

ВАРИАНТ 5

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3 375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ. 1 680.

Решение. Ввиду того, что $3\,375 = 3^3 \cdot 5^3$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три тройки, три пятёрки и две единицы или (б) тройка, девятка, три пятёрки и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения троек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем три места из пяти оставшихся для размещения пятёрок ($C_5^3 = \frac{5!}{3!2!}$ способов). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{3!3!} = 1\,120$. Окончательно получаем $560 + 1\,120 = 1\,680$ способов.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\begin{aligned} -2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x &\Leftrightarrow -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0, \\ \cos 7x - \sin 7x = -\sqrt{2} \sin 4x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1, \\ \sin \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi k, \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Окончательно получаем $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2)$, $(9; 3)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Решение. Логарифмируем первое уравнение системы по основанию 10:

$$\lg \left(\frac{y^5}{x}\right) \cdot \lg x = \lg y^2 \cdot \lg(xy).$$

Это уравнение на области допустимых значений равносильно следующему:

$$(5 \lg y - \lg x) \lg x = 2 \lg y (\lg x + \lg y) \Leftrightarrow \lg^2 x - 3 \lg y \lg x + 2 \lg^2 y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lg x - \lg y)(\lg x - 2 \lg y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x - y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Записываем второе уравнение в виде $x^2 - 2x(y+2) + 12y - 3y^2 = 0$ и решаем его как квадратное относительно переменной x :

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 - (12y - 3y^2) = 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2 \Rightarrow x = y+2 \pm (2y-2).$$

Значит, $x = 3y$ или $x = 4 - y$. Далее возможны четыре случая:

$$\text{а) } \begin{cases} x = y, \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad \text{Точка } (0; 0) \text{ не удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = y, \\ x = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = y^2, \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9, \\ y = 3. \end{cases} \end{cases} \quad \text{Точка } (0; 0) \text{ не удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = y^2, \\ x = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y, \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y, \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Точка $\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$ не удовлетворяет ОДЗ.

Объединяя результаты, получаем итоговый ответ: $(2; 2), (9; 3), \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}, S = \frac{16}{9}$.

Решение. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO , а Q – вне него). Пусть радиус сферы равен r . Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R, SO$ – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (пусть $\angle KSO = \alpha, SO = x$). Высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO , равны, а их основания – одна и та же точка H , лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть β и γ касательные плоскости к сфере, проходящие через точки P и Q , а E и F – точки пересечения этих плоскостей с прямой SK . По условию площади сечений трёхгранного угла этими плоскостями равны соответственно $S_1 = 1$ и $S_2 = 4$. Рассмотрим сечение трёхгранного угла и сферы плоскостью SKO (см. рис. и обозначения на нем). Так как $SH \perp HK$ и $SH \perp HL$, то $\tau \perp SH$. Тогда сечения трёхгранного угла плоскостями τ, β и γ – подобные треугольники, плоскости которых параллельны (все они перпендикулярны SO).

Если Σ – площадь треугольника, получающегося в сечении трёхгранного угла плоскостью KLM , то из подобия $\Sigma : S_1 : S_2 = KH^2 : EP^2 : FQ^2$. Следовательно, $EP : FQ = \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$. Тогда $\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} = SP : SQ = (x - r) : (x + r)$, откуда $r = x \frac{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}}$, а $\sin \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}} = \frac{1}{3}$. Отсюда $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$.

