

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

Задача 1.

В-1 Вычислите

$$\left[\sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} \right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t .)

Ответ: -10

Решение. Обозначим

$$t = \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}.$$

Так как $t^2 = 90 - 2\sqrt{45^2 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2025 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2}$, и при этом $t < 0$, значит $t = -\sqrt{90 - 2\sqrt{2}}$. Поскольку $81 < 90 - 2\sqrt{2} < 100$, то $-10 < t < -9$, и $[t] = -10$.

Задача 2.

В-1 При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234 \sin^{20} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 789 \cos^{23} \left(\alpha x - \frac{\pi}{4} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$?

Ответ: $-0,9$

Решение. Так как синус и косинус по модулю не превосходят 1, а $1234 + 789 = 2023$, решением уравнения может быть только такой x , при котором входящие в уравнение синус и косинус равны соответственно ± 1 (при возведении в 20-ю степень даст 1) и -1 (таким же останется при возведении в 23-ю степень). Отсюда находятся последовательности возможных значений для x и для αx (см. таблицу ниже для различных вариантов).

Эти значения включают в себя целочисленные параметры k и n , причем условие $-\pi \leq x \leq \pi$ приводит к ограничению на возможные целые значения параметра k . Для всех вариантов оказывается, что k может быть равным либо -1 , либо 0 .

Чтобы полученные для αx и x значения могли достигаться при одном и том же x , надо, чтобы их отношение совпадало с α . Таким образом, наше уравнение имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$, когда α представимо в виде дроби из таблицы, в которой k равно -1 или 0 , а n — любое целое число.

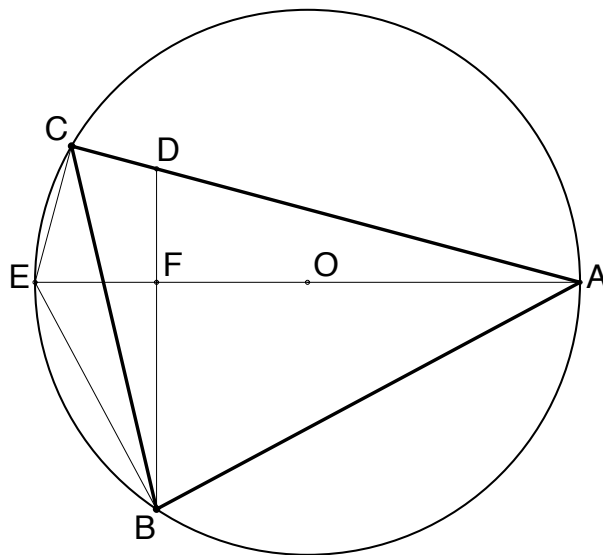
	$\sin^{20}$	$\cos^{23}$	x	αx	α	$\min \alpha $ при $\alpha = \dots$
В-1	$\left(x - \frac{\pi}{3} \right)$	$\left(\alpha x - \frac{\pi}{4} \right)$	$\frac{5\pi}{6} + \pi k$	$\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{15 + 24n}{10 + 12k}$	$\frac{-9}{10} = -0,9$

Чтобы найти такую дробь с наименьшим модулем, выберем n , минимизирующее модуль числителя, (для приведенных числителей это 0 или -1), а также допустимое k , максимизирующее модуль знаменателя.

Задача 3.

В-1 В треугольнике ABC длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 26



Решение.

Обозначим: длина $AB = c$, длина $AC = b$.

$$\angle ABE = \frac{\pi}{2} \Rightarrow ABE \text{ подобен } BFA : \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Leftrightarrow AE \cdot AF = c^2.$$

$$\angle ACE = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AEC \text{ подобен } AFD : \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF} \Leftrightarrow AD = \frac{AE \cdot AF}{AC} = \frac{c^2}{b};$$

$$CD = AC - AD = b - \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 - c^2}{b}.$$

Ответ: $\frac{b^2 - c^2}{b}$

Задача 4.

В-1 Пловец решил переплыть реку. Сначала он взял направление перпендикулярно течению — и течение снесло его на 12 метров. Оттуда он решил вернуться туда, откуда начал — он взял направление на точку, из которой началось плавание, и теперь течение снесло его на 20 метров от желаемой точки. Найдите ширину реки.

Ответ: 9

Решение. Пусть h — ширина реки, а $a = 12$ и $b = 20$ — заданные в условии отосы.

При первом заплыве вектор абсолютной скорости пловца был равен сумме продольной составляющей (скорости течения) и поперечной составляющей, модуль которой равен собственной скорости пловца в стоячей воде. Так как за время, за которое пловец переплыл реку, он переместился на h в поперечном направлении и на a в продольном, отношение его собственной скорости к скорости течения равно h/a .

