

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

Ответ: $x = 18, x = 0$.

Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \dots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_7 = b_1 q^6$, $b_9 = b_1 q^8$, $b_{15} = b_1 q^{14}$, откуда следует, что $b_9^4 = b_7^3 b_{15}$, а b_7, b_9 и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+3)^4 = \left(\sqrt{(25x-9)(x-6)} \right)^3 \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(x+3)^4 = (25x-9)^2$. Решаем его:

$$(x^2 + 6x + 9)^2 = (25x - 9)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 = 25x - 9, \\ x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 18, \\ x = -31, \\ x = 0. \end{cases}$$

Значение $x = 1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x = -31$ не подходит, так как при этом $b_7 > 0$, $b_9 < 0$, $b_{15} > 0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-2 - 2\sqrt{2}; 5; 0), \left(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0 \right)$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y , а правая только от z . Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{81-z^2}$ является отрезок $[0; 9]$. Пусть $h(y) = |y+4| + 4|y-5|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y . В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geq 5$ и убывает при $y \leq 5$. Отсюда следует, что $y = 5$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(5) = 9$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 9$, из второго уравнения находим, что $f(z) = 9 \Leftrightarrow z = 0$ и $h(y) = 9 \Leftrightarrow y = 5$.

Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x$, откуда $2\sqrt{5-4x-x^2} = 6-t^2$. Уравнение принимает вид $t+4 = 6-t^2$. Решая его, находим

$t = -2$ или $t = 1$.

- Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 &\Leftrightarrow x+5 = 1-x+2\sqrt{1-x}+1 \Leftrightarrow 2x+3 = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)^2 = 4(1-x), \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4 \pm \sqrt{11}}{2}, \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}-4}{2}.\end{aligned}$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5} + 2 = \sqrt{1-x} &\Leftrightarrow x+5+4\sqrt{x+5}+4 = 1-x \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} = -x-4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+5) = (-x-4)^2, \\ -x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm 2\sqrt{2}, \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Итак, система имеет два решения: $(-2 - 2\sqrt{2}; 5; 0)$ и $(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

Ответ: Решения есть при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3 + (t-1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $(t\sqrt[3]{p-1})^3 = (1-t)^3 \Leftrightarrow t\sqrt[3]{p-1} = 1-t \Leftrightarrow t = \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$.

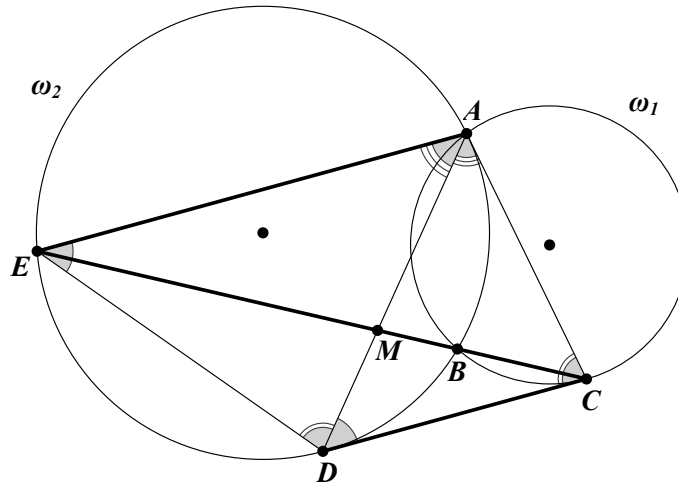
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left| \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sqrt[3]{p-1} \geq 1, \\ 1+\sqrt[3]{p-1} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -7, \\ p \geq 1. \end{cases}$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD . По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD . Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC , не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M . Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE . По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{20\,000}^4 - 2 \cdot C_{10\,000}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна). Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1 , относительно ℓ_2 – через A_2 , относительно O – через B . Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1 , достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1 . Так как в верхней половине прямоугольника всего 20 000 клеток, $|A_1| = C_{20\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 20 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C_{20\,000}^4$.

Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1 , получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2 , получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C_{10\,000}^2$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C_{10\,000}^2$, $|A_2 \cap B| = C_{10\,000}^2$, $|A_1 \cap B| = C_{10\,000}^2$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C_{20\,000}^4 - 2 \cdot C_{10\,000}^2$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

Ответ: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c < b - c$ (за счёт того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a - c = 1, \\ b - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - c = -p^2, \\ b - c = -1. \end{cases} \quad (*)$$

Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b - a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

