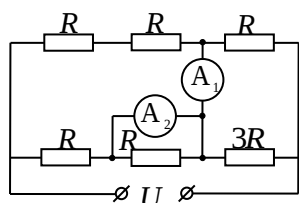
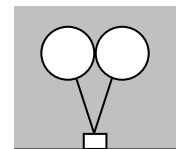


Решения
Отборочный тур олимпиады «Росатом», 2022-2023 учебный год,
физика, 11 класс

1. Два тела бросили из одной точки поверхности земли с одинаковыми начальными скоростями под разными углами к горизонту. Тела упали в одну и ту же точку через время t и $2t$ после броска. Под каким углом к горизонту бросили первое тело, а под каким второе тело?

2. Два одинаковых сферических поплавка радиуса R и массой m плавают в воде, погружившись в нее наполовину. К поплавкам привязывают веревку длиной l , к середине которой прикрепляют тяжелый груз. Поплавки с грузом тонут (см. рисунок).

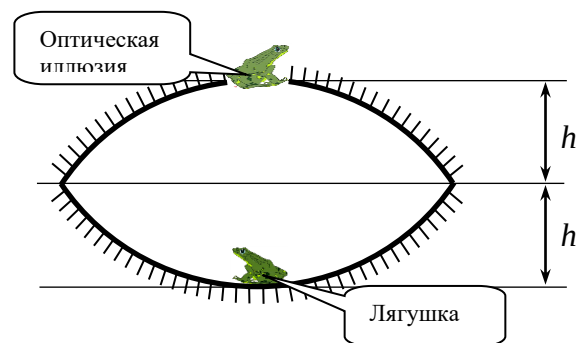


Найти силу натяжения веревки и силу, с которой шары действуют друг на друга.

3. В цепи, схема которой представлена на рисунке, $R = 10$ Ом, амперметры идеальны, провода сопротивления не имеют. Напряжение U на зажимах источника $U = 100$ В. Найти показания амперметров.

4. Горизонтальный цилиндрический сосуд разделен на две равные части тонким подвижным поршнем. Вначале поршень удерживают, а в отсеках сосуда размещают ν и 2ν молей одноатомного идеального газа при одинаковой температуре. Затем поршень отпускают. Найти объемы отсеков сосуда в тот момент, когда поршень достигнет максимальной скорости. Объем сосуда - V . Трением и теплообменом пренебречь. Считать, что поршень движется достаточно медленно так, что выполнены условия адиабатичности процессов, происходящих с газом в отсеках сосуда. **Указание.** Для адиабатического процесса справедливо уравнение: $pV^{5/3} = \text{const}$. $pV^{5/3} = \text{const}$.

5. Оптическая игрушка «Мираскоп» представляет собой два вогнутых сферических зеркала (одно – с отверстием) и маленький предмет –



игрушечную лягушку. Зеркала ставят друг на друга зеркальными поверхностями друг к другу так, что отверстие находится в верхнем зеркале, лягушку кладут в центр нижнего зеркала на его поверхность (левый рисунок; верхнее зеркало приподнято, чтобы было видно лягушку). В результате возникает оптическая иллюзия: кажется, что лягушка сидит посередине отверстия в верхнем зеркале, перевернутая по сравнению с настоящей лягушкой в горизонтальном направлении, не перевернутая в вертикальном и несколько больше самой лягушки. Иллюзия сохраняется и на фотографии (то, что мы видим на среднем рисунке не лягушка, а иллюзия; «кусочек» настоящей лягушки виден в самой нижней части отверстия). Считая известным, что сферическое зеркало создает изображение любого источника, объясните: (1) почему возникает оптическая иллюзия? (2) почему иллюзия перевернута в

горизонтальном направлении, но не перевернута в вертикальном? (3) Считая, что высота h каждого зеркала равна $R/4$ (см. рисунок), а высота лягушки $\delta = R/8$ (где R - радиус кривизны зеркал), оцените, во сколько раз иллюзия больше настоящей лягушки. Считать, что все лучи, падают на поверхности зеркал под малыми углами (параксиальное приближение).

