

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2025/2026 учебный год

6-11 классы

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2025/2026 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) Даны две арифметические прогрессии: $4, 7, \dots, 2623$ и $8, 12, \dots, 3500$. Сколько чисел встречается одновременно в обеих этих прогрессиях?

Ответ: 218.

Решение. Обозначим через a_i элементы прогрессии $4, 7, \dots, 2623$ и через b_i — элементы прогрессии $8, 12, \dots, 3500$. Легко найти, что знаменателем прогрессии $\{a_i\}$ является $d_1 = 3$, а знаменателем прогрессии $\{b_i\}$ — $d_2 = 4$, и $\text{НОК}(d_1, d_2) = 12$. Поэтому если элемент α будет членом обеих прогрессий, то и элементы вида $\alpha + 12k$, $k \in \mathbb{Z}$, и только они — тоже будут членами обеих прогрессий. Здесь мы считаем, что прогрессии не ограничены снизу и сверху. Однако, в условиях задачи нужно будет аккуратно учитывать ограничения и не принимать во внимание числа меньше 8 и больше 2623.

Нетрудно найти, что α может быть, например, числом 16. Действительно, $16 = 4 + 4d_1$ и $16 = 8 + 2d_2$. И это наименьшее общее число последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Следовательно, числа $16 + 12k$, $k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{2623-16}{12} \right\rfloor$ будут членами обеих прогрессий. Отсюда получаем, что k пробегает значения от 0 до 217, то есть всего таких значений 218 штук.

2. (10 баллов) Вася правильно решал задачу «В невырожденном треугольнике ABC стороны $AB = 4$, $BC = 3$. Найдите сумму всех целочисленных значений, которые может принимать площадь треугольника ABC », но при вычислении суммы упорядоченных по возрастанию чисел (возможных значений площади треугольника) вместо ровно одного сложения использовал умножение. Укажите разность наименьшего и наибольшего значений, которые мог получить Вася.

Ответ: -20 .

Решение. Заметим, что так как площадь треугольника ABC должна быть целочисленной, то она может принимать только значения $1, 2, \dots, 6$. Для понимания этой оценки удобно воспользоваться формулой площади треугольника через основание и высоту. Действительно, возьмем, например, в качестве основания сторону AB и посмотрим, какой длины может быть высота из вершины C . Легко заметить, что точка C не может находиться дальше, чем на расстоянии 3 от прямой AB (так как $BC = 3$); но может находиться и ближе, но не на самой прямой (треугольник невырожденный). Таким образом, высота принимает значения из промежутка $(0, 3]$. Площадь треугольника будет равна 6, когда AB и BC перпендикулярны, и меньше в других случаях.

Следовательно, Вася должен был вычислить сумму

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6,$$

но вместо ровно одного из пяти сложений использовал умножение. Поэтому он мог получить одно из чисел:

$$1 \times 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20,$$

$$1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 6 = 22,$$

$$1 + 2 + 3 \times 4 + 5 + 6 = 26,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 \times 5 + 6 = 32,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \times 6 = 40.$$

Наименьшее число получается тогда, когда вместо суммы двух наименьших слагаемых использовано умножение (и получится число 20), а наибольшее — когда умножение использовано вместо суммы двух наибольших слагаемых (и получится число 40).

3. (20 баллов) Для действительных чисел x и $y > 0$ обозначим через $x \% y$ число $x - y \cdot [x/y]$. Отметим на отрезке $[-250; 366]$ все x , являющиеся решением уравнения

$$\left[x \% \frac{7}{2} \right] = [x] \% \frac{7}{2}.$$

Найдите сумму длин всех отмеченных промежутков. Как обычно, через $[a]$ обозначена целая часть числа a , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a .

Ответ: 308.

Решение. Преобразуем в соответствии с определением левую часть уравнения:

$$\left[x \% \frac{7}{2} \right] = \left[x - \frac{7}{2} \cdot \left[\frac{x}{\frac{7}{2}} \right] \right] = \left[x - \frac{7}{2} \cdot \left[\frac{2}{7}x \right] \right].$$

