

Ответы и решения

1-1. Ответ: 101. Решение. Перепишав уравнение в виде $(2^t - 7^t)^2 + (2^t - 1)^2 + (7^t - 1)^2 = 0$ (здесь $t = \sin x$), получаем, что $2^t = 7^t = 1$, то есть имеется единственное решение $t = 0$. Значит, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Так как $-\pi < -3,14 < 0$ и $100\pi < 315 < 101\pi$ (ввиду того, что $3,14 < \pi < 3,15$ и $\frac{315}{101} < 3,12$), то на данный отрезок попадают корни при $n = 0, 1, 2, \dots, 100$ – всего 101 корень.

1-2. Ответ: 101.

1-3. Ответ: 101.

1-4. Ответ: 101.

2-1. Ответ: $(0; 34(\sqrt{3} + 1)]$.

Решение. Среди всех параллелепипедов с заданной длиной сторон максимальный объем имеет прямоугольный параллелепипед. При изменении углов между сторонами объем может стать сколь угодно малым, принимая все промежуточные значения.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + (ab + bc + ac) + (a + b + c) + 1.$$

По теореме Виета для многочленов корни a , b и c уравнения

$$x^3 - (10 + \sqrt{3})x^2 + (23 + 10\sqrt{3})x - 23\sqrt{3} = 0$$

удовлетворяют соотношениям $a + b + c = 10 + \sqrt{3}$, $ab + bc + ac = 23 + 10\sqrt{3}$, $abc = 23\sqrt{3}$.

Поэтому объем прямоугольного параллелепипеда равен $23\sqrt{3} + 23 + 10\sqrt{3} + 10 + \sqrt{3} + 1 = 34 + 34\sqrt{3}$. Значит, объем может принимать значения $(0; 34(\sqrt{3} + 1)]$.

Заметим, что можно было, вместо этого, искать корни уравнения (это $\sqrt{3}$ и $5 \pm \sqrt{2}$), но это более сложно и трудоемко.

2-2. Ответ: $(0; 33(\sqrt{2} + 1)]$.

2-3. Ответ: $(0; 14(\sqrt{5} + 1)]$.

2-4. Ответ: $(0; 22(\sqrt{2} + 1)]$.

3-1. Ответ: 75.

Решение. Так как углы ABD и CAD равны (два острых угла с соответственно перпендикулярными сторонами), то $\triangle MBN = \triangle DAC$.
 Обозначим в этих треугольниках $BM = BN = AD = AC = a$,
 $\angle MBN = \angle DAC = 2\alpha$. Тогда $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$, $\angle MCA = 90^\circ - \angle DNC = 90^\circ - \angle MNB = \alpha$, и по теореме синусов в $\triangle AMC$:

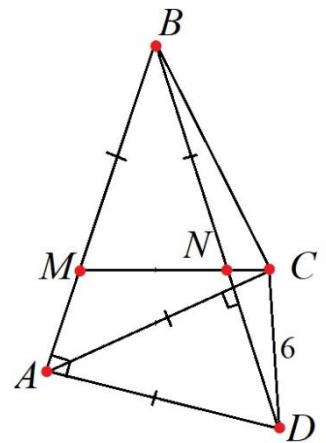
$$\frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin(90^\circ + \alpha)} \Leftrightarrow AM = a \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда $AD = AB \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow a = (a + AM) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 = (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

Значит, высота в $\triangle DAC$, проведенная из вершины A , равна 9, $AD = a = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

Тогда $AB = AM + MB = \sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$. Диагонали четырехугольника равны $AC = a = 3\sqrt{10}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16 \cdot 10 + 9 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$. Поэтому $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 75$.



3-2. Ответ: 300.

3-3. Ответ: 75.

3-4. Ответ: 300.

4-1. Ответ: 47 или 61.

Решение. Так как остаток от деления числа $\overline{abcd}$ на 11 равен остатку от деления на 11 знакопеременной суммы его цифр: $d - c + b - a$ (этот факт легко получить, если вспомнить признак делимости на 11 и его доказательство), то при делении на 11 число $\overline{793a}$ имеет остаток $(a - 1)$, а число $\overline{1b09}$ имеет остаток $(b + 8)$. Значит, произведение $(a - 1)(b + 8)$ при делении на 11 имеет тот же остаток, что и произведение исходных четырехзначных чисел.

