

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Решение. Для того чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$, откуда $t^2 < 4$. По теореме Виета произведение корней равно $4t^2 - 4$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $4t^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Значит, $1 < t^2 < 4$, то есть $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .

Ответ: $(4; 36)$.

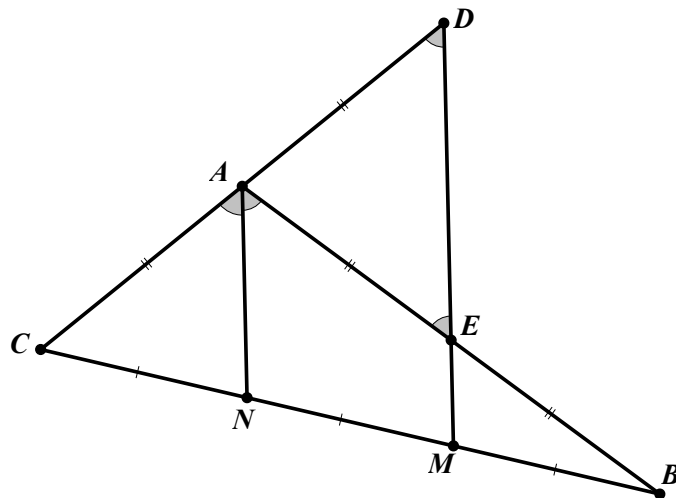
Решение. Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)(a - b + 15)$ – произведение чисел разной чётности, следовательно, это число чётное. Так как оно равно $17p^5$, число p также чётное. Но по условию p – простое, значит, $p = 2$. Получаем уравнение $(a - b)^2 + 15(a - b) - 17 \cdot 32 = 0$, которое является квадратным относительно $a - b$. Его решения – это $a - b = -32$ и $a - b = 17$.

Так как в условии задано, что сумма $a + b$ равна 40, а числа $a + b$ и $a - b$ имеют одинаковую чётность, подходит только случай $a - b = -32$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a = 4$, $b = 36$.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$.

Решение. Пусть E – точка пересечения AB и DM . Поскольку $BM = MN = NC$, а $DM \parallel AN$, по теореме Фалеса $AC = AD$ и $AE = EB$. Из равенства $CD = AB$ следует, что $AC = DA = BE = AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a . Поскольку $AN \parallel EM$ и треугольник AED – равнобедренный, $\angle CAN = \angle EDA = \angle AED = \angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC . Значит, $2\angle CAN = \angle CAB$. В треугольнике ABC имеем $BC = 12$, $CA = a$, $AB = 2a$, $\angle CAB = 2\angle CAN$. По теореме косинусов $144 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot (-\frac{1}{4}) \Leftrightarrow a^2 = 24$. Следовательно, $AB = 2a = 4\sqrt{6}$.



4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $\frac{8!}{(3!)^2} = 6\,720$.

Решение. Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остаётся пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{8!}{2! \cdot (3!)^2}$. (Например, это количество можно получить так: сначала выбираем трёх человек из восьми, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем ещё трёх человек из оставшихся пяти для второго ряда. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$.) Суммарно первых и третьих парт шесть, поэтому полученное число надо умножить на 6.

Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{8!}{(3!)^2}$. Вторых парт три, значит, потребуется умножение на 3.

Всего получаем $6 \cdot \frac{8!}{2! \cdot (3!)^2} + 3 \cdot \frac{8!}{(3!)^2} = 6 \frac{8!}{(3!)^2} = 6\,720$ различных рассадок.

Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается тремя способами. Для каждого из этих трёх случаев между рядами школьники распределяются $C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом.

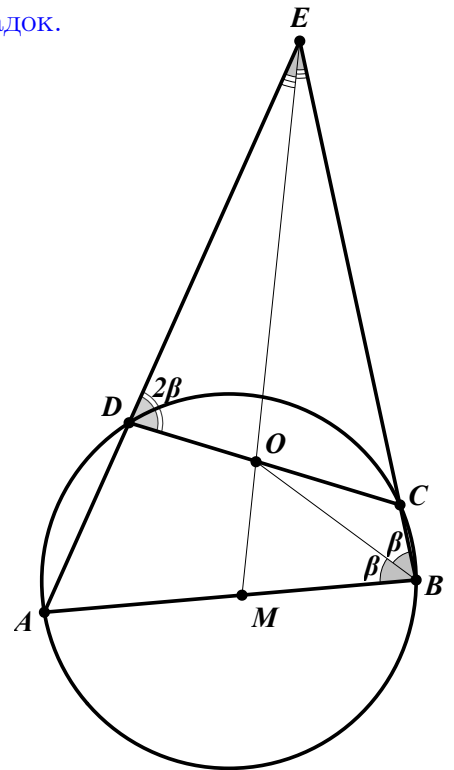
Итого $3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 6\,720$ способов.

