

10 класс, ВАРИАНТ 9

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

Ответ: -1 .

Решение. Числа a, b, c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$. При этом оказывается, что дискриминант квадратного уравнения равен нулю, а четвёртый член прогрессии равен корню этого уравнения, т.е. $b_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{qa}{a} = -q$, где q – знаменатель прогрессии. С другой стороны, $b_4 = aq^3$. Отсюда получаем значение третьего члена прогрессии: $b_3 = aq^2 = -1$.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Ответ: 99.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC . Пусть его биссектриса AN и медиана BM пересекаются в точке O . В треугольнике ABM отрезок AO является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM = BM$.

Обозначим $AB = y, y \in \mathbb{Z}$. Тогда $AM = MC = y$. По свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому если $BN = x$, то $CN = 2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, т.е. $3(x+y) = 1200$, откуда $y = 400 - x$, поэтому $x \in \mathbb{Z}$. Учтём неравенство треугольника:

$$\begin{cases} 2y < y + 3x, \\ 3x < y + 2y, \\ y < 2y + 3x. \end{cases} \Leftrightarrow x < y < 3x.$$

Так как $y = 400 - x$, то $x < 400 - x < 3x \Leftrightarrow 100 < x < 200$. На этом интервале содержится 99 целых значений x .

Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника $(a; b; c)$ не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x < y < 3x$ заключаем, что из сторон треугольника $y, 2y$ и $3x$ сторона y – наименьшая. Тогда по заданному значению y вся тройка $(a; b; c)$ восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно y , ещё одно равно $2y$, а третье равно $p - y - 2y$ (где p – периметр). Поэтому две различные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями y .

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1), \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}; 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$.

Решение. Первое уравнение при условии $y - 2x \geq 0$ равносильно уравнению $(y - 2x)^2 = xy - 2x - y + 2$, откуда $y^2 + (1 - 5x)y + (4x^2 + 2x - 2) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x , имеем $D = (1 - 5x)^2 - 4(4x^2 + 2x - 2) = (3x - 3)^2$; $y = 4x - 2$ или $y = x + 1$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $y = 4x - 2$, то $6x^2 - 12x + 5 = 0$, и получаем две пары $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, y = 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}$ и $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}, y = 2 - \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Если $y = x + 1$, то $3x^2 - 6x = 0$, откуда также имеем две пары $x = 0, y = 1$ и $x = 2, y = 3$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geq 2y$ удовлетворяют только две из них: $(0; 1), \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}; 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$.

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .

Ответ: $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2}{5}$; $S_{\triangle CDE} = \frac{6}{5}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle CDE = \angle BAC + \angle AED = 90^\circ + \alpha$, $\angle DCE = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$. Пусть $AD = 3x$. Отсюда $AC = 5x$, $CD = 2x$, $DE = AD \sin \alpha = 3x \sin \alpha$. По теореме синусов для треугольника CDE имеем $\frac{2x}{\sin 45^\circ} = \frac{3x \sin \alpha}{\sin(45^\circ - \alpha)}$. Следовательно, $3 \sin \alpha \sin 45^\circ = 2 \sin(45^\circ - \alpha)$; $\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos \alpha - \sin \alpha)$; $5 \sin \alpha = 2 \cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$.

Площадь треугольника CDE равна $\frac{1}{2} \cdot DC \cdot DE \cdot \sin \angle CDE = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = \frac{3}{2} x^2 \sin 2\alpha = \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3}{2} \cdot \frac{29}{25} \cdot \frac{4/5}{1 + 4/25} = \frac{6}{5}$.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

Ответ: $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

Решение. Обозначим $\angle ABC = \psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB , отличная от A .

Отметим, что $\angle BDQ = 90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA = 90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{3}{2R-r} = \frac{4}{2R}$, а значит, $R = 2r$. По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R = 8r^2$. Следовательно, $BD = 2r\sqrt{2}$, $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $R = 2r = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Далее находим углы: $\angle BQD = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi$; $\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi$; $\angle QDA = \angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2}$; Следовательно, $\angle BDE = 180^\circ - \angle BDQ - \angle ADQ = 180^\circ - 90^\circ - (45^\circ - \frac{\psi}{2}) = 45^\circ + \frac{\psi}{2}$.

Перейдём к нахождению площади. Она равна половине произведения диагоналей, умноженной на синус угла между ними, т.е. $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin(45^\circ + \frac{\psi}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2R \cos \psi \cdot 2R \cos(45^\circ - \frac{\psi}{2}) \sin(45^\circ + \frac{\psi}{2}) = R^2 \cos \psi \cdot (\sin 90^\circ + \sin \psi)$. Поскольку $\sin \psi = \frac{DQ}{BQ} = \frac{r}{2R-r} = \frac{1}{3}$, $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, то окончательно $S = \frac{9}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + \frac{1}{3}) = 4\sqrt{2}$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Обозначим $h(x) = 2x^2 - x - 1$. График – парабола с ветвями вверх. На концах данного в условии промежутка имеем $h(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{8}$, $h(\frac{3}{2}) = 2$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ и $N(\frac{3}{2}; 2)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или ниже неё. Отсюда самое “низкое” расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN . Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ (назовём эту прямую ℓ).