Вспомним, что $[x] = k$, $x \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $\frac{7}{2} \left[\frac{2}{7}x \right]$ есть растяжение вдоль оси абсцисс с коэффициентом $\frac{7}{2}$ и растяжение вдоль оси ординат с коэффициентом $\frac{7}{2}$ функции $f(x) = [x]$. Таким образом,

$$\frac{7}{2} f \left(\frac{2}{7}x \right) = \frac{7}{2}k, \quad x \in \left[\frac{7}{2}k, \frac{7}{2}(k+1) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$x - \frac{7}{2} f \left(\frac{2}{7}x \right) = x - \frac{7}{2}k, \quad x \in \left[\frac{7}{2}k, \frac{7}{2}(k+1) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Это периодическая функция с периодом $\frac{7}{2}$. Отсюда получаем, что

$$\left[x - \frac{7}{2} f \left(\frac{2}{7}x \right) \right] = \begin{cases} 0, & x \in \left[\frac{7}{2}k, \frac{7}{2}k+1 \right), \\ 1, & x \in \left[\frac{7}{2}k+1, \frac{7}{2}k+2 \right), \\ 2, & x \in \left[\frac{7}{2}k+2, \frac{7}{2}k+3 \right), \\ 3, & x \in \left[\frac{7}{2}k+3, \frac{7}{2}k+\frac{7}{2} \right). \end{cases}$$

Аналогично преобразуя правую часть исходного уравнения, получаем, что

$$[x] \% \frac{7}{2} = [x] - \frac{7}{2} \cdot \left[\frac{2}{7}[x] \right] = \begin{cases} 0, & x \in [7k, 7k+1), \\ 1, & x \in [7k+1, 7k+2), \\ 2, & x \in [7k+2, 7k+3), \\ 3, & x \in [7k+3, 7k+4), \\ \frac{1}{2}, & x \in [7k+4, 7k+5), \\ \frac{3}{2}, & x \in [7k+5, 7k+6), \\ \frac{5}{2}, & x \in [7k+6, 7k+7). \end{cases}$$

Легко видеть, что левая и правая части уравнения совпадают на промежутке $\left[0, \frac{7}{2}\right)$, повторяющимся с периодом 7. Теперь заметим, что

$$[-250, 366] = [-250, -245) \cup [-245, 364] \cup [364, 366].$$

Промежуток $[-245, 364]$ состоит из 87 полных периодов; промежуток $[-250, -245)$ — из полного периода без начала длины 2; промежуток $[364, 366]$ — только из начала длины 2. Таким образом,

суммарная длина промежутков, являющихся решениями уравнения, составляет

$$87 \cdot \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 44 \cdot 7 = 308.$$

4. (20 баллов) Биологический кружок посещают несколько учеников. Они определяют численность птиц, обитающих в окрестностях школы. Во дворе школы живет стая воробьев (не более 1000 особей). Ежедневно каждый из учеников кружка подсчитывает количество воробьев (любой ученик при любом подсчете учитывает любого воробья не более одного раза). Для полученных учениками значений вычисляется медиана. За неделю наблюдений медианы оказались следующими: 60, 98, 34, 59, 91. Пусть V — точное число воробьев, живущих в школьном дворе (предполагаем, что оно не меняется в период измерений), $a \leq V \leq b$. Укажите в ответе наибольшее такое a . Известно, что:

а) в любой из дней подсчитанные учениками значения отличались между собой не менее, но не более, чем на 6;

б) в кружке чётное количество учеников.

Если ответ при данных условиях задачи не может быть найден, то в поле ответа укажите число -1 .

Напоминаем: Если в упорядоченном ряду данных нечётное число вариантов, то средняя по счёту варианта называется медианой. Если в упорядоченном ряду чётное число вариантов, то медианой называется среднее арифметическое двух средних по счёту вариантов.

Ответ: 99.

Решение. Поскольку в кружке чётное количество учеников, то заданные в задаче медианные значения являются медианами чётного количества чисел. Пусть в кружке $2k$ учеников, x_i — число воробьев, подсчитанное i -м учеником в какой-то день (это натуральное число), и пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{2k}$. Тогда медиана — это $(x_k + x_{k+1})/2$, и, следовательно, было хотя бы одно измерение, большее медианы (то есть учениками были получены значения, не меньшие, чем $60 + 1 = 61$, 99, 35, 60, 92).

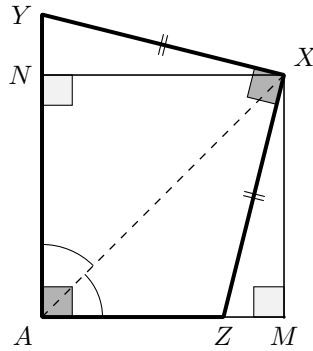
Также очевидно, что если кто-то подсчитал, например, 61 воробья, то полученное кем-то в другой день меньшее значение (скажем, 35) нас уже не интересует, так как мы понимаем, что воробьев на самом деле не меньше 61. То есть из всех пяти значений задачи нас интересует наибольшее — 99. Именно не меньше него было получено значение кем-то из учеников, и у нас нет оснований утверждать, что точно было получено какое-либо большее значение.

