

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

Ответ: $x = -1$, $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Решение. Числа A , B , C являются третьим, пятым и девятым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B = 2A + C$ ($a_5 = a_3 + 2d$, $a_9 = a_3 + 6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3(x^2 + 2x)^2 = 3x^2 + 2(3x + 3)$. Сделав замену $t = x^2 + 2x$, получаем $3t^2 = 3t + 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$. Данное уравнение имеет корни $t = -1$ и $t = 2$. Далее находим значения x :

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -1 \pm \sqrt{3}. \end{cases}$$

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии $\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$

Ответ: 11.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3, \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 \leq y \leq \frac{x}{3} + 1, \\ 3x - 1 \leq y \leq 3x + 1. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y = \frac{x}{3} - 1$ и $y = \frac{x}{3} + 1$, а второе – полосу между прямыми $y = 3x - 1$ и $y = 3x + 1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0; -1)$, $Q(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$, $R(0; 1)$, $S(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $4y + 8x = C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $4y + 8x$ постоянно и равно C . Если изменить значение C , получится некоторая другая прямая, на которой выражение $4y + 8x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C , при котором прямая $4y + 8x = C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S . Это значение равно $4 \cdot \frac{3}{4} + 8 \cdot \frac{5}{4} = 11$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(3; 10)$, $(10; 3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A = (m+n)(m+n-9)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.

- Если $A = 75q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q = 2$. Отсюда получаем $(m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $m+n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.
- Следовательно, $A = 13p^2$, и тогда по условию $B = 75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0$, откуда $m+n = -4$ или $m+n = 13$. Подходит только $m+n = 13$, так как числа m и n положительны. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m+n) - 3mn = 75q^2.$$

Так как $m+n = 13$, оно упрощается и принимает вид $2mn = 15q^2$. Отсюда q – чётное число, поэтому $q = 2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

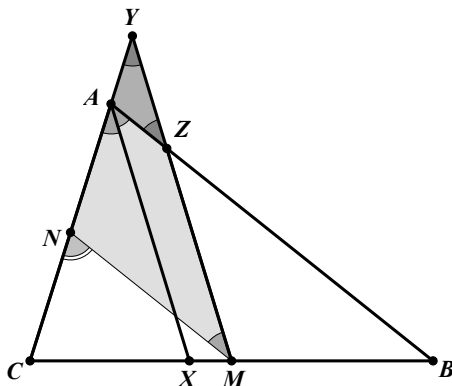
$$\begin{cases} m+n = 13, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(3; 10)$, $(10; 3)$.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

Ответ: $BC = 8\sqrt{21}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ = \angle CAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle BAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB . Тогда $\angle NMY = \angle AZY = \alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α . Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos \alpha = \frac{YZ}{2 \cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN = \frac{1}{2}AC = 9$; $MN = NY = AN + AY = \frac{AC}{2} + AZ = 15$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 336.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{21}$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$. Введя функцию $f(t) = t^4 + 5t^2 + \sqrt{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geq 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+1 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 6-x$, откуда $2\sqrt{6+5x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{6-x} + 1 = \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow 6-x + 2\sqrt{6-x} + 1 = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{6-x} = x-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{6-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geq 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{1}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{6}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 820.

Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

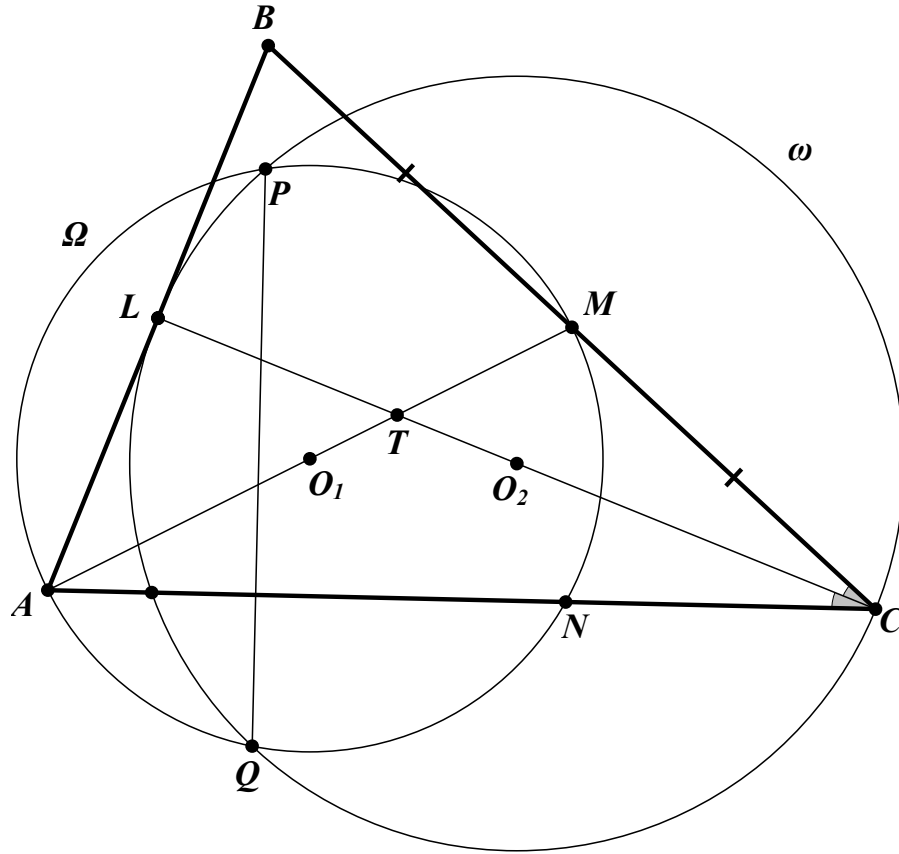
- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180° , но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение с самой собой при поворотах на 90° , 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{81-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{81}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4} \left(C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{81-1}{2}\right) = 820$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

Ответ: $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$.