Во время второго заплыва вектор абсолютной скорости был равен сумме всё той же продольной составляющей (скорости течения) и наклонной составляющей, направленной от точки второго старта к желаемой точке финиша и равной по модулю собственной скорости пловца. Умножая векторы скорости на время второго заплыва, получим два вектора перемещения: желаемый (длиной $\sqrt{a^2 + h^2}$) и снос длиной b . Отношение их длин равно всё тому же отношению скоростей, откуда

$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{b}.$$

Решая это уравнение относительно h , получим ответ:

$$h = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Задача 5.

В-1 Найдите площадь плоской фигуры, границы которой описываются уравнением

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1.$$

Ответ: 46

Решение.

Будем постепенно раскрывать модули.

1. Пусть $y \geq 0$. Тогда выражение имеет вид

$$||x| + |y - 3| - 3| = 1.$$

1.1. Пусть $y \geq 3$, тогда выражение имеет вид

$$||x| + y - 6| = 1.$$

1.1.1 Так как в функции берется модуль от x , то это означает, что можно начертить график в области $x \geq 0$ и сделать симметрию, относительно оси Oy . Тогда рассмотрим выражение:

$$|x + y - 6| = 1.$$

Рассмотрим, в общем, график функции $|kx + y - a| = b$. Раскрывая модуль, мы получим следующее:

1. Если $kx + y - a \geq 0$, то $kx + y - (a + b) = 0$. График — прямая, проходящая через точки $(0, a + b)$, $\left(\frac{a + b}{k}, 0\right)$.

2. Если $kx + y - a < 0$, тогда $-kx - y + a - b = 0$. График — прямая, проходящая через точки $(0, a - b)$, $\left(\frac{a - b}{k}, 0\right)$.

Таким образом в области $x \geq 0$, $y \geq 3$ мы имеем пару параллельных прямых, проходящих через точки $(0, 7) - (4, 3)$ и $(0, 5) - (2, 3)$.