5. (30 баллов) На биссектрисе угла $\angle A = 90^\circ$ отмечена точка X . На сторонах угла нашлись такие точки Y и Z , что $XY = XZ$, а $\angle YXZ = 90^\circ$. Оказалось, что площадь четырёхугольника $AUXZ$ равна 50. Найдите расстояние от точки X до сторон угла.

Ответ: оба расстояния равны $\sqrt{50}$.

Решение. Заметим, что четырёхугольник $AUXZ$ вписанный (противолежащие углы A и X в нём прямые). То есть YZ — диаметр описанной окружности этого четырёхугольника. В дальнейшем решении будем считать, что угол AUX не тупой. (Примечание: если углы Y и Z прямые, то рассматриваемая фигура будет квадратом и вычисления тривиальны. Однако, как легко заметить из рисунка, это не всегда так.)

Пусть N и M — основания перпендикуляров из точки X на стороны угла A . В задаче необходимо найти длины XN и XM (так как X лежит на биссектрисе угла A , то эти отрезки будут равны). Точка N будет лежать между Y и A , а точка M — на луче AZ за точкой Z (так как угол AUX у



нас острый (случай прямого угла мы уже не рассматриваем из-за его тривиальности), а угол AZX , соответственно, тупой).

Заметим, что прямоугольные треугольники XNY и XMZ (с прямыми углами N и M соответственно) равны по гипотенузе и катету (гипотенузы равны по условию, катеты по построению). Следовательно, будут равны площади этих треугольников. Теперь, ввиду расположения точек N и M , мы можем сделать следующие заключения о соотношении площадей:

$$50 = S_{AYXZ} = S_{ANXZ} + S_{NYX} = S_{ANXM} - S_{ZXM} + S_{NYX} = S_{ANXM}.$$

Четырехугольник же $ANXM$ является квадратом (противоположные пары углов прямые). Следовательно,

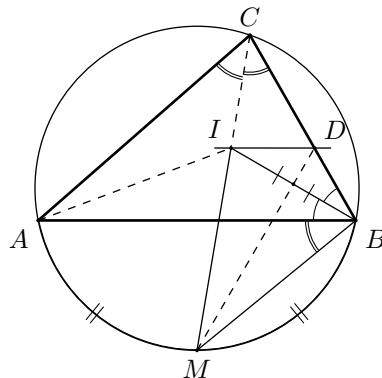
$$50 = XN \cdot XM = XN \cdot XN.$$

Отсюда,

$$XN = XM = \sqrt{50}.$$

6. (30 баллов) Пусть M — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точку C ; I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Продолжение медианы из точки M треугольника BMI пересекает сторону BC в точке D . Верно ли, что $ID \parallel AB$?

Ответ: да, верно.



Решение. Центр вписанной окружности, I , является точкой пересечения биссектрис. Поскольку дуги AM и MB равны, то CM — биссектриса угла ACB и, значит, проходит через точку I .

Рассмотрим треугольник MIB . В нём угол MIB является внешним углом для треугольника BIC и, следовательно, равен сумме углов ICB и IBC . С другой стороны, $\angle IBC = \angle IBA$, так как BI — биссектриса угла ABC , и

$$\angle ABM = \angle ACM = \angle MCB,$$

как опирающиеся на равные дуги. Получаем, что $\angle MIB = \angle MBI$, то есть треугольник MIB равнобедренный и, следовательно, медиана будет являться и высотой — $MD \perp BI$.

Поэтому будет равнобедренным и треугольник BID . Откуда находим, что

$$\angle DIB = \angle DBI = \angle IBA.$$

То есть равны накрест лежащие углы при прямых ID и AB и секущей IB . Таким образом, $ID \parallel AB$.

7. (40 баллов) Существует ли такое натуральное число n , что число

$$(6n)! - 3n + 1$$

является квадратом целого числа?

Ответ: нет.

Решение. Заметим, что

$$(6n)! - 3n + 1 = (6n)! - (3n - 1) = (3n - 1) \left(\frac{(6n)!}{3n - 1} - 1 \right).$$

Число $3n - 1$ не является квадратом целого числа, так как даёт остаток 2 при делении на 3. Следовательно, какое-то простое p в его разложение входит в нечётной степени. С другой стороны, вторая скобка не делится на p , так как число $(6n)!/(3n - 1)$ делится на p (в $(6n)!$ есть множители $(3n - 1)$ и $2(3n - 1) = 6n - 2$). Значит, наше число содержит p в нечетной степени, и не является квадратом целого числа.

