

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.

1) Из того, что ab делится на 2^9 , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 9$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 19$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{9+14+19}{2} = 21$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 21$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 9$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 14$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 19$).

2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1 + \beta_2 \geq 10$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 13$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 18$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20,5$. Значит, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21$. Значение 21 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 11$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2 + \beta_3 = 14$, а два других неравенства обратить в равенства).

3) Из того, что ac делится на 5^{30} следует, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$. Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ может равняться 30, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 15$.

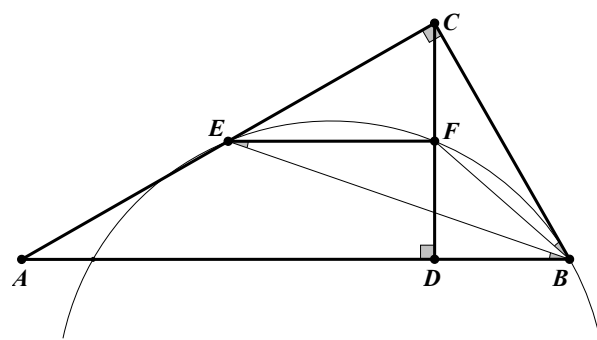
Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} 3^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} 5^{\min(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} = 2^{21} 3^{21} 5^{30}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

Ответ: $\frac{16}{3}$.

Решение. Соединим точку B с точками E и F . Так как $AB \parallel EF$, то $\angle ABE = \angle FEB$, а $\angle CBF = \angle FEB$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle ABE = \angle CBF$. Следовательно, BE и BF – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и CBD . Значит, $\frac{AE}{CE} = \frac{CF}{DF}$. По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{CF}$. Из полученных равенств следует, что $CF = DF$, поэтому F – середина CD , а так как $EF \parallel AD$, то EF – средняя линия треугольника ACD . Отсюда $S_{ACD} = 4S_{CEF}$ и



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{0,25S_{ACD}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot AB \cdot CD}{0,5 \cdot AD \cdot CD} = \frac{4AB}{AD} = 4 \left(\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} \right) = 4 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arcsin a$ эквивалентно соотношениям $\sin b = a$, $-\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{3\pi}{5} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \pm x = \frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}, \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}. \end{aligned}$$

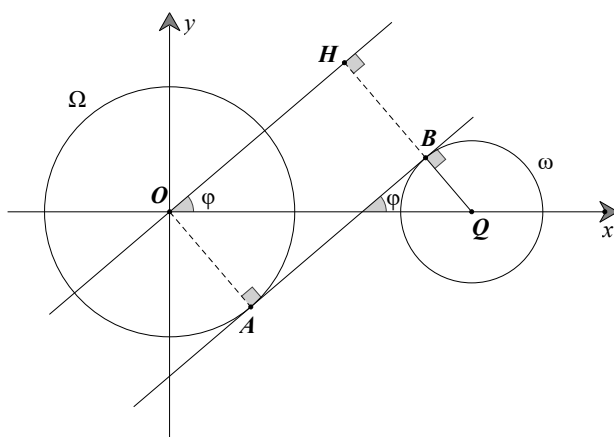
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $(x - 6)^2 + y^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(6; 0)$ и радиусами 3 и 2 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{2}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{2}$.



Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая

должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю меньше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O ; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 6$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 3 + 2 = 5$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{11}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{5}{\sqrt{11}}$. С учётом сказанного выше подходят все значения углового коэффициента, по модулю меньшие, чем $\operatorname{tg} \varphi$, откуда $\left|-\frac{a}{2}\right| < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ и $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$. Найдите все возможные значения произведения xy .