График правой части неравенства – “уголок” $g(x) = x + |2x - 1|$ с вершиной в точке $P(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ и ветвями, направленными вверх. Заметим, что точка P лежит на прямой ℓ , поэтому любая прямая, расположенная выше ℓ , пересекает график $y = g(x)$ на рассматриваемом промежутке, и правая часть неравенства выполняется не при всех x .

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21$, $1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 182.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = [\frac{3}{2}] + [\frac{5}{2}] = 1 + 2 = 3$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [1; 21]$ и записываем их в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
$f(n)$	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 21 вариант.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 1$. В таблице есть 2 аргумента, при которых $f = 1$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 2 способами, а второй – 1 способом. Значит, количество пар такого типа равно $2 \cdot 1 = 2$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 2$. Аналогично предыдущему пункту получаем $4 \cdot 3 = 12$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 3$. Здесь $6 \cdot 5 = 30$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 4$. Здесь $4 \cdot 3 = 12$ пар.

Итого, есть $21 + 2 + 12 + 30 + 12 = 77$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $21^2 = 441$ пара, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{441-77}{2} = 182$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

-
1. **(2 балла)** Неверный ответ или неверное обоснование – 0 баллов за задачу.

Если рассматривается прогрессия с нулевыми членами и в ответ включено значение 0, то баллы не снимаются.

2. **(4 балла)** Установлено, что одна сторона треугольника вдвое больше другой – 1 балл;

получена система линейных неравенств с одной переменной (выписаны неравенства треугольника) – 1 балл;

получено двойное неравенство на переменную и посчитано количество треугольников – 2 балла; если при этом количество отличается от верного на 1 или на 2, то – 1 балл вместо 2;

ответ отличается от верного более чем на 2 – не более 2 баллов за задачу;

в неравенстве треугольника записаны нестрогие неравенства вместо строгих – не более 1 балла за задачу (он может быть поставлен за соотношение между сторонами треугольника).

3. **(4 балла)** Получено только одно линейное соотношение между x и y – 1 балл;

получены два линейных соотношения между x и y – 2 балла;

найжены решения системы для каждого линейного соотношения – по 1 баллу за соотношение;

приобретены лишние решения (не сделан отбор корней) или потеряны решения (за счёт того, что выражения вида $\sqrt{ab}$ заменено выражением $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, и при этом не учтён случай, когда оба числа a, b неположительны – не более 2 баллов за задачу.

4. **(5 баллов)** Найден тангенс угла – 3 балла;

найдена площадь треугольника – 2 балла.

Доказано, что $\angle CBD = \angle CED$ и других продвижений нет – 1 балл за задачу.

5. **(5 баллов)** Найден радиус окружности Ω – 1 балл;

найден радиус окружности ω – 1 балл;

найдена площадь четырёхугольника – 3 балла;

доказано, что AD – биссектриса угла BAC (и при этом площадь не найдена) – 1 балл;

6. **(5 баллов)**

- (а) **Если решается, как в авторских решениях**

нарисована только парабола или только “уголок” – 0 баллов за задачу;

построены оба графика (парабола и “уголок”) – 1 балл;

найден (подобрано) уравнение прямой (т.е. указаны a и b) – 2 балла;

обосновано, что неравенства выполняются на всём отрезке (т.е. показано, что вершина “уголка” лежит на найденной прямой) – 2 балла.

- (b) Если левая и правая части двойного неравенства рассматриваются отдельно, и при этом решение не доведено до конца не более 1 балла за задачу; этот балл ставится если выписаны условия того, что одно из неравенств выполняется для всех значений переменной из указанного промежутка.
- (c) При решении подстановкой точек и преобразованием полученных неравенств доказано, что условию задачи удовлетворяет не более чем одна пара $(a; b)$ – 3 балла; если при этом пара $(a; b)$ не найдена, то 0 баллов вместо 3; доказано, что при этих значениях $(a; b)$ неравенство выполнено на всём промежутке – 2 балла.
-

7. (5 баллов) Показано, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) - 1$ балл;

найжены значения функции f для всех натуральных значений аргумента из указанного диапазона – 1 балл;

если задача решается полным перебором (т.е. непосредственно проверяются все пары $(x; y)$ из указанного диапазона) и при подсчёте допущена ошибка – баллы не добавляются;

комбинаторная ошибка или неполный перебор (рассмотрены не все возможности) – не более 3 баллов за задачу.