8. (40 баллов) В ячейках таблицы 19×19 расставлены натуральные числа. Оказалось, что сумма чисел в любых двух соседних по стороне ячейках равна 29 или 30. Посчитаем сумму чисел в каждой строке и каждом столбце. Могут ли все эти 38 сумм быть попарно различными?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Разобьем строку/столбец на 9 пар соседних клеток и ещё одну клетку. В каждой такой паре сумма чисел равна 29 или 30, а в одной клетке, в пару не попавшей, стоит число, не меньшее 1 и не большее 29. Следовательно, сумма чисел в строке/столбце не меньше

$$29 \cdot 9 + 1 = 262$$

и не больше

$$30 \cdot 9 + 29 = 299.$$

Итого сумма чисел в строке/столбце может принимать $299 - 261 = 38$ значений. Если все 38 сумм в строках и столбцах различны, то каждое из 38 этих значений должно встречаться ровно по одному разу. Значит, если сложить сумму всех строк таблицы с суммой всех столбцов таблицы, то получится

$$262 + 263 + \dots + 299. \quad (*)$$

Заметим, что такая сумма даёт удвоенную сумму всех чисел в таблице. Но сумма $(*)$ нечетна, так как содержит 19 нечетных слагаемых. Противоречие.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2025/2026 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *На дереве живёт несколько хамелеонов. Хамелеон, сидящий в тени, окрашивается в зелёный цвет, а хамелеон, сидящий на солнце — в жёлтый. Изначально зелёных хамелеонов в три раза больше, чем жёлтых. После того как три зелёных хамелеона переползли на солнце, а пять жёлтых ушли в тень, зелёных хамелеонов стало в четыре раза больше, чем жёлтых. Найдите разность между числом зелёных и жёлтых хамелеонов после переползания.*
- а) 24;
б) 14;
в) 20;
г) 12;
д) другой ответ.

Ответ: а).

Решение. Пусть x — число зелёных хамелеонов (в тени), y — число жёлтых (на солнце) до переползания. Изначально $x = 3y$. Переползание хамелеонов описывается следующими изменениями: $x - 3$ и $y - 5$. Значит, после переползания в тени стало $x - 3 + 5 = x + 2$ (трое уползли на солнце, но пятеро с солнца приползли в тень); аналогично, на солнце стало $y - 5 + 3 = y - 2$. И по условию верно соотношение $x + 2 = 4(y - 2)$, то есть $x = 4y - 10$. Таким образом, $3y = 4y - 10$ и, следовательно, $y = 10$, а, тем самым, $x = 30$.

Нас интересует разность между числом зелёных и жёлтых хамелеонов после переползания, то есть

$$(x + 2) - (y - 2) = x - y + 4 = 30 - 10 + 4 = 24.$$

2. (10 баллов) *Сколькими различными способами числа от 1 до 194 можно разбить на 97 групп так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми? Способы считаются разными, если в одном из них есть группа, которой нет в другом.*
- а) 0;
б) 1;
в) 194;
г) 97;
д) другой ответ.

Ответ: б).

Решение. Сумма всех чисел от 1 до 194 равна

$$\frac{(1 + 194) \cdot 194}{2} = 195 \cdot 97.$$

Значит, если суммы чисел во всех 97 группах равны, то они равны 195. Отсюда видно, что никакая группа не может состоять из одного числа. А поскольку $97 \cdot 2 = 194$, то не может быть и групп, в которых больше двух чисел. При этом существует всего один способ разбить числа от 1 до 194 на группы из двух чисел так, чтобы сумма чисел была равна 195: для любого числа x однозначно определяется «парное» ему как $195 - x$.

3. (20 баллов) *Король ходит по клетчатой доске 8×8 . Он начинает в левом нижнем углу, а должен закончить в правом верхнем, смещаясь за один ход ровно на одну клеточку. Ему запрещено возвращаться на ту клеточку, где он уже был до этого, а также переходить в более левые столбцы. Другими словами, король может ходить только вверх, вниз, вправо, вправо-вверх и вправо-вниз. Сколько у короля есть способов пройти свой маршрут? В ответ укажите последние 3 цифры количества способов.*

Ответ: 888.

Решение. Будем находить количество возможных путей от левого нижнего угла доски по столбцам. Легко заметить, что в любую клеточку самого левого столбца доски можно попасть единственным способом (двигаясь снизу вверх).