Решения

1. Пусть первое тело бросили под углом α , второе под углом β . Дальность полета тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, определяется соотношением

$$l = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Чтобы дальность полета для разных углов α и β совпадала, нужно, чтобы

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

Далее, из формулы для времени движения имеем

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ и } 2t = \frac{2v_0 \sin \beta}{g} = \frac{2v_0 \cos \alpha}{g}$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \text{ или } \alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Использование правильной формулы для дальности полета – 0,5 балла
2. Правильное соотношение между углами бросания – 0,5 балла
3. Использование правильной формулы для времени полета – 0,5 балла
4. Правильный ответ для углов бросания – 0,5 балла

2. На каждый шар действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения веревки $\vec{T}$, сила Архимеда $\vec{F}_A$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны второго тела, направленная горизонтально (см. рисунок; показаны силы, действующие только на один шар). Из условия равновесия шаров имеем

$$T \cos \alpha + mg = F_A$$

где α - угол между веревкой и вертикалью. Поскольку свободно плавающие шары погружаются в воду на половину объема, сила Архимеда, действующая на полностью погруженный в воду шар, вдвое больше его силы тяжести. Поэтому условие равновесия дает

$$T \cos \alpha = mg$$

Косинус угла α легко найти геометрически. Очевидно

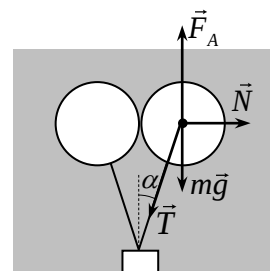
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{(l/2 + R)^2 - R^2}}{l/2 + R} = \frac{\sqrt{l(l + 4R)}}{l + 2R}$$

Отсюда находим

$$T = \frac{mg(l + 2R)}{\sqrt{l(l + 4R)}}$$

Сила реакции шаров равна горизонтальной проекции силы натяжения нити

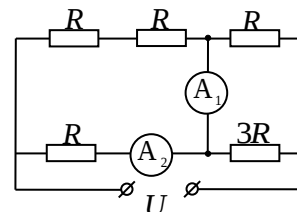
$$N = T \sin \alpha = T \frac{R}{l/2 + R} = \frac{2mgR}{\sqrt{l(l + 4R)}}$$



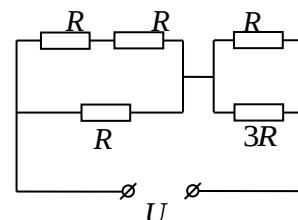
Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Правильное условие равновесия шаров в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси – 0,5 балла**
- 2. Правильно найдена сила Архимеда, действующая на шар – 0,5 балла**
- 3. Правильные формулы для тригонометрических функций через радиус шара и длину нити – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ для силы реакции – 0,5 балла**

3. Поскольку амперметры и провода не имеют сопротивления, напряжение на среднем резисторе в нижней ветви цепи равно нулю, и ток через него не течет. Поэтому этот резистор можно удалить из цепи без изменения токов во всех остальных участках, и представить данную цепь в виде, показанном на верхнем рисунке. Из этого рисунка видим, что показания амперметра A_1 – ток I_1 – равен разности токов, текущих через два левых резистора в верхней ветви и правый резистор в верхней ветви цепи. А показания амперметра A_2 – ток I_2 – равен току, текущему через левый резистор в нижней ветви цепи.



А эти токи легко найти, заменив амперметры проводами с нулевым сопротивлением - см. нижний рисунок, из которого видим, что наша цепь представляет собой два последовательно соединенных участка, один из которых параллельное соединение двух резисторов R и одного R , а второй – параллельное соединение резисторов R и $3R$.



Общее сопротивление цепи находим по стандартным правилам сложения последовательно и параллельно соединенных резисторов

$$R_{\text{об}} = \frac{17R}{12}$$

Потому ток в цепи равен

$$I = \frac{12U}{17R}$$

В левом блоке параллельных резисторов $R-R$ и R этот ток делится в пропорции 1:2, в правом блоке параллельных резисторов R и $3R$ - в пропорции 3:1. Отсюда можно найти токи, текущие через все резисторы.

Через левую-верхнюю ветвь цепи (резисторы R и R) течет ток

$$I_{R-R} = \frac{1}{3}I = \frac{4U}{17R}.$$

Через левую-нижнюю ветвь (нижний резистор R) течет ток

$$I_{R,n} = \frac{2}{3}I = \frac{8U}{17R}$$

Через правую-верхнюю ветвь (верхний резистор R) течет ток

$$I_{R,g} = \frac{3}{4}I = \frac{9U}{17R}$$

Через правую нижнюю ветвь (резистор $3R$) течет ток

$$I_{3R} = \frac{1}{4} I = \frac{3U}{17R}$$

Отсюда получаем

$$I_1 = I_{R,g} - I_{R-R} = \frac{9U}{17R} - \frac{4U}{17R} = \frac{5U}{17R} = 2,9 \text{ А}, \quad I_2 = I_{R,н} = \frac{8U}{17R} = 4,7 \text{ А}$$

