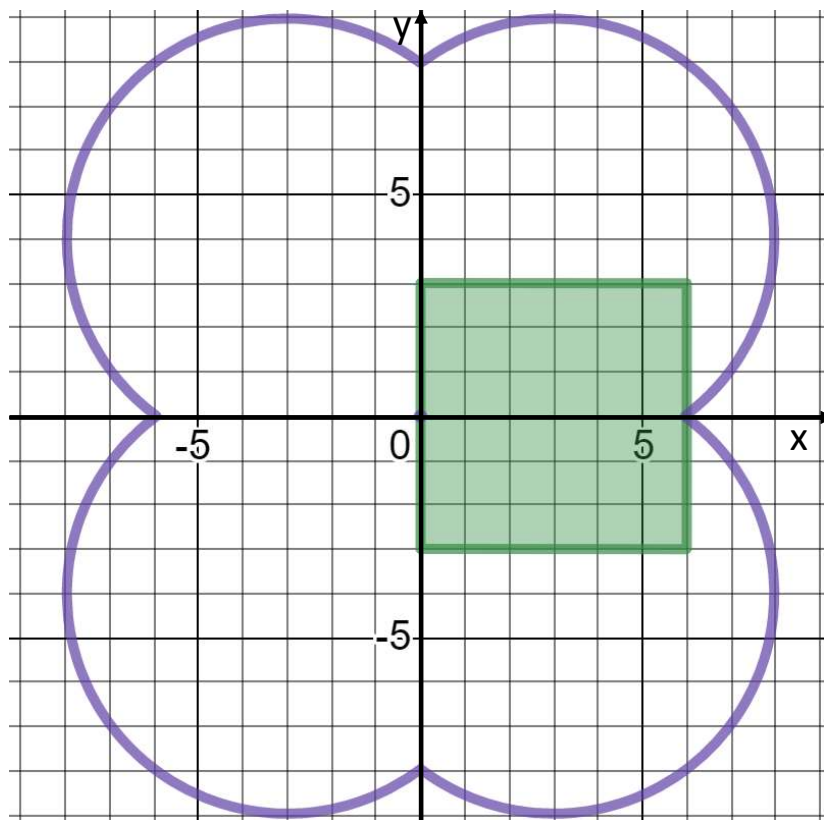


Рис. 2: вариант 1, задача 7

осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0; 0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Теперь становится видно, что множества имеют ровно две общие точки – т.е. система имеет два решения $(0; 0)$ и $(6; 0)$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(4 балла)** Найдены радиусы обеих окружностей баллы не добавляются;
 Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями ... 2 балла;
 составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты 1 балл.
2. **(4 балла)** Записано условие, при котором система уравнений имеет бесконечно много решений (пропорциональность коэффициентов уравнения или эквивалентное условие) 1 балл;
 записано условие пропорциональности, но не учтено, что оба коэффициента при одной переменной могут равняться нулю снять 1 балл;
 предполагается, что уравнения системы должны быть одинаковы 0 баллов за задачу;
 неэквивалентное преобразование системы (исходной или новой системы уравнений относительно параметров) не более 1 балла за задачу;
 потеряно хотя бы одно решение не более 2 баллов за задачу.
3. **(4 балла)** Уравнение сведено к кубическому 1 балл;
 сокращение обеих частей уравнения на линейную функцию произведено без проверки .. снять 1 балл;
 получен один лишний корень не более 2 баллов за задачу;
 получено более одного лишнего корня не более 1 балла за задачу.
4. **(6 баллов)** При решении рассмотрением двух случаев: по 3 балла за каждый случай;
 при другом способе решения: левая часть неравенства разложена на множители 3 балла.
5. **(4 балла)** За рассмотрение каждого из случаев по 1 баллу (при этом балл ставится, даже если результат в случае не сведён к числу);
6. **(5 баллов)** Доказано, что треугольник ACD равнобедренный прямоугольный (или найден один из его острых углов) 1 балл;
 при решении считается, что точка B – середина CD не более 1 балла за задачу.
7. **(6 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих неравенству системы .. 3 балла;
 если при этом стороны квадрата не параллельны осям координат не более 2 баллов за задачу;
 изображено множество точек, удовлетворяющих уравнению системы 2 балла;
 если при этом потеряно начало координат, то 1 балл вместо 2 баллов;
 неверный ответ вследствие неарифметической ошибки не более 4 баллов за задачу.