Теперь предположим, что для k -го столбца нам известны количества путей, которыми в каждую из клеток этого столбца можно попасть из левой нижней клетки доски. Из каждой внутренней клетки (то есть из любой, кроме самой нижней и самой верхней) можно пойти тремя путями (вправо, вправо-вверх и вправо-вниз). Из нижней и верхней клеток есть только по два пути (вправо и вправо-вверх или вправо-вниз соответственно). И каждый такой путь даёт единственный способ переместиться в клетку $(k+1)$ -го столбца из нижней левой клетки доски. Действительно, мы в любую клетку $(k+1)$ -го столбца попадаем либо напрямую из клетки k -го столбца, либо должны продвинуться ещё и вверх или вниз по клеткам $(k+1)$ -го столбца (а такое продвижение единственно, так как по условию нельзя ходить на уже посещенные клетки).

Следовательно, чтобы получить количество способов пройти от левой нижней клетки доски до какой-либо клетки $(k+1)$ -го столбца, необходимо вычислить выражение

$$3 \cdot (d_{2k} + d_{3k} + \dots + d_{7k}) + 2 \cdot (d_{1k} + d_{8k}),$$

где d_{ik} — количество способов добраться в i -ю клетку k -го столбца.

Аккуратный подсчет даст число, оканчивающееся на 888.

4. (20 баллов) *В поликлинике на острове рыцарей и лжецов в четыре кабинета стоят четыре очереди. В первой очереди — 15 островитян, во второй — 19, в третьей — 18, в четвёртой — 14. Каждый островитянин, кроме первых в очередях, заявил: «В очереди передо мной не менее двух лжецов». Сколько рыцарей в поликлинике? Напомним, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.*

Ответ: 58.

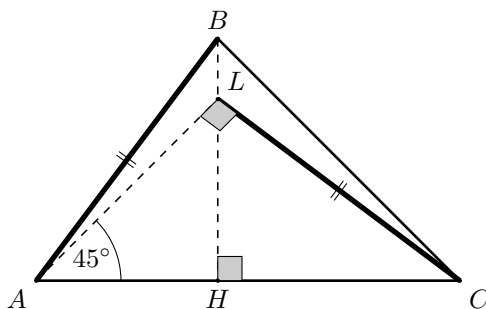
Решение. Заметим, что в любой их очередей не может быть трёх или более лжецов, так как тогда заявление третьего из них было бы правдой (так как перед ним в очереди есть двое других лжецов).

Заметим, что в каждой из очередей второй от начала — лжец (так как перед ним только один человек, то есть высказанное утверждение неверно). Третий от начала либо лжец (и тогда первый в очереди должен быть рыцарем, так как уже два лжеца в очереди есть — второй и третий), либо рыцарь (но тогда лжецом будет первый в очереди). Таким образом, все, стоящие в любой из очередей с четвертого места и до конца — рыцари. А ровно два лжеца в каждой из очередей занимают два места из первой тройки. Отсюда получаем, что рыцарей в поликлинике

$$(15 - 2) + (19 - 2) + (18 - 2) + (14 - 2) = 13 + 17 + 16 + 12 = 58.$$

5. (30 баллов) *На высоте BH остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка L , что $\angle LAN = 45^\circ$ и $AB = CL$. Верно ли, что $\angle ACB = 45^\circ$?*

Ответ: да.

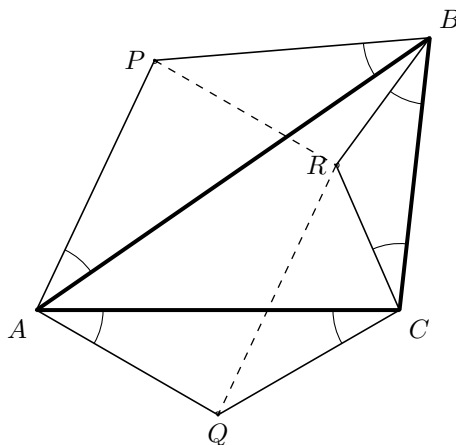


Решение. Рассмотрим треугольник AHL . В нём угол AHL прямой, а угол LAN равен 45 градусам. Следовательно, угол ALH также будет равен 45 градусам и будут равны HA и HL .

Теперь рассмотрим треугольники ABH и CLH . В них $\angle AHB = \angle CHL = 90^\circ$, $AB = CL$, $HA = HL$. Поэтому эти прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и катету. Отсюда получаем, что равны и другие катеты: $HV = HC$. Поэтому треугольник BHC — прямоугольный с прямым углом BHC и равными катетами, поэтому он равнобедренный и углы при основании ($\angle HBC$ и $\angle HCB = \angle ACB$) равны 45 градусам.