1.2. Пусть $0 \leq y < 3$, тогда выражение имеет вид

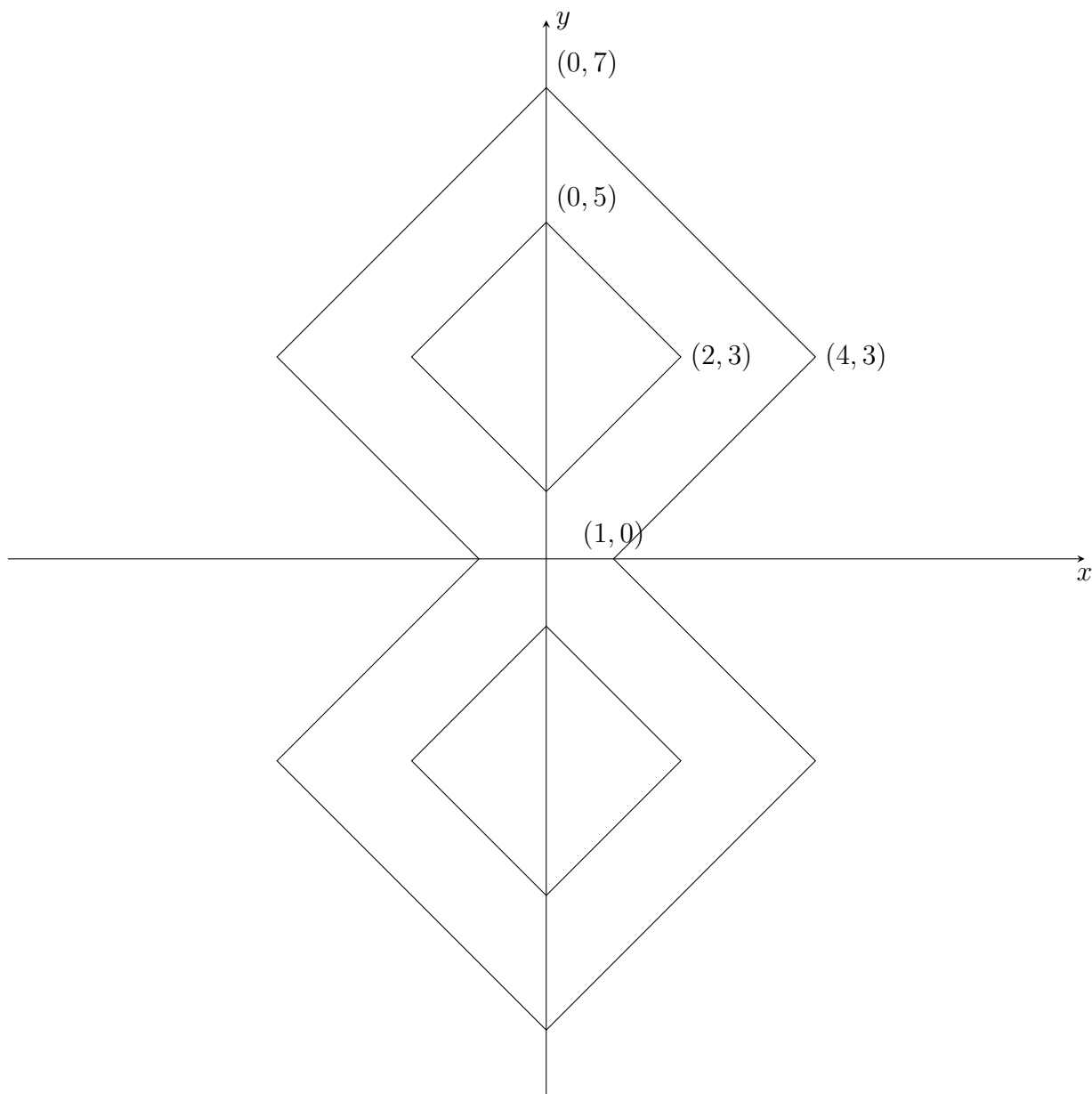
$$||x| - y| = 1.$$

Теперь опять применим свойство модуля $|x|$ и будем исследовать выражение

$$|x - y| = 1.$$

Раскроем модуль, получим график — две параллельные прямые, проходящие через точки $(2, 3) - (0, 1)$ и $(4, 3) - (1, 0)$.

В области, где $y < 0$ также воспользуемся свойством модуля. График в этой области симметричен относительно оси Ox . Таким образом, получаем следующую фигуру



Теперь посчитаем площадь. Так как фигура симметрична относительно оси Ox , достаточно посчитать площадь верхней половины. Удобнее всего увидеть, что это квадрат со стороной $4\sqrt{2}$ из которого «вырезали» меньший квадрат со стороной $2\sqrt{2}$ и «отрезали» угол — равнобедренный прямоугольный треугольник, высота которого к гипотенузе равна 1, а гипотенуза равна 2.

Таким образом площадь равна:

$$2 \cdot \left((4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right) = 46.$$

Задача 6.

В-1 Для укладки пола в квадратной комнате купили одинаковые квадратные плитки. 15 плиток оказались разбитыми. Оставшимися плитками выложили пол в другой комнате прямоугольной формы, в длину которой укладывается на 11 плиток больше, чем в ширину. Сколько плиток было куплено?

Ответ: 225

Решение. Пусть купили x^2 плиток, в ширину прямоугольной комнаты укладывается y плиток. Тогда верно равенство

$$y(y + 11) = x^2 - 15.$$

Дискриминант квадратного уравнения $y^2 + 11y - x^2 + 15 = 0$ относительно y равен $D = 121 + 4x^2 - 60 = 61 + 4x^2$. Чтобы уравнение имело целое решение, число $61 + 4x^2$ должно быть нечетным квадратом, т.е.

$$61 + 4x^2 = z^2,$$

откуда $(z - 2x)(z + 2x) = 61$. Т.к. 61 — простое число, то $z - 2x = 1$ и $z + 2x = 61$, откуда $z = 31$, $x = 15$.

Задача 7.

В-1 На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

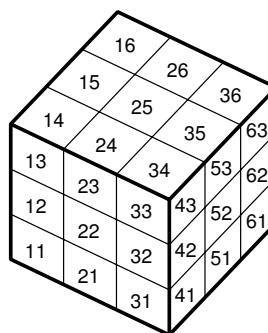
- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 5 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

Ответ: 19

Решение. Для отслеживания движения жучка будем использовать частичную развертку куба, покрывающую 3 грани. Каждый квадратик будем обозначать двузначным числом, 1-я и 2-я цифры которого являются соответствующими координатами центра квадратика на развертке (единица — ширина квадратика):

16	26	36			
15	25	35			
14	24	34			
13	23	33	43	53	63
12	22	32	42	52	62
11	21	31	41	51	61



Маршрут жучка определяется его начальным положением и направлением его первого перемещения. Хотя всего таких вариантов 54×4 , их все можно разбить на 9 принципиально различных групп:

- 1) жучок стартует с центрального квадратика любой грани по направлению к любому ребру;
- 2–3) старт с углового квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка;
- 4–5) старт с углового квадратика любой грани, а при первом перемещении жучок переползает на соседнюю грань, причем третья примыкающая грань остается соответственно справа или слева от него;
- 6) старт с приреберного квадратика любой грани по направлению к центру;
- 7) старт с приреберного квадратика любой грани с переходом на соседнюю грань при первом перемещении;
- 8–9) старт с приреберного квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка.

Заполним таблицу, в которой для каждой группы приведем пример маршрута в течение того времени, когда обнаруживается его периодичность, т. е. когда на какой-либо четной секунде жучок оказывается на начальном квадратице, а еще через 1 с — на квадратице, где он был через 1 с после начала движения.

В случае группы 1 выберем для старта квадратик 22 с первым перемещением $22 \rightarrow 23$ и проследим весь маршрут, пока не обнаружим, что его период равен 24 с (1-я колонка таблицы после двойной вертикальной черты).