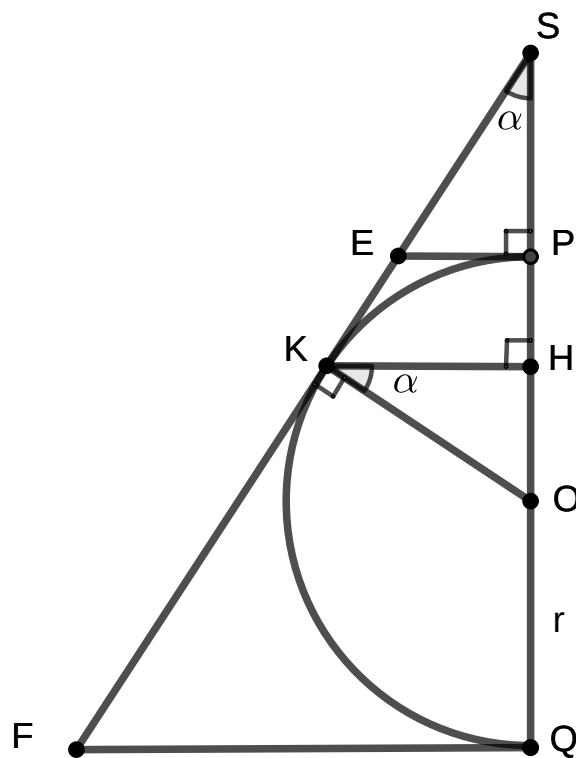


Рис. 1: вариант 5, задача 4

Далее, $OH = r \sin \alpha$, $SH = SO - OH = \frac{r}{\sin \alpha} - r \sin \alpha$, $SP = SO - r = \frac{r}{\sin \alpha} - r$. Значит, $\Sigma : S_1 = KH^2 : EP^2 = SH^2 : SP^2 = \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right)^2 : \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin \alpha)^2 = \frac{16}{9}$, откуда $\Sigma = \frac{16}{9}$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{1; 25\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y - 3 - x = 0$ и $y - 3 + x = 0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; -10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y - 3 - x$ и $y - 3 + x$ отрицательны. Таким образом, уравнение принимает вид $-(y - 3 - x) - (y - 3 + x) = 6$, откуда $y = 0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(3; 0)$ и $D(-3; 0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(3; 0)$, $B(3; 6)$, $C(-3; 6)$ и $D(-3; 0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y < 0$, поэтому можно считать, что $y \geq 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x| - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$ (опустив модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a < 0$, у уравнения нет решений. При $a = 0$ оно задаёт две точки $(4; 3)$ и $(-4; 3)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K , система не имеет решений, и значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a > 0$.

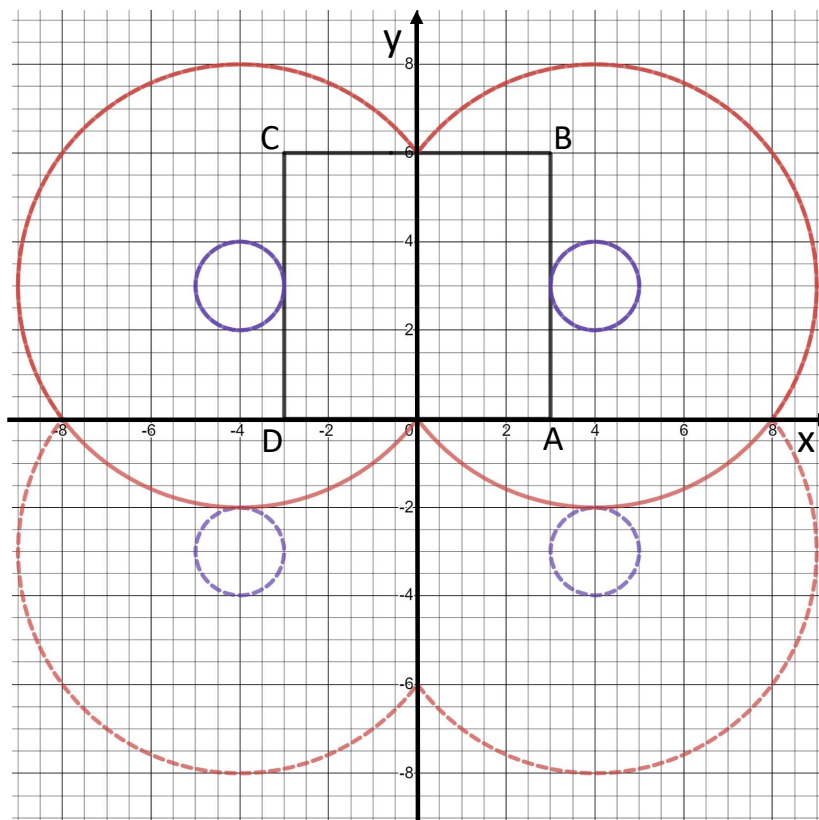


Рис. 2: вариант 5, задача 5

При $x \geq 0$ уравнение принимает вид $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(4; 3)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy . Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy .

Если $0 < a < 1$, график $(|x| - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$ не пересекает квадрат K , и система уравнений не имеет решений. Если $a = 1$, система уравнения имеет два решения – точки $X(3; 3)$ и $Y(-3; 3)$. Если $a \in (1, 10]$, дуга окружности $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, $x \geq 0$ пересекает отрезок AB дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (10, 25)$, дуга окружности $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, $x \geq 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a = 25$, система уравнений имеет два решения – точки $(0; 0)$ и $(0; 6)$. Наконец, если $a > 25$, дуга окружности $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, $x \geq 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a = 1$ и $a = 25$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

Ответ: а) $CF = 10$; б) $S_{ACF} = 49$.

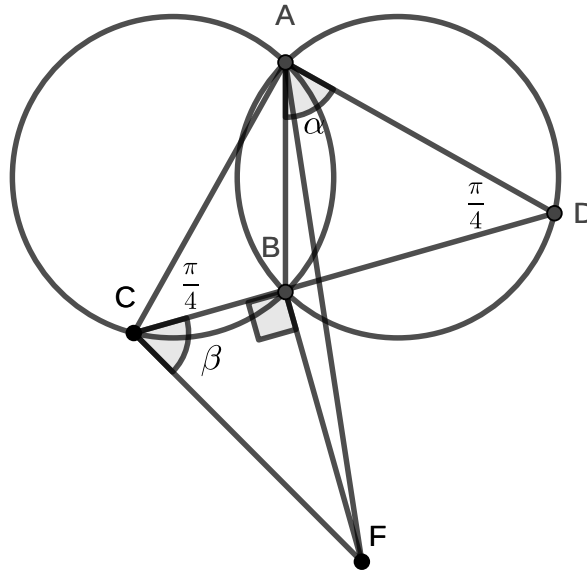


Рис. 3: вариант 5, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 5$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R \cos \alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 10$.