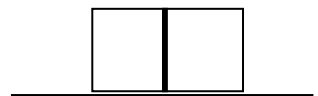
Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное (и обоснованное) выбрасывание нижнего центрального резистора – 0,5 балла
2. Правильно найдено общее сопротивление цепи – 0,5 балла
3. Правильный ответ для показаний амперметра A_2 – 0,5 балла
4. Правильный ответ для показаний амперметра A_1 – 0,5 балла

4. Из-за разных концентраций молекул давление газа в отсеках будет от-

личаться вдвое, и поршень после освобождения начнет двигаться. При

этом давление газа в отсеке с бóльшим давлением будет убывать, в отсе-



ке с меньшим давлением расти. Очевидно, что поршень будет разгоняться вплоть до того момента, пока давления в отсеках сосуда не сравняются. Пусть давление газа в отсеках сосуда в этот момент равно p , а объемы отсеков - v и $V-v$ (где v - объем того отсека, где содержится меньшее количество газа, V - объем всего сосуда за вычетом объема поршня). Тогда уравнение адиабатического процесса, данное в указании к условию дает

$$pv^{5/3} = p_0(V/2)^{5/3}, \quad p(V-v)^{5/3} = 2p_0(V/2)^{5/3}$$

где p_0 - первоначальное давление в том отсеке, где содержится меньшее количество газа (здесь учтено, что давление в отсеке с бóльшим количеством газа вдвое больше). Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{v^{5/3}}{(V-v)^{5/3}} = \frac{1}{2}$$

Отсюда находим объемы отсеков сосуда в момент достижения поршнем максимальной скорости

$$v_1 = v = \frac{V}{1+2^{3/5}}, \quad v_2 = V-v = \frac{2^{3/5}V}{1+2^{3/5}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – скорость поршня достигает максимального значения, когда давления в отсеках сосуда сравниваются друг с другом – 0,5 балла
2. Правильное использование уравнения адиабаты для газа в отсеках сосуда – 0,5 балла
3. Правильное уравнение для объема отсеков сосуда – 0,5 балла
4. Правильные ответы для объемов отсеков сосуда – 0,5 балла

5. Введем несколько определений. Назовем центр сферы, образующей зеркало (т. О на рисунке) оптическим центром зеркала, прямую АВ, проходящую через центр перпендикулярно кругу, «замыкающему зеркало», главной оптической осью зеркала, точку пересечения главной оптической оси и зеркала (точку Р) – полюсом зеркала, точку F, лежащую на главной оптической оси посередине между центром и полюсом (на расстоянии $R/2$ от них) – фокусом зеркала (см. рисунок 1).

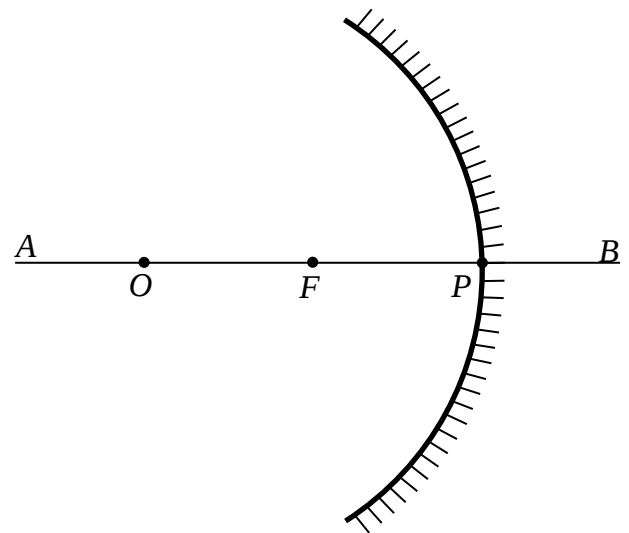


Рис.1

Давайте докажем несколько утверждений, касающихся построения хода лучей в сферическом зеркале (здесь и далее рассматриваются только лучи, падающие на зеркало под малыми углами).

1. Любой луч, проходящий через оптический центр зеркала и отражающийся от него, снова пройдет через оптический центр.
2. Любой луч, параллельный главной оптической оси зеркала, после отражения от зеркала, пройдет через его фокус.
3. Углы между главной оптической осью и лучом, падающим на полюс, и главной оптической осью и отражением этого луча одинаковы.