Так как a и b цифры, то $a - 1 \in [-1; 8]$, $b + 8 \in [8; 17]$. При этом произведение $(a - 1) \cdot (b + 8)$ должно давать остаток 1 при делении на 11, а значит, оно может быть равно одному из чисел $-10, 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 111, 122, 133$.

Подходящие варианты:

$a - 1$	$b + 8$	$(a - 1)(b + 8)$	$(a; b)$	Числа
-1	10	-10	(0; 2)	2; 20
1	12	12	(2; 4)	24; 42
2	17	34	(3; 9)	39; 93
5	9	45	(6; 1)	61; 16
3	15	45	(4; 7)	47; 74
4	14	56	(5; 6)	56; 65
7	8	56	(8; 0)	80; 8
6	13	78	(7; 5)	75; 57

Простыми двузначными являются два числа 61 и 47.

4-2. Ответ: . 19 или 23.

4-3. Ответ: 47 или 61.

4-4. Ответ: 19 или 23.

5-1. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Васи вероятность больше, она равна 157/288.

Решение. Рассмотрим один ход. Всего имеется $12 \cdot 36$ различных равновероятных исходов бросков. В зависимости от числа очков, выпавших у Пети (все эти 12 случаев равновероятны), количество исходов, при которых у Васи выпадает соответственно или столько же очков, или меньше, или больше, чем у Пети, указано в следующей таблице:

П	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$B = П$	k_i	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$B < П$	l_i	0	0	1	3	6	10	15	21	26	30	33	35
$B > П$	m_i	36	35	33	30	26	21	15	10	6	3	1	0

Если отбросить временно первый столбец (соответствующий значению $i = 1$), то в этой укороченной таблице:

- 1) число из любого столбца третьей строки получается суммированием чисел из предыдущих столбцов второй строки, а число четвёртой строки – суммированием чисел из следующих столбцов второй строки;
- 2) вторая строка симметрична относительно её среднего числа с номером $i = 7$, т.е. $k_{14-i} = k_i$, поскольку каждому исходу (a, b) бросания двух кубиков с суммой $a + b = i$ взаимно-однозначно соответствует «симметричный» исход $(a', b') = (7 - a, 7 - b)$ с суммой $a' + b' = 14 - i$;
- 3) из первых двух пунктов следует, что третья и четвертая строки также симметричны друг другу относительно 7-го столбца.

Далее, теперь уже в полной таблице:

- 4) во второй строке сумма чисел равна 36 (поскольку каждый из 36 исходов (a, b) бросания двух кубиков учтён ровно здесь один раз – в столбце с соответствующим значением суммы $a + b = i$);
- 5) сумма чисел S четвёртой строки, из-за числа 36 в её самом первом столбце, на 36 больше, чем в третьей, поэтому она больше сумм чисел как второй, так и третьей строки, а сумма чисел всех трёх этих строк равна

$$12 \cdot 36 = 36 + (S - 36) + S = 2S \Rightarrow S = 6 \cdot 36.$$

Таким образом, четвертая строка содержит в точности $1/2$ всех исходов, третья – $5/12$, а вторая – $1/12$. Последние три числа как раз и совпадают с вероятностями Васиного выигрыша, проигрыша и ничьей соответственно.

Таким образом, после первого хода вероятность выигрыша Васи равна $1/2$, а вероятность выигрыша Пети равна $5/12$.

Вероятность ничьей после 3-х ходов равна

$$\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}.$$

В итоге Вася выиграет с вероятностью

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{144 + 12 + 1}{12 \cdot 12} = \frac{157}{288}.$$

Петя выиграет с вероятностью

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \cdot \frac{144 + 12 + 1}{12 \cdot 12} = \frac{785}{1728}.$$

Вероятность выигрыша больше у Васи, так как

$$\frac{157}{288} = \frac{942}{1728} > \frac{785}{1728}.$$

Легко убедиться, что сумма последних трех вероятностей равна 1.

Заметим, что в условии задачи в вопросе Б стоял лишний предлог НЕ, в результате чего этот вопрос задачи мог трактоваться неоднозначно. Засчитывались, как правильные, решения с любой возможной трактовкой вопроса Б.

5-2. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Тани вероятность больше, она равна 157/288.

5-3. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Захара вероятность больше, она равна 157/288.