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решение. Обозначим $\log_3 x = u$, $\log_3(5y) = v$. Так как $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{u}$, $\log_{x^2} 243 = \frac{5}{2} \log_x 3 = \frac{5}{2u}$, $\log_{5y} 3 = \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{v}$, $\log_{25y^2}(3^{11}) = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = \frac{11}{2v}$, то исходные уравнения можно записать в

виде

$$\begin{cases} u^4 + \frac{6}{u} = \frac{5}{2u} - 8, \\ v^4 + \frac{2}{v} = \frac{11}{2v} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^5 + 16u + 7 = 0, \\ 2v^5 + 16v - 7 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-2w^5 - 16w - 7 = 0$, т.е. $2w^5 + 16w + 7 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_3 x + \log_3(5y) = 0$, $\log_3(5xy) = 0$, $5xy = 1$, $xy = \frac{1}{5}$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

Ответ: 5 778.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $3x_2 + y_2 - 33 = 3x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k .

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -3x$ и $y = -3x + 60$, поэтому они параллельны прямой $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 60$ и $0 \leq k + 33 \leq 60$, поэтому $k \in [0; 27]$.

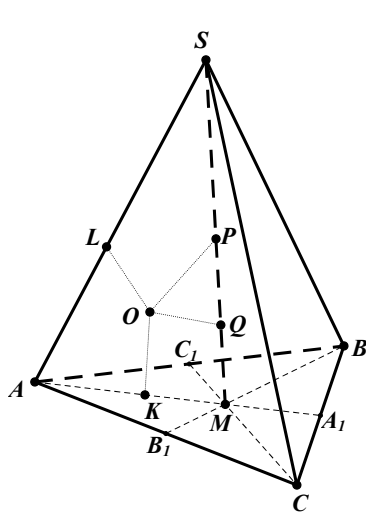
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -3x + b$. Если b кратно трём (т.е. $b = 3l$), то получаем прямую $y = 3(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась в параллелограмме нужно, чтобы $0 \leq y \leq 42 \Leftrightarrow l - 14 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 15 целых значений x . Если b не делится на 3, то есть при $b = 3l + \gamma$, где $\gamma \in \{1; 2\}$, имеем $0 \leq -3x + 3l + \gamma \leq 42 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{3} - 14 \leq x \leq l + \frac{\gamma}{3}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 13 \leq x \leq l$ – всего 14 целочисленных значений.

Если $k = 3l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ можно выбрать по 15 точек – всего $10 \cdot 15 \cdot 15 = 2\,250$ пар. Если $k \neq 3l$ (таких значений 18), то на каждой из двух прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ можно выбрать по 14 точек – имеем $18 \cdot 14 \cdot 14 = 3\,528$ пар. Итого получаем $2\,250 + 3\,528 = 5\,778$ пар.

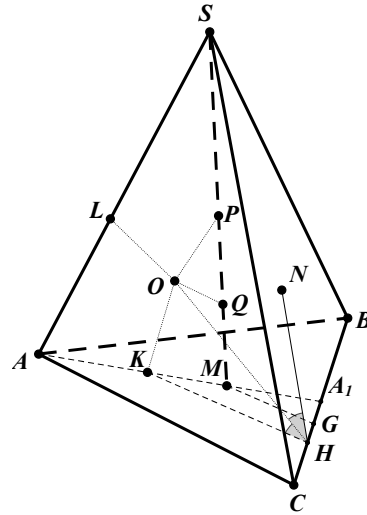
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Ответ: а) 2430; б) $2 \arctg \frac{3}{5} = \arccos \frac{8}{17}$.

Решение. а) Поскольку SL – касательная к сфере Ω , а SP и SQ – секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку



к задаче 7а



к задаче 7б

$MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω , проведённые из точки A , то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 12$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 18$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 6$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 6$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2}S_{ABC} = 135,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC . Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω .

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 5$. Так как $SL = SN = 4$ как касательные к Ω , то $AK = AL = SA - SL = 8$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 10$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{25}{3}$. Окончательно, $\operatorname{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{3}{5}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \arctg \frac{3}{5}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** Если решение полностью верно, то за задачу ставится 4 балла.

Иначе – за верно определенную степень каждого простого множителя – 1 балл (из них 0,5 балла ставится за оценку и 0,5 балла за пример); в случае дробного числа баллы округляются в большую сторону.