Пункты 1 и 3 – точные, т.е. выполняются для любых лучей, а их доказательства очевидны. Доказательство пункта 2 является следующим. Рассмотрим луч ХС, параллельный главной оптической оси и падающий в точку С сферического зеркала. Тогда треугольник AFC – равнобедренный, поскольку равны углы COB и FCO ($\angle BOC = \angle XCO$ - как внутренние накрест лежащие при параллельных АВ и ХС и секущей ОС, $\angle OCF = \angle XCO$ - как углы падения и отражения луча). Поскольку $\angle AFC = 180^\circ - 2\alpha$, из теоремы синусов для треугольника OCF имеем

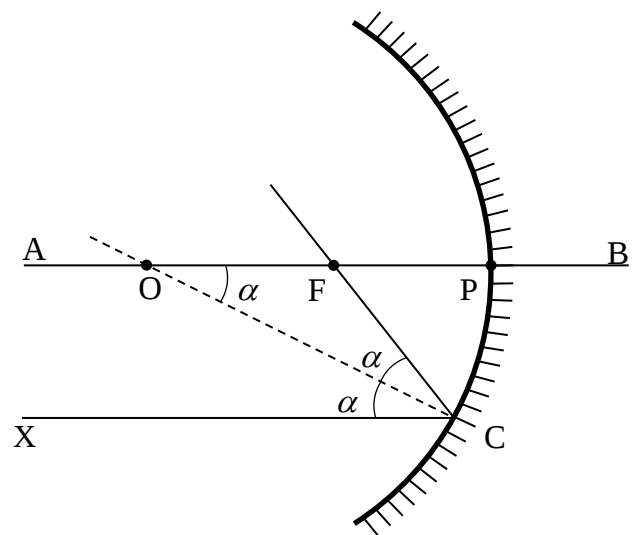


Рис. 2.

$$\frac{OC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{OF}{\sin \alpha} \quad (1)$$

Используя соответствующую формулу приведения и учитывая, что углы α и 2α по условию малы, получаем из (1)

$$OF = F = \frac{R}{2} \quad (2)$$

Поскольку точка пересечения луча и главной оптической оси не зависит от угла α , в эту точку придут все лучи, параллельные главной оптической оси. Величину F в дальнейшем будем называть фокусным расстоянием зеркала.

Докажем теперь, что изображение точечного источника, лежащего на главной оптической оси зеркала на расстоянии, большем его фокусного расстояния, действительно. А изображение источника, лежащего на главной оптической оси на расстоянии, меньшем фокусного расстояния, - мнимо. Согласно указанию к задаче изображение любого точечного источника существует, поэтому достаточно найти точку пересечения любых двух лучей, вышедших из источника. Очевидно, изображение источника, лежащего на главной оптической оси, лежит на главной оптической оси. Рассмотрим луч SC , вышедший из источника. Так как для источника, находящегося от зеркала дальше фокуса, $\angle SCO < \angle FCO$, а луч FC после отражения от зеркала идет параллельно главной оптической оси, то луч SC после отражения пересечет главную оптическую ось в некоторой точке S' , где и будет находиться изображение рассматриваемого точечного источника (рис. 3). А вот для источника, который находится от зеркала на расстоянии, меньшем фокусного, $\angle SCO > \angle FCO$, и отраженный луч не пересекает главную оптическую ось

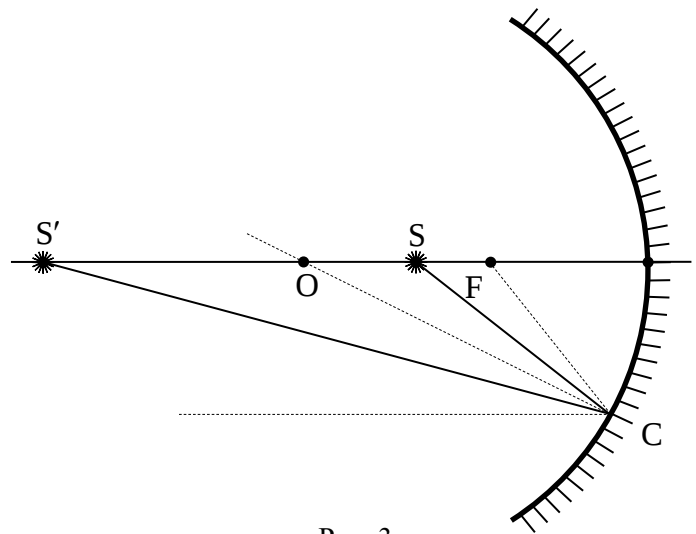


Рис. 3.

(так как, луч, вышедший из фокуса, отразится параллельно главной оптической оси). Поэтому в этом случае изображение источника будет мнимым, и лежать оно будет за зеркалом (см. рисунок 4).