Заметим, что через 2 с после начала движения жучок окажется в начальном состоянии группы 8. Поэтому для нее маршрут также будет иметь период 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 2 с.

Еще через 2 с жучок окажется в начальном состоянии группы 4. Поэтому и для нее маршрут будет с периодом 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 4 с.

Еще через 2 с имеем начальное состояние группы 7 и получаем ее маршрут с периодом 24 с из маршрута группы 1 сдвигом на 6 с.

Для остальных групп получаются кольцевые маршруты с периодом 8 с, причем в течение одного периода жучок ни на одном квадратице не оказывается дважды.

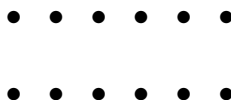
$T, \text{с}$	Гр. 1	Гр. 2	Гр. 3	Гр. 4	Гр. 5	Гр. 6	Гр. 7	Гр. 8	Гр. 9
0	22	31	31	43	13	21	23	24	12
1	23	32	21	33	14	22	24	34	13
2	24	33	11	23	15	23	25	43	14
3	34	43	12	24	25	33	35	33	24
4	43	53	13	25	35	43	53	23	34
5	33	52	23	35	34	42	43	24	33
6	23	51	33	53	33	41	33	25	32
7	24	41	32	43	23	31	34	35	22
8	25	31	31	33	13	21	35	53	12
9	35	32	21	34	14	22	53	43	13
10	53			35			52	33	
11	43			53			42	34	
12	33			52			32	35	
13	34			42			33	53	
14	35			32			34	52	
15	53			33			43	42	
16	52			34			42	32	
17	42			43			32	33	
18	32			42			22	34	
19	33			32			23	43	
20	34			22			24	42	
21	43			23			34	32	
22	42			24			43	22	
23	32			34			33	23	
24	22			43			23	24	
25	23			33			24	34	

Так как $2023 \equiv 7 \pmod{24}$ (остаток от деления 2023 на 24 равен 7) и $2023 \equiv 7 \pmod{8}$ (остаток от деления 2023 на 8 равен 7), то через 2023 с после начала движения жучок окажется на том же квадратице, на котором он был через 7 с после начала, а за 5 с до этого — на том же квадратице, на котором он был через 2 с после начала.

Как видно из таблицы, такое совпадение имеет место только для группы 1 (квадратик 24). Так как этот квадратик встречается на маршруте только дважды в течение периода (2 с и 7 с), следующее попадание на него произойдет через $2 + 24 - 7 = 19$ (с).

Задача 8.

В-1



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 7 пар пересекающихся отрезков?

Ответ: 101

Решение. Пусть в каждом ряду по n точек. Способ соединить точки можно задать перестановкой n чисел, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$: первая точка верхнего ряда соединяется с точкой под номером i_1 , вторая — с i_2 , и так далее. Значит, всего возможных рисунков будет $n!$.

Теперь берём пару отрезков. Пусть это отрезки с концами a, i_a и b, i_b , считаем $a < b$. В каком случае они пересекаются? В том, когда $i_a > i_b$. Учитывая, что a, b могут быть любой парой, замечаем следующее: общее количество пересечений отрезков равно количеству случаев, когда в перестановке большее число стоит раньше меньшего (не обязательно по соседству). Как сказали бы старшие товарищи, число пересечений равно числу инверсий в перестановке. Так и будем говорить дальше.

Например, 12345 — нет инверсий и нет пересечений, 21345 — одна инверсия (2 и 1), 43152 — 6 инверсий (4 и 3, 4 и 1, 4 и 2, 3 и 1, 3 и 2, 5 и 2). Наибольшее количество инверсий будет, если написать числа задом наперёд: 54321, какие два числа не выбери — большее будет стоять раньше. То есть инверсий в последнем примере 10, а в общем случае — C_n^2 .

Как посчитать число перестановок с заданным количеством инверсий? Подойдём к задаче индуктивно. В фигурных скобках будем указывать различные перестановки, а в квадратных перечислим количества перестановок, имеющих соответственно $0, 1, \dots, C_n^2$ инверсий.

Итак, единственный элемент можно расположить единственным образом, и у нас есть одна перестановка с нулевым числом инверсий.

$$\{1\}; \quad [1]$$

Добавляем двойку — её можно добавить в начало и в конец имеющейся перестановки $\{1\}$. Одна из полученных перестановок будет без инверсий, другая — с одной инверсией.

$$\underbrace{\{12\}}_{0 \text{ инверсий}}, \underbrace{\{21\}}_{1 \text{ инверсия}}; \quad [1, 1]$$

