

**Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике**

Задания заочного этапа 2021/2022 учебного года для 7–8 класса

1) Учитель дал Коле и Мише четыре различных натуральных числа. Коля их сложил, а Миша - перемножил и получил 225. Какой результат получил Коля?

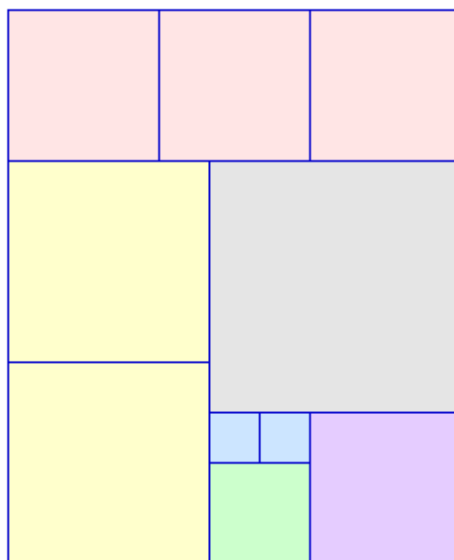
Ответ: 24.

Решение. Заметим, что $225 = 3^2 \times 5^2 = 15^2$. Упорядочим 4 числа: $a < b < c < d$. Тогда $a * b < 15 < c * d$, откуда $a=1$ или $a=3$. Случай $a = 3$ невозможен, поскольку тогда $5 \leq b < c < d \Rightarrow abcd \geq 3 * 5^3 = 375$. Аналогичными рассуждениями получаем $b=3, c=5, d=15$.

2) Прямоугольник разрезали на квадраты (см. рис.), площадь самого маленького квадрата равна 1 см². Найдите площадь прямоугольника.

Ответ: 99 см²

Решение: Сторона зеленого квадрата равна 2, сиреневого - 3, серого - 5, желтого 4 и розового - 3. Получаем прямоугольник 9 × 11.



3) В швейцарском городе Кляйнштадте коренные жители говорят на немецком и французском языках, причем каждый знает хотя бы один из языков. Также в городе проживает 20 мигрантов, которые не знают ни немецкого, ни французского. Среди коренных жителей по-французски говорят 85%, а на обоих языках (немецком и французском) – 60%. Доля говорящих на

немецком языке составляет $\frac{25}{34}$ от общего числа жителей (включая мигрантов). Сколько жителей в этом городе? В ответе укажите общее количество жителей, включая мигрантов.

Ответ: 1020.

Решение: На немецком говорят $15\% + 60\% = 75\%$ коренных жителей.

Обозначим число коренных жителей за x , тогда $\frac{3}{4}x = \frac{25}{34}(x + 20) \Rightarrow 102x = 100x + 2000 \Rightarrow x = 1000$. Прибавим мигрантов, получим 1020.

4) Два курьера, один на велосипеде, другой на мотоцикле выехали из пункта A в пункт B одновременно. К тому времени, когда мотоциклист прибыл в B , велосипедист прибыл в пункт C , расположенный между A и B на расстоянии 10 км от A и продолжил движение в направлении пункта B . Мотоциклист по прибытии в пункт B отдал груз и немедленно направился в пункт A . К тому моменту, когда курьеры встретились, велосипедист проехал еще 2 км. Найдите расстояние между пунктами A и B .

Ответ: 15 км

Решение: Запишем отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста, оно равно отношению отрезков пути, который они проезжают за одно время:

$$\frac{AB}{10} = \frac{AB - 12}{2}$$

$$2AB = 10AB - 120 \Rightarrow AB = 15.$$

5) Коля разобрал часы со стрелками и неправильно их собрал: перепутал часовую стрелку с минутной, кроме того, они начали идти в обратную сторону. Коля запустил часы в полдень, выставив точное время. Сколько раз за период с 12:01 до 23:59 такие часы покажут правильное время?

Ответ: 12

Решение: Точное время такие часы показывают, когда часовая и минутная стрелки расположены симметрично. Такой момент будет в каждый из промежутков 12-13, 13-14, ..., 23-24.

6) Найдите сумму всех положительных несократимых дробей вида $\frac{n}{77}$, не превосходящих 2.

Ответ: 120

Решение. Разобьем на интервалы $(0; 1)$ и $(1; 2)$. У каждой дроби из второго интервала есть пара из первого на 1 меньше.

Из чисел $1, 2, \dots, 76$ отбросим все, которые делятся на 7 или на 11, останется 60 чисел. На первом интервале разобьем на пары, симметричные относительно $\frac{1}{2}$, таких пар 30, а на втором - симметричные относительно 1.5, таких тоже 30. Сумма в каждой паре на $(0, 1)$ равна 1, а на $(1, 2)$ - 3. Значит на $(0, 1)$ сумма 30, а на $(1, 2)$ - 90.