5-4. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Оли вероятность больше, она равна 157/288.

6-1. Лемма. Если точки $(a; P(a))$ и $(b; P(b))$ графика многочлена лежат по разные стороны от прямой $y = kx + d$, то в полосе между прямыми $x = a$ и $x = b$ график и прямая имеют хотя бы одну общую точку (пересекаются); таких точек – конечное число.

Доказательство леммы. Пусть $Q(x) = P(x) - (kx + d)$. Тогда Q — многочлен, который принимает в точках a и b значения разных знаков. Так как многочлен непрерывен на всей числовой прямой, то Q имеет в интервале $(a; b)$ хотя бы один корень, то есть $Q(c) = 0$ или $P(c) = kc + d$. Значит, $(c; P(c))$ — точка пересечения. Число таких точек конечно, так как многочлен Q имеет конечное число корней. Лемма доказана.

Абсциссы вершин треугольника попарно различны, так как всякому значению переменной x соответствует только одно значение $P(x)$. Обозначим A, B, C эти точки так, чтобы $x_A < x_C < x_B$. Для точки на стороне треугольника утверждение задачи очевидно.

Рассмотрим точку D внутри треугольника и случай, когда $x_A < x_D \leq x_C$; случай $x_C < x_D \leq x_B$ рассматривается аналогично. Через D проведем прямую $l \parallel AB$. Применим лемму к многочлену, к прямой l , и к отрезкам $[x_A; x_C]$ и $[x_C; x_B]$. Найдём точки E и F пересечения графика и прямой l такие, что $x_A < x_E < x_C$, $x_C < x_F < x_B$. Так как таких точек конечное число, то можно считать, что E — это точка с наименьшей абсциссой. Тогда при $x_A < x < x_E$ график лежит относительно l по ту же сторону, что и вершина A .

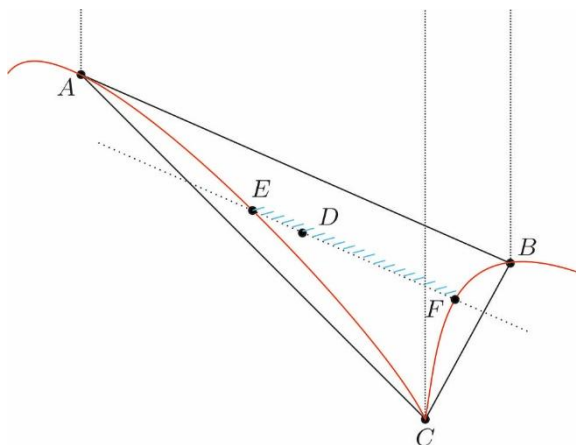


Рис. 1

Если $D \in [E; F]$, см. рис 1, то утверждение задачи верно, так как $[E; F]$ можно параллельно сдвинуть в сторону AB , длиной меньше 1.

Значит, $|EF| \leq |AB| < 1$.

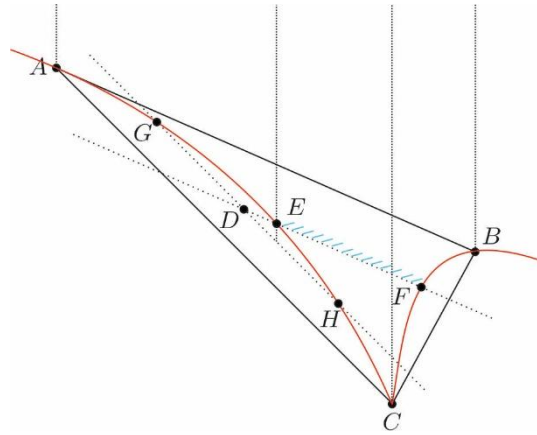


Рис. 2

Если D не принадлежит $[E; F]$, см. рис 2, то $x_D < x_E$. Проведём через D прямую $t \parallel AC$.

Теперь применим лемму к прямой t и отрезкам $[x_A; x_E]$, $[x_E; x_C]$. Найдём точки G и H пересечения графика и прямой t такие, что $x_A < x_G < x_E$, $x_E < x_H < x_C$. Тогда $D \in [G; H]$, а отрезок $[G; H]$ можно параллельно сдвинуть в сторону AC .

Значит, $|GH| \leq |AC| < 1$.