Добавляем тройку — её мы можем поставить в любое место каждой из имеющихся перестановок. Тройка больше всех имевшихся ранее чисел, поэтому если поставить её на последнее место — новых инверсий не добавится, если поставить на предпоследнее (на второе) — добавится одна инверсия, а если на первое — будет плюс две инверсии. Одна перестановка с нулём инверсий, две перестановки с одной, две перестановки с двумя, одна перестановка с тремя. То есть:

$$\underbrace{\{123\}}_{0+0}, \underbrace{\{213\}}_{1+0}, \underbrace{\{132\}}_{0+1}, \underbrace{\{231\}}_{1+1}, \underbrace{\{312\}}_{0+2}, \underbrace{\{321\}}_{1+2}; \quad [1, 2, 2, 1]$$

Так же будет происходить добавление нового числа n в общем случае: число n можно поставить на любое место, и в зависимости от места к инверсиям добавится $+0, +1, +2, \dots, +(n-1)$ штук. То есть на новом шаге перестановка с l инверсиями превращается в n перестановок с $l+0, l+1, l+2, \dots, l+(n-1)$ инверсиями соответственно.

Посмотрим, какие числа получались в квадратных скобках. Напишем эти последовательно одну под другой:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 2\ 1 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Здесь в n -й строке (нумерация начинается с 1) приводятся числа P_n^k для $k = 0, 1, \dots, C_n^k$, равные количеству перестановок из n чисел с k инверсиями.

Вспоминая, как происходит добавление нового n , получим

$$P_n^k = \underbrace{P_{n-1}^k}_{+0 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-1}}_{+1 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-2}}_{+2 \text{ инв.}} + \dots + \underbrace{P_{n-1}^{k-n+1}}_{+(n-1) \text{ инв.}}.$$

Действительно, P_{n-1}^k — количество перестановок из $(n-1)$ чисел, в которых уже есть k инверсий. В них мы вынуждены поставить новое n на последнее место (+0 инверсий). Раз мы ставим n на единственно возможное место, количество перестановок не изменится.

Далее, P_{n-1}^{k-1} — количество перестановок с $(k-1)$ инверсией, и, чтобы добавить недостающую, мы вынуждены ставить n на предпоследнее место (+1 инверсия).

Продолжаем так вплоть до P_{n-1}^{k-n+1} , потому что добавить больше $(n-1)$ инверсии нельзя. Всего получается n слагаемых. Из других перестановок предыдущей строки мы ничего нового получить не сможем.

Заметим, что $P_n^{-k} = 0$, так как не бывает перестановок с отрицательным числом инверсий, как и не может быть перестановок со слишком большим (больше чем C_n^2) количеством инверсий.

Итак, имеем следующий способ построения коллекции P_n^k .

Первая строчка:

$$\dots 0 \underbrace{0\ 0}_{\rightarrow} 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots$$

По строчке ползёт «окно» шириной 2. Попавшие в «окно» числа складываются и выписываются в следующую (2-ю) строку:

$$\dots 0 \underbrace{(0\ 0)}_{=0} 1\ 0\ 0\ 0 \dots \quad \dots 0\ 0 \underbrace{(0\ 1)}_{=1} 0\ 0\ 0 \dots \quad \dots 0\ 0\ 0 \underbrace{(1\ 0)}_{=1} 0\ 0 \dots \quad \dots 0\ 0\ 0\ 1 \underbrace{(0\ 0)}_{=0} 0 \dots$$

Вторая строчка:

$$\dots 0 \underbrace{0\ 0\ 0}_{\rightarrow} 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots$$

По ней будет ползти окно шириной 3. Сложение попавших в окно чисел даст третью строку:

$$\dots 0 \underbrace{0\ 0\ 0\ 0}_{\rightarrow} 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots$$

По ней поползёт окно шириной 4, и так далее, чтобы получить n -ю строку, нужно складывать n стоящих подряд чисел предыдущей строки.

Выпишем (без нулей) первые 6 строк нашей коллекции и выберем в ней нужное нам P_6^7 :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 5\ 6\ 5\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 9\ 15\ 20\ 22\ 20\ 15\ 9\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 14\ 29\ 49\ 71\ 90\ \underline{101}\ 101\ 90\ 71\ 49\ 29\ 14\ 5\ 1 \end{array}$$

Заметим, что сумма чисел в каждой строке равна $n!$ (общее число перестановок).

ЛОМОНОСОВ – 2022-23. МАТЕМАТИКА.
Критерии проверки. 10 класс

Задача № 1 (15 баллов)	Балл
Приближенное решение при верном ответе (в т. ч. с использованием знака ' $\approx$ ') <i>или</i> округление не в ту сторону на последнем шаге решения	10

Задача № 2 (15 баллов)	Балл
Арифметическая ошибка в конце решения (при этом верный ответ не получен ни в каком виде) <i>или</i> в процессе решения упущена точка	10
Указано, что решения возможны только при экстремальных значениях синуса, косинуса	5

Задача № 3 (15 баллов)	Балл
Арифметическая ошибка <i>или</i> указаны обе нужные пары подобных треугольников	10
Указана одна нужная пара подобных треугольников	5

Задача № 4 (15 баллов)	Балл
Арифметическая ошибка	10
Верно составлено уравнение	5

Задача № 5 (15 баллов)	Балл
Чертеж верный при неверном ответе	10
Чертеж неверный вследствие ошибки при раскрытии модуля	5

Задача № 6 (15 баллов)	Балл
Арифметическая ошибка	10
Уравнение составлено, но не решено	5

Задача № 7 (15 баллов)	Балл
Перебор с верным ответом	15
Перебор без верного ответа	5

Задача № 8 (15 баллов)	Балл
Приведено соображение об инверсиях и пересечениях (иные существенные продвижения согласовываются)	5

При получении суммы баллов, большей 100, участнику ставится оценка 100.