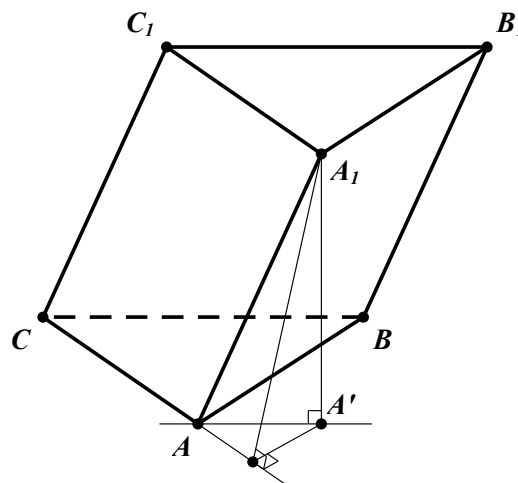
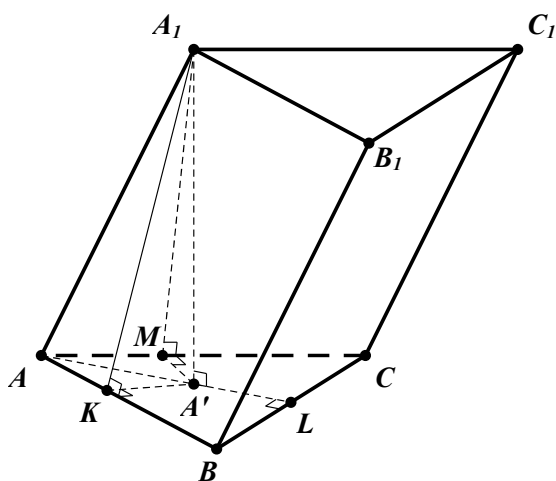
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b - a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b - a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 710$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b . Решая её, находим $a = 26$, $b = 34$ или $a = -27$, $b = -19$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c . Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.

Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

Ответ: $\sqrt[4]{3}$.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1, его сторона равна $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 3. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC . Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC . По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$ – противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC . Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{2}{a} = \sqrt[4]{3}$. Так как площадь основания призмы равна 1, её объём есть $\sqrt[4]{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. (3 балла) Составлено уравнение (система уравнений), связывающее члены прогрессий – 1 балл;

- не отброшено значение переменной x , при котором один из данных членов прогрессии принимает отрицательное значение – снять 1 балл;
 - не отброшено значение переменной x , при котором подкоренные выражения отрицательны – снять 1 балл;
 - грубые ошибки в преобразованиях (например, извлечение корней из квадратов без модулей) – не более 1 балла за задачу.
-

2. (4 балла) Из второго уравнения системы найдены значения y и z – 1 балл;

- значения y и z подставлены в первое уравнение, после чего в нём сделана замена переменной, сводящая уравнение к квадратному (или введены две новые переменные и получена система из линейного и квадратного уравнения относительно этих переменных) – 1 балл;
 - для каждого из случаев найдено значение переменной x – по 1 баллу за случай;
 - получены лишние решения – снять 1 балл за каждое лишнее решение.
-

3. (5 баллов) Уравнение сведено к кубическому уравнению относительно $\cos x$ – 1 балл;

- $\cos x$ выражен через p – 2 балла;
 - найдены значения параметра, при которых есть решения – 1 балл;
 - найдены решения при указанных значениях параметра – 1 балл;
 - неверное решено элементарное тригонометрическое уравнение не более 3 баллов за задачу.
 - уравнение решено не в общем виде, а лишь для некоторых значений параметра p – баллы не добавляются.
-

4. (5 баллов) Получено подобие треугольников ADE и ADC – 2 балла;

- доказано, что AD – биссектриса угла EAC – 1 балл.
-

5. (4 балла) Посчитано количество раскрасок, обладающих какой-либо одной симметрией – 1 балл;

- посчитано количество раскрасок, обладающих тремя симметриями – 1 балл;
- *замечено*, что наличие двух любых симметрий влечёт за собой третью – 1 балл (этот факт доказывать не обязательно);
- в ответе в выражении количество членов больше 3 – не более 2 баллов за задачу;
- комбинаторная ошибка (ошибка в формуле включений и исключений, двойной подсчёт, часть вариантов не учтена и т.п.) – не более 2 баллов за задачу.

6. **(4 балла)** Задача сведена к рассмотрению двух случаев (системы $(*)$ в решении) – 1 балл;
- найдено значение p (даже если рассматривается всего один случай) – 1 балл;
 - для каждой из двух систем найдены решения – по 1 баллу за случай;
 - верно получены 2 решения из 4 (например, рассмотрен только случай $1 \cdot p^2$) – 2 балла за задачу.
-
7. **(6 баллов)** По заданной площади основания найдена его сторона или наоборот – баллы не добавляются;
- доказано, что проекция точки A_1 на плоскость ABC равноудалена от прямых AB и AC (или аналогичное утверждение) – 1 балл
 - доказано, что проекция не может лежать на биссектрисе внутреннего угла треугольника ABC – 2 балла;
 - получен ответ в случае, когда проекция попадает на биссектрису внешнего угла треугольника ABC – 3 балла.