6. (30 баллов) На сторонах AB и AC как на основаниях вне треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ABP и ACQ , а на стороне BC внутри треугольника — равнобедренный треугольник BCR . Известно, что $\angle APB = \angle AQC = \angle BRC = 118^\circ$. Верно ли, что $APRQ$ — параллелограмм.

Ответ: да.



Решение. Заметим, что треугольники PAB , RCB , QCA подобны по трём углам (равнобедренные с одинаковым углом напротив основания). Следовательно,

$$\frac{PB}{RB} = \frac{AB}{CB} \quad \text{и} \quad \frac{QC}{RC} = \frac{AC}{CB}.$$

Поскольку $\angle PBR = \angle ABC$, то из первого равенства получаем подобие треугольников PBR и ABC . А так как $\angle QCR = \angle ACB$, то из второго равенства получаем подобие треугольников QCR и ABC .

Таким образом, получаем подобие треугольники PBR и QRC . В них будут равны $\angle RPB = \angle CQR$, $\angle PBR = \angle QRC$, $\angle BRP = \angle RCQ$. Но треугольник RCB по условию равнобедренный и в нём $RB = RC$. Следовательно, $\triangle PBR = \triangle QRC$. Отсюда, $QC = PR$, но по условию $QC = QA$, поэтому $QA = RP$. Аналогично,

$$QR = PB = PA.$$

То есть в четырёхугольнике $APRQ$ противоположные стороны равны. Значит, это параллелограмм.

7. (40 баллов) Каждое число, большее 100, покрашено в один из двух цветов — синий или красный. Известно, что произведение любых трёх (не обязательно различных) синих чисел — синее, а произведение любых трёх красных чисел — красное. Докажите, что или произведение любых двух красных чисел — красное, или произведение любых двух синих чисел — синее.

Решение. Предположим противное. Пусть существуют такие k_1, k_2, k_3 — красные числа (не обязательно различные) и s_1, s_2, s_3 — синие числа (не обязательно различные), что $k_1 \cdot k_2 = s_3$ и $s_1 \cdot s_2 = k_3$. Перемножим (домножим левую часть первого равенства на правую часть второго равенства, а правую часть первого — на левую часть второго):

$$(k_1 \cdot k_2) \cdot k_3 = s_3 \cdot (s_1 \cdot s_2).$$

Но, по условию, левая часть полученного равенства должна быть красной, а правая — синей. Так быть не может. Следовательно, наше предположение неверно.

8. (40 баллов) В каждой клетке доски 17×17 стоит натуральное число от 1 до 17. Известно, что в каждом столбце все числа разные (в строках числа могут повторяться). В одной из клеток доски стоит фишка. Разрешается передвинуть фишку из клетки с числом n в соседнюю по стороне клетку, если в ней стоит число $n - 3$, $n - 1$, $n + 1$ или $n + 3$. Существует ли расстановка чисел и начальная позиция фишки, при которых фишка сможет побывать (хотя бы один раз) в каждой клетке доски?

Ответ: нет.

Решение. Заметим, что разрешённое передвижение фишки — это перемещение из клетки с числом одной чётности на клетку с числом другой чётности. Следовательно, в любом пути фишки по полю будут чередоваться клетки с чётными числами и клетки с нечётными числами. То есть, в любом пути фишки от начальной позиции до конечной количество посещённых клеток с чётными числами и количество посещённых клеток с нечётными числами различаются не больше, чем на 1.

Поскольку по условию каждый столбец состоит из 17 клеток и в них расположены различные числа от 1 до 17, то в каждом столбце каждое из чисел от 1 до 17 встречается ровно один раз. Поэтому, в каждом столбце 9 нечётных чисел и 8 чётных. Таким образом, на всей доске будет $17 \cdot 9 = 153$ клеток с нечётными числами и $17 \cdot 8 = 136$ клеток с чётными числами.

Если бы существовал путь фишки, проходящий через все клетки поля хотя бы один раз, то он должен был бы пройти через 153 клетки с нечётными числами и 136 клеток с чётными числами (и, возможно, какие-то ещё клетки). То есть в таком пути количества клеток с числами разной чётности различались бы не менее, чем на

$$|153 - 136| = 17 > 1.$$

Следовательно, такого удовлетворяющего правилам перемещения пути нет.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2025/2026 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (15 баллов) Суммарная масса грибов в лесу Сказочного Содружества прямо пропорциональна количеству дождей. Дождь увеличивает массу имеющихся грибов (если это возможно), а также способствует росту новых (при этом масса уже имеющихся грибов сохраняется). Известно, что
- а) грибы растут последовательно один за другим;
 - б) гриб не может быть массой более 300 г;
 - в) дождь, идущий в течение часа, увеличивает суммарную грибную массу на 80 кг.
- Сколько грибов будет в лесу Сказочного Содружества к концу сезона дождей, после того, как дожди шли в течение 100 дней по 22 часа в сутки? До начала сезона дождей грибов в лесу не было; во время сезона дождей грибы не собирают и они не портятся.