Задача 1.

В-1 Вычислите

$$\left[\sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} \right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

Ответ: -10

Решение. Обозначим

$$t = \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}.$$

Так как $t^2 = 90 - 2\sqrt{45^2 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2025 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2}$, и при этом $t < 0$, значит $t = -\sqrt{90 - 2\sqrt{2}}$. Поскольку $81 < 90 - 2\sqrt{2} < 100$, то $-10 < t < -9$, и $[t] = -10$.

В-2 Вычислите

$$\left[\sqrt{45 + \sqrt{2022}} - \sqrt{45 - \sqrt{2022}} \right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

Ответ: 9

В-3 Вычислите

$$\left[\sqrt{45 + \sqrt{2023}} - \sqrt{45 - \sqrt{2023}} \right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

Ответ: 9

В-4 Вычислите

$$\left[\sqrt{45 - \sqrt{2022}} - \sqrt{45 + \sqrt{2022}} \right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

Ответ: -10

Задача 2.

В-1 При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234 \sin^{20} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 789 \cos^{23} \left(\alpha x - \frac{\pi}{4} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$?

Ответ: $-0,9$

Решение. Так как синус и косинус по модулю не превосходят 1, а $1234 + 789 = 2023$, решением уравнения может быть только такой x , при котором входящие в уравнение синус и косинус равны соответственно ± 1 (при возведении в 20-ю степень даст 1) и -1 (таким же останется при возведении в 23-ю степень). Отсюда находятся последовательности возможных значений для x и для αx (см. таблицу ниже для различных вариантов).

Эти значения включают в себя целочисленные параметры k и n , причем условие $-\pi \leq x \leq \pi$ приводит к ограничению на возможные целые значения параметра k . Для всех вариантов оказывается, что k может быть равным либо -1 , либо 0 .

Чтобы полученные для αx и x значения могли достигаться при одном и том же x , надо, чтобы их отношение совпадало с α . Таким образом, наше уравнение имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$, когда α представимо в виде дроби из таблицы, в которой k равно -1 или 0 , а n — любое целое число.

	$\sin^{20}$	$\cos^{23}$	x	αx	α	$\min \alpha $ при $\alpha = \dots$
В-1	$\left(x - \frac{\pi}{3} \right)$	$\left(\alpha x - \frac{\pi}{4} \right)$	$\frac{5\pi}{6} + \pi k$	$\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{15 + 24n}{10 + 12k}$	$\frac{-9}{10} = -0,9$
В-2	$\left(x - \frac{\pi}{6} \right)$	$\left(\alpha x - \frac{\pi}{6} \right)$	$\frac{2\pi}{3} + \pi k$	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$	$\frac{7 + 12n}{4 + 6k}$	$\frac{-5}{4} = -1,25$
В-3	$\left(x + \frac{\pi}{3} \right)$	$\left(\alpha x + \frac{\pi}{3} \right)$	$\frac{\pi}{6} + \pi k$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$	$\frac{4 + 12n}{1 + 6k}$	$\frac{4}{-5} = -0,8$
В-4	$\left(x + \frac{\pi}{6} \right)$	$\left(\alpha x + \frac{\pi}{4} \right)$	$\frac{\pi}{3} + \pi k$	$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{9 + 24n}{4 + 12k}$	$\frac{9}{-8} = -1,125$

Чтобы найти такую дробь с наименьшим модулем, выберем n , минимизирующее модуль числителя, (для приведенных числителей это 0 или -1), а также допустимое k , максимизирующее модуль знаменателя.

В-2 При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234 \sin^{20} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 789 \cos^{23} \left(\alpha x - \frac{\pi}{6} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$?

Ответ: $-1,25$

В-3 При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234 \sin^{20} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 789 \cos^{23} \left(\alpha x + \frac{\pi}{3} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$?

Ответ: $-0,8$

В-4 При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234 \sin^{20} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 789 \cos^{23} \left(\alpha x + \frac{\pi}{4} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$?

Ответ: $-1,125$

Задача 3.

В-1 Решите уравнение

$$\log_2(|x^2 - 2|^3 + 1) + \sqrt{4x^4 - 3x^2 + 5} = \sqrt{2x^4 + 5x^2 - 3}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2}$

Решение. Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$4x^4 - 3x^2 + 5 \leq 2x^4 + 5x^2 - 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 \leq 0,$$

т. е. $x^2 = 2$. Проверка показывает, что $x = \pm\sqrt{2}$ — решение.