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

Ответ: 10.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет 180° , откуда следует, что $\angle EDO = 180^\circ - \angle ADO = \angle ABC$. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B . Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M . Треугольники DEO и BEM подобны по двум углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$. Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED+DO}{BE+BM} = \frac{EO}{EM}$, следовательно, $ED + DO = \frac{(BE+BM) \cdot EO}{EM}$.

Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO , получаем



$\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM+BE}$. Окончательно имеем

$$ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE.$$

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 10.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

Ответ: 17.

Решение. Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 3, 4, 5 и 7, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.

Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество рёбер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, то есть $\frac{3+4+5+7+x}{2} = \frac{19+x}{2}$. С другой стороны, количество рёбер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x + 4$, то рёбер $x + 3$. Получаем уравнение $\frac{19+x}{2} = x + 3$, откуда находим, что $x = 13$. Значит, в дереве $x + 4 = 17$ вершин.

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

Ответ: $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$, $(2; 1)$.

Решение. Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 1 - |x + y - 2| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, \\ -1 \leq x + y - 2 \leq 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

На плоскости Oxy неравенство (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(1; 1)$, а неравенство (2) – полосу между прямыми $x + y = 1$ и $x + y = 3$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$ и $(2; 1)$. В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертёж.

Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только одна из них – $(1; 1)$ – ему не удовлетворяет. Остальные 6 пар являются решениями.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(3 балла)** Найдены значения t , при которых дискриминант положителен – 1 балл;
 - записано условие положительности произведения корней при помощи теоремы Виета – 1 балл; (если условие записано более громоздким способом, то баллы не добавляются);
 - записано только неравенство, что свободный член уравнения положителен, и при этом наличие корней уравнения не проверено – 0 баллов за задачу;
 - неверно решено элементарное квадратное неравенство – не более 1 балла за задачу.

2. **(4 балла)** Найдено значение p – 2 балла;
 - утверждается, что $p = 2$, и этот факт не обоснован – не более 1 балла за задачу;
 - неполный перебор – не более 2 баллов за задачу.

3. **(5 баллов)** Доказано, что $\angle CAB = 2\angle CAN$ – 2 балла;
 - найдено отношение $AB : AC$ – 2 балла.

4. **(5 баллов)** Комбинаторная ошибка (двойной подсчёт, часть вариантов не учтена) – не более 2 баллов за задачу;
 - в ответе в выражении количество слагаемых больше 2 – не более 2 баллов за задачу.

5. **(5 баллов)** Получено подобие треугольников DEO и BEM – 1 балл;
 - записано свойство биссектрисы для биссектрисы BO треугольника BEM – 1 балл.

6. **(4 балла)** Замечено, что граф, соответствующий условию задачи, является деревом – баллы не добавляются;
 - количество рёбер выражено через количество вершин (или наоборот) только одним из двух способов (из свойств дерева или из соображений суммы степеней вершин) – 1 балл за задачу;
 - составлено уравнение с одной переменной относительно количества вершин (или количества рёбер) – 3 балла;
 - решение на конкретном примере графа / по ходу решения строится новый граф / при решении перебором рассмотрены не все 16 неизоморфных случаев – 0 баллов за задачу;
 - комбинаторная ошибка – не более 1 балла за задачу;
 - дробное число в ответе – 0 баллов за задачу.

7. (5 баллов) ОДЗ уравнения изображено на плоскости – 1 балл;

- найдены все целочисленные точки в ОДЗ уравнения – 2 балла (суммируется с предыдущим);
- задача решается перебором, и при этом перебор ничем не ограничивается – не более 1 балла за задачу, даже если получен верный ответ;
- получены лишние пары или потеряны пары (x, y) – снять 1 балл за каждую пару.