Ответ: 586 667.

Решение. Действие дождя можно описать следующим образом: при дожде начинает расти один гриб, дорастает до максимально возможной массы, затем начинает расти следующий гриб и так далее. Таким образом, для получения количества грибов, выросших к концу сезона дождей, нужно полный объем дождя поделить на максимально возможную массу одного гриба; если в результате деления получится остаток — это значит, что последний гриб, выросший благодаря дождю, будет не максимальной возможной массы, а поменьше. Итого:

$$\frac{100 \cdot 22 \cdot 80}{0,3} = \frac{1\,760\,000}{3} = 586\,666 \frac{2}{3}.$$

Следовательно, всего грибов в лесу будет 586 667.

2. (15 баллов) Преподаватель программирования Иван Алексеевич по полтора часа ежедневно, без выходных и праздников, проверяет домашние работы студентов. Будучи в отпуске он подсчитал, что за время работы (с момента предыдущего отпуска) он проверял домашние работы суммарно 9,125 недели. Сколько лет Иван Алексеевич не был в отпуске? Ответ запишите с точностью до трех знаков после запятой. (Считаем, что високосных годов в это время не было.)

Ответ: 2,8.

Решение. Найдём, сколько минут входит в указанное количество недель:

$$9,125 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 = 91\,980.$$

Если проверять домашние работы по 90 минут в день, то это будет $91\,980/90 = 1022$ дня, что составляет $1022/365 = 2,8$ года.

3. (35 баллов) По кругу стоят 20 человек, каждый из которых принадлежит одному из двух типов: А или Б. Кроме того, каждый человек либо зелёный, либо красный. А-человек (человек типа А) будет зелёным только тогда, когда хотя бы один из его соседей (справа или слева) зелёный (в противном случае, А-человек будет красным). Б-человек будет зелёным только тогда, когда хотя бы один из его соседей красный. Какое наибольшее количество зелёных человек может быть, если известно, что в круге есть как минимум один А-человек и как минимум один Б-человек? Если расстановка А-человечков и Б-человечков по кругу невозможна, то объясните почему.

Ответ: 19.

Решение. Заметим, что все 20 человечков не могут быть зелёными, так как известно, что в круге должен быть хотя бы один Б-человечек, который является зелёным только тогда, когда у него есть хотя бы один красный сосед (т. е. имея зелёных соседей справа и слева, такой человечек будет сам красным).

Покажем, что может быть 19 зелёных человечков. Пусть по кругу стоят 19 зелёных человечков и один красный. У зелёных человечков, не стоящих рядом с красным, оба соседа зелёные, поэтому такие человечки могут быть только А-человечками. У красного человечка оба соседа зелёные, поэтому такой человечек может быть только Б-человечком. Зелёные же человечки, стоящие рядом с красным, могут быть как А-человечками, так и Б-человечками, так как у них один из соседей зелёный, а другой красный. Таким образом, при такой расстановке человечков в круге есть как А-, так и Б-человечки.

4. (35 баллов) *Вася последовательно расставляет точки разных цветов только на неотрицательной полуоси. Местоположение новой точки (x_k) определяется координатами предыдущих двух (x_{k-1} и x_{k-2}) следующим образом: новая (k -я) точка откладывается от предыдущей ($(k-1)$ -й) на расстоянии на 10 см меньшим разности координат $(k-1)$ -й и $(k-2)$ -й точек. Если получившееся значение положительно, то новая точка откладывается вправо, если отрицательно — влево. Если новая точка попадает на какую-то из ранее отмеченных, то она её перекрывает (старую точку становится не видно).*

Первую точку Вася рисует в точке с координатой 0, вторую — в точке с координатой 1 метр. Сколько разных цветов будет видно после окончания такой расстановки точек?

Ответ: 11.

Решение. Заметим, что точки располагаются друг от друга на расстояниях, образующих арифметическую прогрессию со знаменателем -10 см, то есть убывающую арифметическую прогрессию (1 метр, 90 см, 80 см, $\dots$, 0, -10 см, -20 см, $\dots$). Следовательно, новые точки сначала будут располагаться справа от предыдущих, а потом начнут располагаться слева.