В-2 Решите уравнение

$$\log_3(|x^2 - 3|^3 + 1) + \sqrt{4x^4 - 5x^2 + 11} = \sqrt{2x^4 + 7x^2 - 7}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$

Решение. Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$x^4 - 5x^2 + 11 \leq 2x^4 + 7x^2 - 7 \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 \leq 0,$$

т. е. $x^2 = 3$. Проверка показывает, что $x = \pm\sqrt{3}$ — решение.

В-3

Решите уравнение

$$\log_5(|x^2 - 5|^3 + 1) + \sqrt{3x^4 - 7x^2 + 19} = \sqrt{2x^4 + 3x^2 - 6}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{5}$

Решение. Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$3x^4 - 7x^2 + 19 \leq 2x^4 + 3x^2 - 6 \Leftrightarrow (x^2 - 5)^2 \leq 0,$$

т. е. $x^2 = 5$. Проверка показывает, что $x = \pm\sqrt{5}$ — решение.

В-4 Решите уравнение

$$\log_7(|x^2 - 7|^3 + 1) + \sqrt{3x^4 - 9x^2 + 31} = \sqrt{2x^4 + 5x^2 - 18}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{7}$

Решение. Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$3x^4 - 9x^2 + 31 \leq 2x^4 + 5x^2 - 18 \Leftrightarrow (x^2 - 7)^2 \leq 0,$$

т. е. $x^2 = 7$. Проверка показывает, что $x = \pm\sqrt{7}$ — решение.

Задача 4.

В-1

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 6, ещё одна — длину 1, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

Ответ: 9

Решение.

Пусть известные длины сторон четырехугольника равны b, b и c .

В условии не указан порядок расположения этих сторон: b, b, c или b, c, b . Но вместо четырехугольника $ABCD$, в котором, скажем $AB = CD = b$, $BC = c$, рассмотрим четырехугольник $AB'CD$, в котором, $B'C = CD = b$, $AB' = c$. В нем тот же набор известных длин сторон (но в другом порядке), а площади этих четырехугольников равны, так как это суммы $S(ABC) + S(ACD)$ и $S(AB'C) + S(ACD)$, причем $\triangle ABC = \triangle AB'C$.

Поэтому можно считать, что $AB = CD = b$, $BC = c$.

Заметим, что двигая точку D по дуге окружности радиуса b с центром в точке C , мы будем получать четырехугольник с тем же набором известных длин сторон, с той же частью ABC , а площадь части ACD будет наибольшей тогда, когда $CD \perp AC$ (иначе при том же основании AC высота из точки D будет короче, чем b). Двигая аналогично точку A вокруг точки B , получим, что из свойства максимальной площади четырехугольника $ABCD$ вытекает $AB \perp BD$.

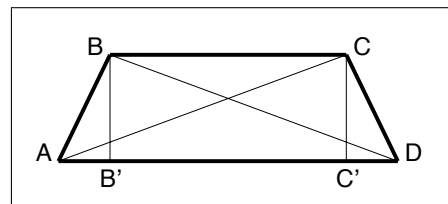
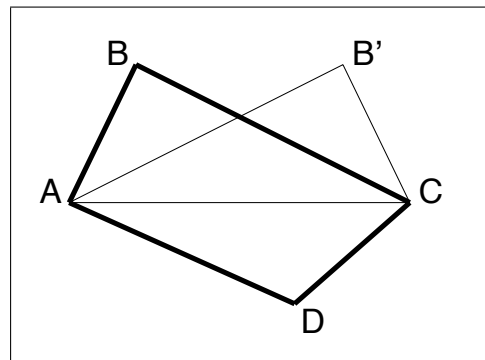
Итак, имеются два прямоугольных треугольника ABD и ACD с общей гипотенузой AD и равными катетами AB и CD . Значит, треугольники равны, как и их высоты на гипотенузу, т. е. $ABCD$ — равнобедренная трапеция с тупыми углами B и C .

Пусть $d = AB' = C'D$, где B' и C' — проекции точек B и C на AD . Тогда из свойства высоты прямоугольного треугольника получаем $AB' \cdot B'D = B'B^2$, т. е. $d(c + d) = b^2 - d^2$ или $2d^2 + cd - b^2 = 0$, откуда, с учетом того, что $d > 0$,

$$d = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 8b^2}}{4}, \quad a = AD = c + 2d = \frac{c + \sqrt{c^2 + 8b^2}}{2},$$

Вычисления по вариантам:

	b	c	$\sqrt{c^2 + 8b^2}$	a
В-1	6	1	17	9
В-2	3	7	11	9
В-3	4	14	18	16
В-4	6	14	22	18



В-2

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 3, ещё одна — длину 7, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

Ответ: 9

В-3

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 4, ещё одна — длину 14, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

Ответ: 16

В-4

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 6, ещё одна — длину 14, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

Ответ: 18

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2022/2023 учебного года для 11 класса

Задача 5.