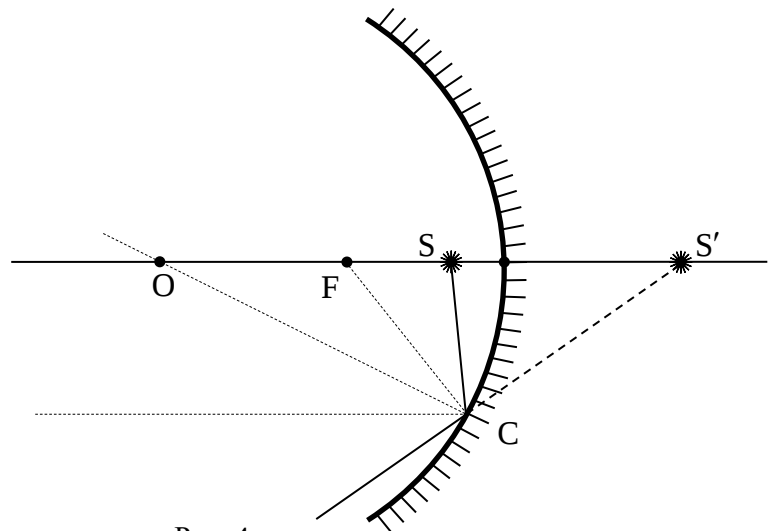


Рис. 4.

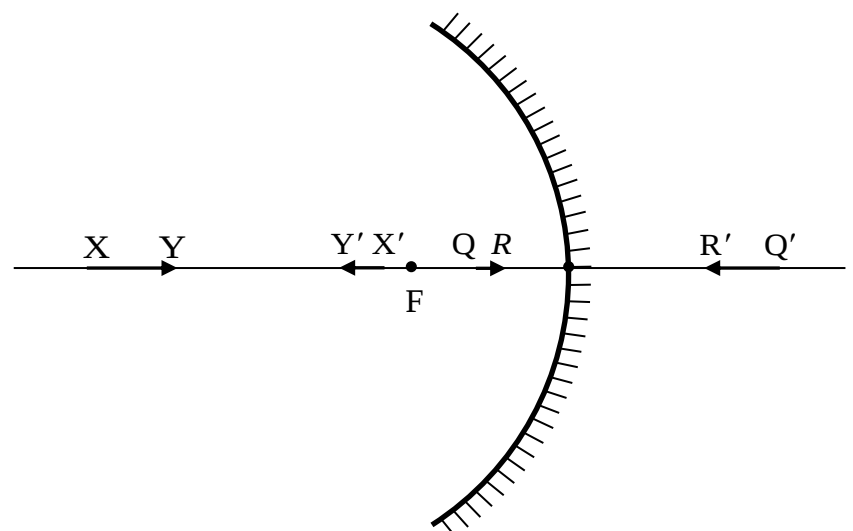


Рис. 5.

При этом очевидно, что и в том, и в другом случае зеркало перевернет изображение в направлении «право-лево» (рис. 5). А вот перево-

рот изображения в направлении «верх-низ» будет происходить по-разному. Изображение источника, расположенного от зеркала на расстоянии, большем фокусного, будет перевернуто в направлении «верх-низ», меньшем фокусного – не перевернуто. Это легко понять, если рассмотреть луч, падающий на полюс зеркала и учесть, что изображение первого источника будет действительным, второго – мнимым (рис. 6).

Поэтому ориентация изображения для первого и второго рассмотренных случаев (а нам в дальнейшем понадобятся оба этих случая) будет такой, как это показано на рисунке 7. В первом случае предмет (треугольник) отмечен буквой Т, его изображение – буквой Т'. Во втором случае предмет (сегмент) отмечен буквой С, его изображение – буквой С'.

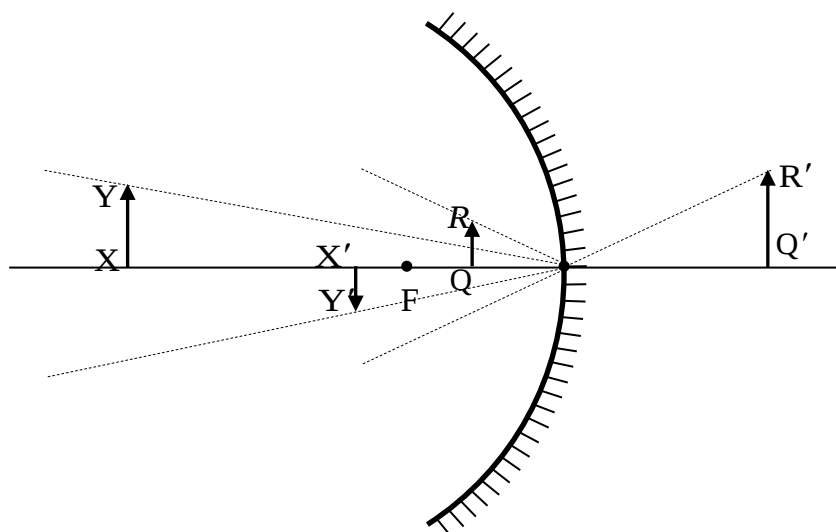


Рис. 6.