Неверное утверждение о делимости в решении, например, $x|a \ \& \ y|b \Rightarrow \frac{x}{y} \Big| \frac{a}{b}$ – 0 баллов за задачу.

2. **(5 баллов)** Варианты 1 и 3:

доказано равенство углов CBF и ABE – 1 балл;

доказано, что EF – средняя линия треугольника ACD – 3 балла. Эти баллы не суммируются!

Варианты 2 и 4:

доказано равенство углов BAF и CAE – 1 балл;

доказано, что EF – средняя линия треугольника BCD – 3 балла. Эти баллы не суммируются!

3. **(4 балла)** Неверное определение обратной тригонометрической функции или отсутствие отбора корней – 0 баллов за задачу;

за каждый неверно найденный корень или за каждый недостающий корень – снять 1 балл.

Если решение проводится взятием одной тригонометрической функции от обеих частей уравнения и в результате взятия синуса (косинуса) обеих частей уравнения получено уравнение-следствие вида $\cos f(x) = \sin g(x)$ – баллы не добавляются.

4. **(5 баллов)** Построено множество точек, удовлетворяющих второму уравнению системы – 1 балл;

сформулировано условие, при котором прямая может иметь 4 общие точки с двумя окружностями (её угловой коэффициент больше/меньше углового коэффициента общей внутренней касательной) – 2 балла;

найжены значения параметра – 2 балла.

В вариантах 2 и 4 не рассмотрен отдельно случай $a = 0$, но при этом получен верный ответ – баллы не снимаются.

5. **(5 баллов)** Первое уравнение сведено к уравнению относительно $\log_a(\alpha x)$, а второе – к уравнению относительно $\log_b(\beta y)$ – 1 балл;

доказано, что полученная система имеет не более одного решения – 1 балл;

не обосновано существование решений системы – баллы не снимаются, так как это следует из формулировки условия;

получен верный ответ, но в решении присутствует логическая ошибка – не более 3 баллов за задачу.

Типичный пример логической ошибки: есть система уравнений вида $\begin{cases} u^5 + 5u - 7 = 0, \\ v^5 + 5v + 7 = 0. \end{cases}$ Уравнения системы складывают и получают

$$u^5 + v^5 + 5u + 5v = 0 \Leftrightarrow (u + v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 + 5) = 0,$$

куда делают вывод, что $u + v = 0$, что не обосновано, независимо от того, доказана ли единственность решения системы.

6. (5 баллов) Ответ не доведён до числа – не более 4 баллов за задачу;

при подсчёте не учтены точки, лежащие на границе параллелограмма – снять 1 балл.

Ответ отличается от верного более чем в 10 раз – 0 баллов за задачу.

- Если решается рассмотрением различных значений разности $y_2 - y_1$:
 - задача сведена к рассмотрению различных значений разности $y_2 - y_1$ – 1 балл;
 - если при этом не учитываются отрицательные значения разности – баллы не добавляются;
 - верный подсчёт хотя бы в одном случае – 1 балл.
- Если решается как в приведённых решениях:
 - показано, что условие на координаты точек выполняется тогда и только тогда, когда точки лежат на прямых вида

$y = -3x + k$	и	$y = -3x + k + 33$	для варианта 1,
$y = -4x + k$	и	$y = -4x + k + 40$	для варианта 2,
$y = -5x + k$	и	$y = -5x + k + 45$	для варианта 3,
$y = -6x + k$	и	$y = -6x + k + 48$	для варианта 4
 - 1 балл;
 - определены возможные значения числа k – 1 балл;
 - для каждой прямой из указанного семейства определено количество точек на ней, имеющих целочисленные координаты и лежащих внутри параллелограмма – 1 балл;
 - найдено количество точек лишь на некоторых прямых (т.е. не на всех) – не более 2 баллов за задачу.

7. (6 баллов) а) Найдена длина медианы AA_1 – 1 балл;

найдено произведение длин двух других медиан – 2 балла.

б) решён пункт б) – 3 балла.