Неотрицательная полуось ограничена слева, поэтому процесс расстановки точек конечен.

Теперь отметим, что:

- в последовательности расстояний между точками есть 0 — то есть тут новая точка перекроет предыдущую (в нашем случае — 12-я перекроет 11-ю);
- следовательно, в последовательности расстояний есть длины как $+s$ см, так и $-s$ см, поэтому точки, расставляющиеся влево, будут перекрывать расставлявшиеся вправо (в нашем случае: 13-я перекроет 10-ю, 14-я 9-ю и так далее).

Отсюда получаем, что видны будут только точки, расставлявшиеся справа налево, их 11 штук. Поэтому на рисунке будут точки 11-ти разных цветов.

5. (50 баллов) *У братьев Яши, Димы и Юры живут четыре кота: Кузя, Шерхан, Кондратий и Тимоша, но есть только одна когтеточка. Кузю нужно гладить 30 минут в день, но нужно делать перерывы каждые 10 минут. Шерхана — тоже 30 минут в день, но перерывы нужно делать раз в 15 минут. Кондратия — 45 минут в день и перерывы нужно делать тоже раз в 15 минут, а Тимошу нужно гладить 60 минут в день и можно делать перерывы раз в 30 минут, хотя и не обязательно. После каждого глажения любой из котов точит когти о когтеточку в течение ровно пяти минут. Однако, в любой момент времени пользоваться когтеточкой может только один из котов, а если она требуется сразу нескольким котам, то коты случайным образом*

между собой решают, кто из них будет точить когти, а кто будет ждать своей очереди.

Какое минимальное количество времени (в минутах) ежедневно требуется, чтобы погладить всех четырех котов? (Братья могут одновременно гладить трех котов: Яша одного кота, Дима другого, а Юра какого-то третьего. Кота нельзя гладить в то время, когда он точит когти!)

Ответ: 60.

Решение. Оценка времени является максимумом двух чисел: наибольшей требуемой продолжительности глажения любого из котов и продолжительности глажения при условии, что братья гладят котов одновременно и не прерываясь. Необходимые продолжительности глажения таковы:

- для Кузи это $10 + 5 + 10 + 5 + 10 = 40$ минут (так как необходимо прерываться каждые 10 минут, а после каждого глажения Кузе нужно точить когти 5 минут);
- для Шерхана — $15 + 5 + 15 = 35$ минут;
- для Кондратия — $15 + 5 + 15 + 5 + 15 = 55$ минут;
- для Тимоши — 60 минут, так как его можно гладить не прерываясь.

Если Яша, Дима и Юра гладят котов одновременно и не прерываясь, то они потратят на это не меньше

$$(30 + 30 + 45 + 60) : 3 = 55 \text{ минут}$$

(«не меньше» так как глажение одного кота несколькими братьями не уменьшает требуемое на глажение кота время).

Таким образом, меньше чем за $\max(60, 55) = 60$ минут котов погладить нельзя. Покажем, что за 60 минут можно. Построим пример. Пусть Яша гладит Тимошу 60 минут. Вот как оставшихся трех котов гладят Дима и Юра (чтобы не вводить элемент случайности, постараемся построить расписание глажения таким образом, чтобы когтеточка требовалась одновременно не более, чем одному из котов):

минуты	1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50	51–55	56–60
Дима	Кузя		Шерхан			Кондратий				Кондратий		
Юра	Кондратий				Кузя		Шерхан				Кузя	

6. (50 баллов) Двоечник Петя предлагает отличнику Васе сыграть в следующую игру: Петя выписывает на карточках подряд все числа от 1 до 100, после чего переворачивает все карточки чистой стороной вверх. Вася наугад выбирает 51 карточку, и если у него оказываются хотя бы две карточки с числами, одно из которых делится на другое, то Вася выигрывает, и Петя угощает его конфетой. Если таких чисел не находится, то Петя съедает Васин обед в столовой. Они играли в эту игру с понедельника по пятницу один раз каждый день. Сколько раз Петя мог съесть Васин обед?

Ответ: 0.

Решение. Вася всегда выигрывает. Рассмотрим наибольшие нечётные делители чисел от 1 до $2n$ (в нашем случае $n = 50$), их ровно n различных чисел: $1, 3, \dots, 2n - 1$. Вася берёт $n + 1$ карточку, значит, два из выбранных чисел гарантированно имеют одинаковые наибольшие нечётные делители, то есть отличаются между собой степенью сомножителя 2. Поэтому большее из этих чисел делится на меньшее.