Теперь можно перейти к построению изображения лягушки в двух зеркалах. Поскольку по условию высоты зеркал равны четверти радиуса кривизны зеркал, фокус верхнего зеркала попадает на самую нижнюю точку нижнего зеркала, фокус нижнего зеркала – в середину отверстия в верхнем зеркале.

Поэтому если бы лягушка была точечной, она находилась бы точно в фокусе верхнего зеркала. Поэтому любой луч, попавший в отверстие и отразившийся от лягушки после отражения от верхнего зеркала, будет распространяться параллельно главной оптической оси зеркал. Поэтому на нижнее зеркало будет падать пучок параллельных лучей, которые после отражения от нижнего зеркала должны сойтись в его фокусе, т.е. точно в середине отверстия (рис. 8). Таким образом, все лучи, отразившиеся от лягушки, соберутся в середине отверстия, и, следовательно, в этой точке будет находиться изображение лягушки в двух зеркалах. А поскольку здесь будут сходиться сами световые лучи, это изображение будет действительным. Следовательно, оптическая иллюзия представляет собой действительное изображение лягушки.

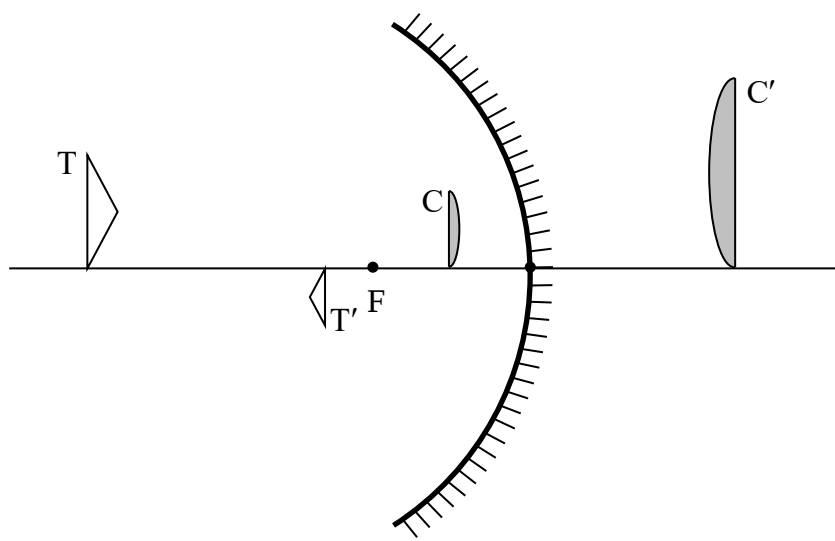


Рис. 7.

Разберем теперь вопрос об ориентации изображения лягушки. Для этого учтем, что лягушка неточечная. Тогда в рассматриваемом случае $2h = R/2$ лягушка находится ближе фокуса к верхнему зеркалу, и, следовательно, верхнее зеркало создает мнимое изображение лягушки, которое находится очень далеко за верхним зеркалом, перевернуто в направлении «верх-низ» и не перевернуто в направлении «право-лево», как это было проиллюстрировано выше (рисунок 9, левая часть, лягушка отмечена символом Л, ее изображение в верхнем зеркале - Л'). В результате на нижнее зеркало падают такие лучи, которые были как бы отражены этим изображением. А поскольку это изображение находится далеко то нижнего зеркала, оно создаст его действительное изображение (Л'' на рисунке 9), которое будет перевернуто и в направлении «верх-низ», и в направлении «право-лево» (рис. 9, правая часть).