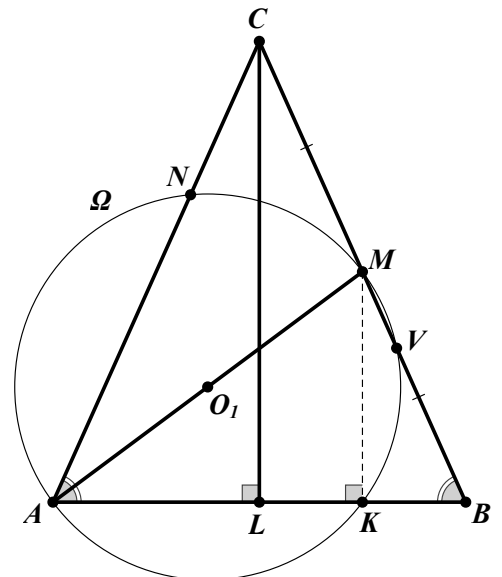
Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL , O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL , $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB , отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC вторично пересекает в точке V . Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL . Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{5}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \Leftrightarrow (c+t) \cdot c = (2c-8) \cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \Leftrightarrow (c-t) \cdot c = \frac{5}{2} \cdot 10.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(16-2c) \cdot c = 25 \Leftrightarrow c = \frac{8 \pm \sqrt{14}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 8 \pm \sqrt{14}$. Но так как $AC > AN = 8$, подходит только $BC = AC = 8 + \sqrt{14}$.



Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(3 балла)** Составлено уравнение (система уравнений), связывающее члены прогрессий – 1 балл;
- решено полученное уравнение – 2 балла;
 - ошибочно отброшены верные значения x – снять по 1 баллу за каждое значение.
-

2. **(4 балла)** Изображено множество точек, удовлетворяющих первому неравенству – 1 балл;
- изображено множество точек, удовлетворяющих второму неравенству – 1 балл;
 - найден максимум функции – 2 балла;
 - без обоснования используется то, что экстремум достигается на границе параллелограмма (пишутся равенства вместо неравенств) – не более 2 баллов за задачу;
 - получена верная оценка на максимум (минимум), но не доказано, что он достигается – 2 балла за задачу;
 - неэквивалентные преобразования (к примеру, вычитание неравенств одного знака) – 0 баллов за задачу.
-

3. **(5 баллов)** Доказано, что случай $A = Cq^2$ (где C – данное в условии число) невозможен – 2 балла;
- получены решения в случае $A = Dp^2$ (где D – данное в условии число) – 3 балла;
 - ни один из случаев не доведён до конца, но при этом хотя бы в одном из них доказано, что $p = 2$ или $q = 2$ – 1 балл;
 - при решении перебором рассмотрены не все случаи – не более 2 баллов за задачу;
 - рассматривается только один случай $A = Cp^2$, $B = Dq^2$ и других ошибок нет – 3 балла за задачу.
-

4. **(5 баллов)** В решении присутствует хотя бы 2 из следующих шагов – не менее 1 балла за задачу;
- в решении присутствуют 3 следующих шага – не менее 2 баллов за задачу:
 - доказано, что треугольник AYZ равнобедренный.
 - найден один из углов AYZ , AZY , YAZ , CAB или тригонометрическая функция одного из них.
 - с помощью вычисления отношений отрезков задача сведена к применению теоремы косинусов в одном из треугольников BZM , CYM , CNM , CAB .

5. (4 балла) Из второго уравнения системы получено, что $y = x - 1$ балл;

- доказательство равенства $x = y$ отсутствует или неверно – не более 2 баллов за задачу;
 - в первом уравнении сделана замена переменной, сводящая его к квадратному (или введены две новые переменные и получена система из линейного и квадратного уравнения относительно этих переменных) – 1 балл;
 - для каждого из случаев найдено значение переменной x – по 1 баллу за случай;
 - получены лишние решения – снять 1 балл за каждое лишнее решение.
-

6. (4 балла) найдено общее количество способов поставить 2 точки ($C_{(k+1)^2}^2$, где k – длина стороны доски) – баллы не добавляются;

- неверное найдено количество узлов сетки в квадрате (k^2 вместо $(k+1)^2$) – снять 1 балл;
 - найдено количество способов раскрасить 2 точки симметрично относительно центра и указано, что такие раскраски разбиваются на пары эквивалентных – 2 балла;
 - найдено количество способов раскрасить 2 точки не симметрично относительно центра и указано, что такие раскраски разбиваются на четвёрки эквивалентных – 2 балла;
 - не указано, что в задаче есть два случая расположения пары точек – снять 1 балл;
 - комбинаторная ошибка (двойной подсчёт, часть вариантов не учтена и т. п.) – не более 2 баллов за задачу.
-

7. (6 баллов) Доказано, что треугольник ABC равнобедренный – 3 балла;

- замечено, что линия центров окружностей параллельна стороне треугольника – баллы не добавляются.