б) Так как $\operatorname{tg} \beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, то $\beta = \alpha$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB , поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cdot 2R \sin(\frac{\pi}{4} + \beta) = 2R^2 \sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) = R^2 (1 - \cos(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)) = R^2(1 + \sin 2\alpha) = R^2(1 + 2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha})$, где $\cos \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{3}{5}$. Значит, $S_{ACF} = 49$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Ответ. $61 \cdot 2^{69} + 2144$.

Решение. Пусть $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$, $g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вниз, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Координаты обеих точек легко подобрать. Действительно, $f(6) = 2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 64 + 6 \cdot 2^{64} = 70 + (2^{64} - 1)6 = g(6)$ и $f(70) = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 2^6 \cdot 2^{64} + 6 \cdot 2^{64} = 70 + (2^{64} - 1)70 = g(70)$. На промежутке $6 < x < 70$ график $f(x)$ лежит ниже графика $g(x)$. Поэтому система имеет целочисленные решения только при целых $x \in [7; 69]$ (так как первое неравенство системы строгое, точки пересечения графиков не являются решениями системы).

Заметим, что на отрезке $[7; 69]$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ лежат выше оси Ox . Поэтому искомое количество целочисленных точек мы получим, если из количества S_1 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $g(x)$ на отрезке $[7; 69]$, вычтем

количество S_2 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $f(x)$ на отрезке $[7; 69]$. При этом мы учтём, что первое неравенство системы строгое, а второе – нет.

Найдём S_1 . Так как на отрезке $[7; 69]$ лежат $69 - 7 + 1 = 63$ целочисленные точки, то $S_1 = 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1)(7 + 8 + \dots + 69) = 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 63 = 32 \cdot 63 + 2^{64} \cdot 38 \cdot 63 = 2016 + 2^{65} \cdot 1197$.

Найдём S_2 . Имеем: $S_2 = (2^7 + 3 \cdot 2^{65}) + (2^8 + 3 \cdot 2^{65}) + \dots + (2^{69} + 3 \cdot 2^{65}) = 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{69} + 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 = 2^{70} - 2^7 + 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 = 2^5 \cdot 2^{65} - 128 + 189 \cdot 2^{65} = 221 \cdot 2^{65} - 128$.

Искомое количество равно $S_1 - S_2 = 2016 + 2^{65} \cdot 1197 - (221 \cdot 2^{65} - 128) = 2144 + (1197 - 221) \cdot 2^{65} = 2144 + 976 \cdot 2^{65} = 2144 + 61 \cdot 2^{69}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

-
1. **(3 балла)** За рассмотрение каждого из двух случаев – по 1 баллу (при этом балл ставится, даже если результат в случае не сведён к числу).
-

2. **(5 баллов)** Уравнение сведено к совокупности двух тригонометрических уравнений (одно из них элементарное тригонометрическое, а второе имеет вид $\cos f(x) = \cos g(x)$ (или $\cos f(x) = \sin g(x)$ или $\sin f(x) = \sin g(x)$) – 2 балла;
решено элементарное тригонометрическое уравнение – 1 балл;
решено второе уравнение совокупности – 2 балла.
-

3. **(5 баллов)** Первое уравнение разложено на множители – 2 балла;
второе уравнение разложено на множители – 1 балл;
не учтено ОДЗ – снять 1 балл.
-

4. **(5 баллов)** Доказано, что плоскость KLM параллельна касательной плоскости – 1 балл;
найден угол KSO – 2 балла;
найдена площадь – 2 балла.
-

5. **(5 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы 1 балл;
за каждое найденное значение параметра – по 2 балла;
в ответ включены лишние значения параметра – не более 3 баллов за задачу.
-

6. **(6 баллов)** Решён пункт а) – 2 балла;
решён пункт б) – 4 балла;
доказано, что треугольник ACD равнобедренный прямоугольный (или найден один из его острых углов) – 1 балл (этот балл может суммироваться с 2 баллами за пункт а));
при решении считается, что точка B – середина CD (или аналогичное утверждение) – 0 баллов за дальнейшие рассуждения и не более 1 балла за задачу.
-

7. **(6 баллов)** Найдены координаты точек пересечения графиков – 2 балла (по одному баллу за каждую точку);
выпуклость вниз графика показательной функции и количество точек пересечения графиков обосновывать не обязательно;
количество точек посчитано, но результат не представлен в требуемом виде – 2 балла;
при подсчёте неверно учтены граничные точки – снять 1 балл.
-