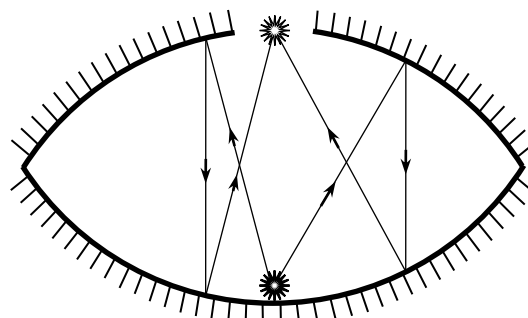


Рис. 8

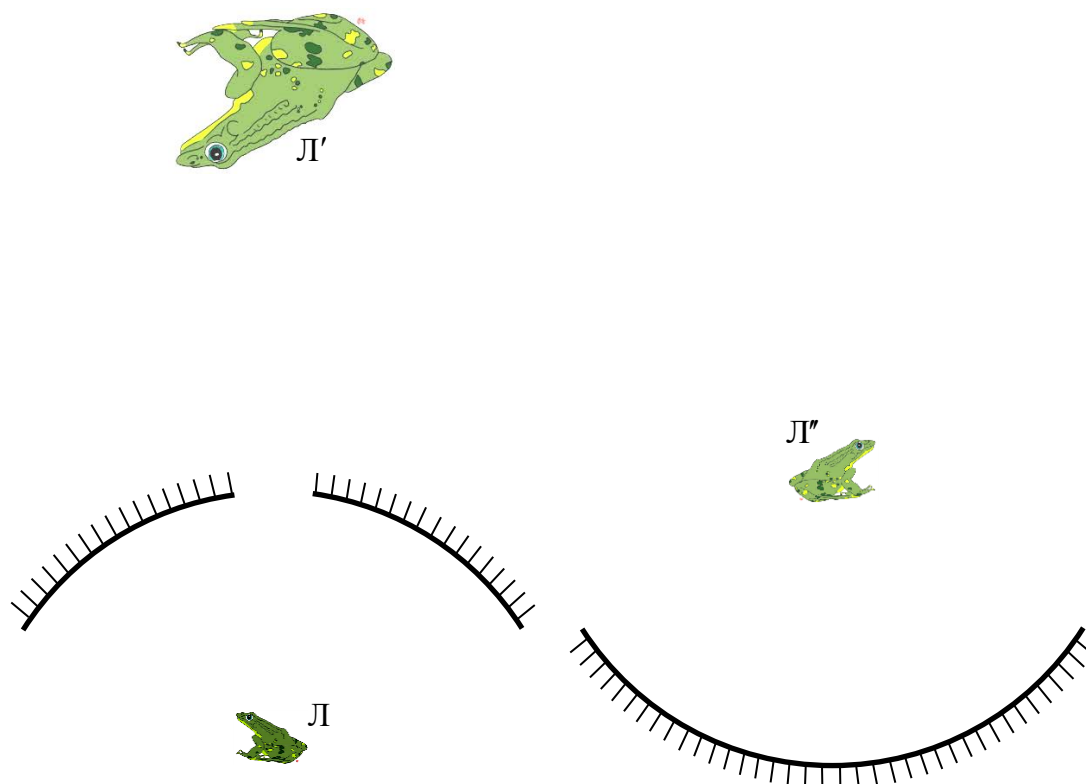


Рис. 9.

Таким образом, два зеркала создают действительное изображение лягушки, дважды перевернутое в направлении «верх-низ» (т.е. оставшееся в той же ориентации «верх-низ», что и лягушка) и перевернутое в направлении «право-лево».

Теперь давайте рассмотрим вопрос об изображении лягушки количественно. Пусть лягушка, имея высоту δ (этот размер задан в условии и равен $R/8$), имеет в поперечном направлении размер a (рисунок 10; на рисунке этим размерам отвечают отрезки AB и BF соответственно). Давайте построим изображение отрезка AB в верхнем зеркале (которое для удобства построений показано на рисунке без отверстия) и найдем размер изображения.

Для построения изображения отрезка AB возьмем такие два луча, проходящие через точку A . Это, во-первых, луч, проходящий через фокус зеркала и идущий после отражения параллельно главной оптической оси. А во-вторых, луч, падающий на полюс, который после отражения пойдет под таким же углом к главной оптической оси, что и падающий луч. Точка пересечения их продолжений (A') и будет изображением точки A .

Далее. Из подобия треугольников ABF и CDF имеем

$$\frac{a'}{a} = \frac{F}{\delta} \quad (3)$$

где a' - размер изображения в верхнем зеркале (в случае малых углов падения лучей $DF \approx F$). С другой стороны, из подобия треугольников APB и $A'PB'$

