

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2020-2021 г.г. по математике

Заключительный этап

7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Время выполнения 4 астрономических часа.

7.1. Приведите пример натурального числа, кратного 2020, такого, что его сумма цифр тоже кратна 2020.

7.2. Лада и Лера нарисовали по треугольнику. Лада выбрала два угла своего треугольника, и Лера заметила, что среди углов её треугольника есть равный сумме этих двух углов. После этого Лада выбрала другую пару углов в своём треугольнике, а Лера снова нашла у своего угол, равный сумме углов этой пары. Докажите, что Лада нарисовала равнобедренный треугольник.

7.3. В некотором городе есть улица в форме правильного шестиугольника, в каждой из вершин которого живёт человек. Любой житель этой улицы является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из них знает своих соседей и имена остальных (но не знает, где они живут), однако, никто ни про кого не знает, рыцарь он или лжец. Однажды Лёшка, живущий в одной из вершин, решил узнать, кто живёт в противоположном от него доме. Он может отправить письмо на имя любого человека и спросить: “Верно ли, что ты соседствуешь с тем-то?”, на что получит ответ “Да” или “Нет”. После этого он может отправить следующее письмо, возможно, другому человеку с вопросом про другого, и т. д. Как Лёшка может осуществить задуманное, если он собирается отправить не более четырёх писем?

7.4. Два пловца стартовали одновременно по соседним дорожкам в 50-метровом бассейне на дистанции 1 км. Каждый плыл со своей постоянной скоростью. Первый пловец, завершив заплыв, вышел из бассейна. Второй продолжал плыть по дистанции. Всего пловцы встретились 16 раз (когда первый догоняет второго – это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз первый пловец может быть быстрее второго? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

7.5. Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромах стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёте на один из островов, а затем проплыть на $n - 1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёте можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2020-2021 г.г. по математике

Заключительный этап

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Время выполнения 4 астрономических часа.

8.1. Из квадрата 5 на 5 вырезана угловая клетка. Разрежьте его по линиям сетки на шесть многоугольников равной площади таким образом, чтобы среди них была ровно одна пара одинаковых.

8.2. В сказочной стране каждый поросёнок либо всегда врёт, либо всегда говорит правду, причём каждому поросёнку достоверно известно про каждого, лжец ли он. Однажды Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф встретились за чашечкой чая, и двое из них сделали по заявлению, однако, неизвестно, кто именно что произнёс. Один из трёх поросят сказал: “Ниф-Ниф и Наф-Наф оба всегда врут”. Другой: “Ниф-Ниф и Нуф-Нуф оба всегда врут”. Определите, сколько врунов среди трёх поросят.

8.3. В городе живут четыре ювелира, которым царь выслал 13 мешков с золотом. В первом мешке лежал один слиток золота, во втором – два, в третьем – три, ..., в тринадцатом – 13 золотых слитков. Один из мешков сразу куда-то потерялся, а оставшиеся ювелиры распределили так, что каждому досталось и равное количество золотых слитков, и равное количество мешков. При этом мешок с одним слитком достался первому ювелиру, с тремя – второму, с одиннадцатью – третьему. Определите, какие мешки достались четвёртому ювелиру, если слитки из мешков не доставали.

8.4. На отрезке AB выбрали точку M и построили равнобедренные треугольники AMC и MBN с основаниями AM и MB соответственно. Оказалось, что точки B , N и C лежат на одной прямой, а $AB = BC$. Перпендикуляр к отрезку AC , опущенный из B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH – биссектриса угла MNC .

8.5. Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромов стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёт на один из островов, а затем проплыть на $n - 1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёт можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг.
Заключительный этап **9 класс**
Каждая задача оценивается из 7 баллов *Время работы 4 астрономических часа*

9.1. Доказать, что в любом 100-значном натуральном числе можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы в получившемся 99-значном числе количество семёрок, стоящих на чётных (считая слева), позициях, было не больше количества семёрок, стоящих на нечётных, (считая слева), позициях.

9.2. В каждой клетке таблицы 3 на 3 записано некоторое целое число так, что все восемь сумм троек чисел, записанных в клетках каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей, равны одному числу S (то есть таблица является магическим квадратом 3 на 3). Доказать, что S делится на 3.

9.3. Пусть P – основание высоты, опущенной из вершины A прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузу BC , а M – середина отрезка CP . Обозначим за E точку на продолжении стороны AB за точку B такую, что $AB=BE$. Доказать, что прямые EP и AM перпендикулярны.

9.4. Определим последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ следующим образом: пусть x_1 – произвольное положительное число, меньшее 1, и $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots, 99$. Докажите, что $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{99}^3 < 1$.

9.5. На шахматной доске 8 на 8 некоторым образом расставлены 8 ладей, ни одна из которых не бьёт другую. Доказать, что каждую из них можно сдвинуть одновременно в одну из соседних с ней по диагонали клеток таким образом, что и после сдвига ни одна из них не будет бить другую. *Напомним*, что шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг.
Заключительный этап **10 класс**
Каждая задача оценивается из 7 баллов *Время работы 4 астрономических часа*

10.1. Докажите, что для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство: $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$.

10.2. Разрезать правильный пятиугольник на несколько треугольников так, чтобы каждый из них граничил ровно с тремя другими. Граничить – значит иметь общий отрезок совместной границы.

10.3. Найти все натуральные n , для которых на клетчатой доске размера n на n клеток можно отметить n клеток, стоящих в разных горизонталях и разных вертикалях, которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня, начиная с некоторой, не вставая на одну клетку дважды, и вернуться на исходную клетку. Конь при этом может вставать только на отмеченные клетки.

10.4. Пусть $m < n$ – натуральные числа. Доказать, что среди произвольных последовательных n натуральных чисел всегда найдутся два, произведение которых делится на mn .

10.5. На отрезке AB отмечена произвольная точка M , отличная от A и B . С одной стороны от прямой AB выбрана точка C , а с другой – точки D и E такие, что треугольники ABC , AMD и MBE являются равносторонними. Обозначим через P , Q , R точки пересечения медиан треугольников ABC , AMD и MBE соответственно. Доказать, что: а) треугольник PQR – равносторонний, б) точка пересечения медиан треугольника PQR лежит на отрезке AB .

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг.
Заключительный этап **11 класс**

Каждая задача оценивается из 7 баллов

Время работы 4 астрономических часа

11.1. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD соответственно отмечены точки P, Q, R, S, отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1, доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

11.2. Найти все натуральные n , которые можно представить в виде суммы $n = a^2 + b^2$, где a - минимальный делитель n , отличный от 1, и b - какой-то делитель n .

11.3. Найти все действительные числа a , для которых существуют три различных действительных числа x, y, z таких, что $a = x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$.

11.4. Доказать, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон произвольного вписанного четырёхугольника на его противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

11.5. В некоторых клетках прямоугольной доски размера 101 на 99 сидят по одной черепашке. Каждую минуту каждая из них одновременно переползает в одну из клеток доски, соседнюю с той, в которой они находятся, по стороне. При этом, каждый следующий ход делается ими в направлении, перпендикулярном предыдущему: если предыдущий ход был горизонтальным - налево или направо, то следующий будет вертикальным - вверх или вниз, и наоборот. Какое максимальное количество черепашек может перемещаться по доске неограниченное время так, что в каждый момент в каждой клетке будет находиться не более одной черепашки?