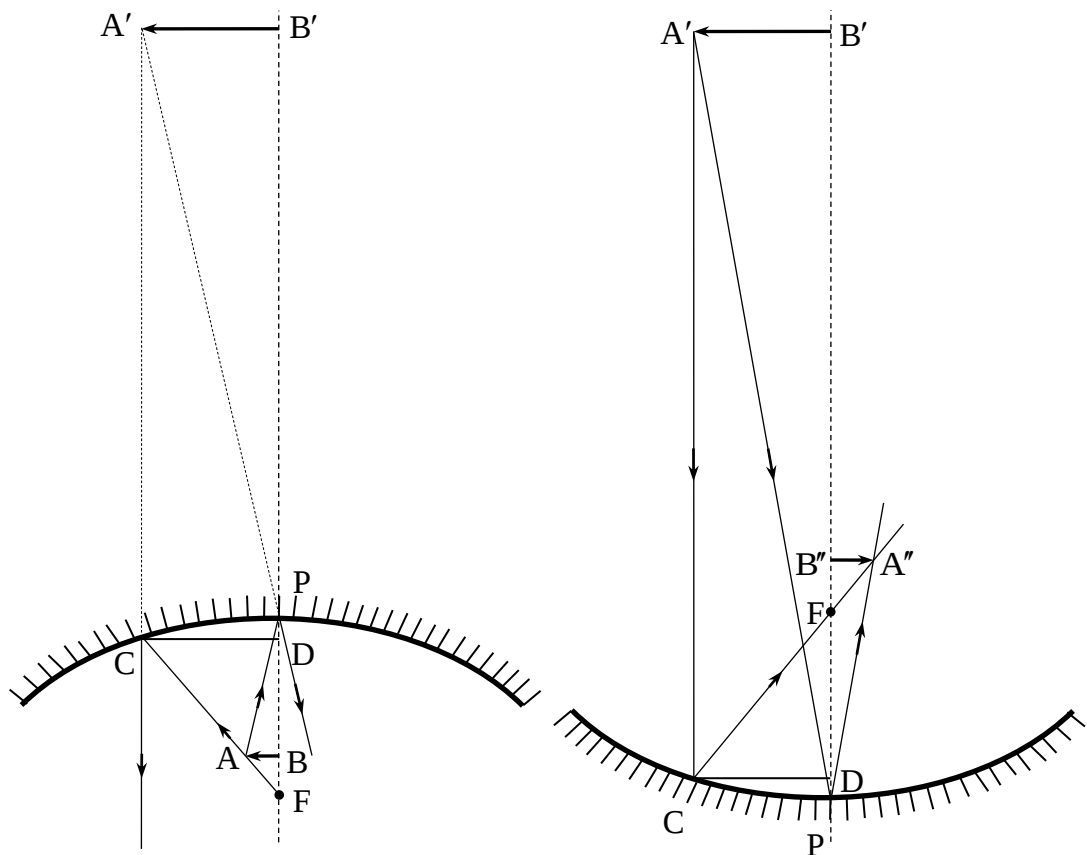


Рис. 10

$$\frac{a'}{a} = \frac{f}{F - \delta} \quad (4)$$

где $f = B'P$ - расстояние от зеркала до изображения. Из этих формул находим

$$f = \frac{F(F - \delta)}{\delta} \text{ и } a' = \frac{F}{\delta} a \quad (5)$$

Теперь построим изображение изображения лягушки в верхнем зеркале в нижнем зеркале. Луч, вышедший из точки A' и падающий на полюс нижнего зеркала отражается под тем же углом к главной оптической оси, луч, проходящий через фокус, отражается параллельно главной оптической оси. Находя точку их пересечения, получаем изображение точки A' в нижнем зеркале. В результате находим отрезок $A''B''$, являющийся изображением отрезка AB в двух зеркалах. Найдем его размеры.

Из подобия треугольников $A'PB'$ и $A''PB''$ получаем

$$\frac{a''}{a'} = \frac{f_1}{f + F} = \frac{f_1 \delta}{F^2} \quad (6)$$

где f_1 - расстояние от изображения $A''B''$ до зеркала. С другой стороны, из подобия треугольников CDF и $A''FB''$ имеем

$$\frac{a''}{a'} = \frac{f_1 - F}{F} \quad (7)$$

(в формуле (7) учтено, что для малых углов падения луча на зеркало $FD \approx F$). Из формул (6)-(7) находим

$$f_1 = \frac{F^2}{F - \delta} \text{ и } \frac{a''}{a'} = \frac{\delta}{F - \delta} \quad (8)$$

а затем из второй формулы (8) и формулы (4) – увеличение лягушки в двух зеркалах

$$\frac{a''}{a} = \frac{F}{F - \delta}$$

Учитывая, что $F = R/2$, а по условию $\delta = R/8$ (где R - радиус кривизны зеркала), получим

$$\frac{a''}{a} = \frac{4}{3}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Правильное использование закона отражения света и нахождение фокуса сферического зеркала – 0,5 балла**
- 2. Правильное построение изображения лягушки, рассматриваемой как точечное тело – 0,5 балла**
- 3. Правильные построения действительного и мнимого изображений в источниках в сферическом зеркале. С правильной ориентацией – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ для увеличения изображения – 0,5 балла**

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «получелые» оценки от 0 до 10.