В-1 Обозначим через $s(n)$ число цифр в десятичной записи натурального числа n . Найдите сумму $s(2^{2023}) + s(5^{2023})$

Ответ: 2024

Решение. Заметим, что

$$s(2^{2023}) = \lg(2^{2023}) + a = 2023 \lg 2 + a, \quad \text{где } 0 < a < 1.$$

Аналогично,

$$s(5^{2023}) = \lg(5^{2023}) + b = 2023 \lg 5 + b, \quad \text{где } 0 < b < 1.$$

Тогда

$$s(2^{2023}) + s(5^{2023}) = 2023(\lg 2 + \lg 5) + a + b = 2023 + (a + b).$$

Значит, $a + b$ целое, причем $0 < a + b < 2$, так как $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. Отсюда $a + b = 1$, а ответ равен 2024.

В общем случае — $s(2^n) + s(5^n) = n + 1$.

В-2 Обозначим через $s(n)$ число цифр в десятичной записи натурального числа n . Найдите сумму $s(2^{2022}) + s(5^{2022})$

Ответ: 2023

В-3 Обозначим через $s(n)$ число цифр в десятичной записи натурального числа n . Найдите сумму $s(2^{2021}) + s(5^{2021})$

Ответ: 2022

В-4 Обозначим через $s(n)$ число цифр в десятичной записи натурального числа n . Найдите сумму $s(2^{2020}) + s(5^{2020})$

Ответ: 2021

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2022/2023 учебного года для 11 класса

Задача 6.

В-1 Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_1 = 19$, а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых $n \geq 2$ равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2023-го члена последовательности к сумме её первых 2022 членов.

Ответ: $2024 \frac{1}{1011}$

Решение. Найдём a_n/a_1 , перемножив указанное в условии отношение для различных n :

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{(n^2 + 1)n}{(n - 1)^2 + 1} \cdot \frac{((n - 1)^2 + 1)(n - 1)}{(n - 2)^2 + 1} \cdots \frac{(2^2 + 1)2}{1 + 1} = \frac{(n^2 + 1)n!}{2}.$$

Представим его в виде разности:

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{(n^2 + 1)n!}{2} = \frac{1}{2}(n(n + 1) - (n - 1))n! = \frac{n(n + 1)!}{2} - \frac{(n - 1)n!}{2} = b_n - b_{n-1},$$

где

$$b_n = \frac{n(n + 1)!}{2}.$$

Тогда отношение суммы первых n членов к a_1 равно

$$\frac{S_n}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1} = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0 = \frac{n(n + 1)!}{2}.$$

Стало быть, ответ равен

$$\frac{a_n}{S_{n-1}} = \frac{a_n/a_1}{S_{n-1}/a_1} = \frac{(n^2 + 1)n!}{(n - 1)n!} = \frac{n^2 + 1}{n - 1} = \frac{n^2 - 1 + 2}{n - 1} = n + 1 + \frac{2}{n - 1} = 2024 \frac{1}{1011}.$$

В-2 Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_1 = 17$, а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых $n \geq 2$ равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2023-го члена последовательности к сумме её первых 2022 членов.

Ответ: $2024 \frac{1}{1011}$

В-3 Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_1 = 13$, а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых $n \geq 2$ равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2022-го члена последовательности к сумме её первых 2021 членов.

Ответ: $2023 \frac{2}{2021}$

В-4 Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_1 = 11$, а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых $n \geq 2$ равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2022-го члена последовательности к сумме её первых 2021 членов.

Ответ: $2023 \frac{2}{2021}$

Задача 7.

В-1 На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

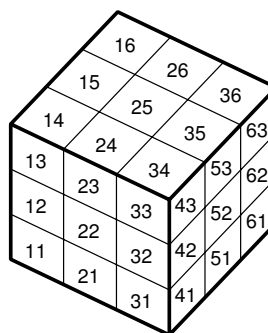
- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 5 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

Ответ: 19

Решение. Для отслеживания движения жучка будем использовать частичную развертку куба, покрывающую 3 грани. Каждый квадратик будем обозначать двузначным числом, 1-я и 2-я цифры которого являются соответствующими координатами центра квадратика на развертке (единица — ширина квадратика):

16	26	36			
15	25	35			
14	24	34			
13	23	33	43	53	63
12	22	32	42	52	62
11	21	31	41	51	61



Маршрут жучка определяется его начальным положением и направлением его первого перемещения. Хотя всего таких вариантов 54×4 , их все можно разбить на 9 принципиально различных групп:

- 1) жучок стартует с центрального квадратика любой грани по направлению к любому ребру;
- 2–3) старт с углового квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка;
- 4–5) старт с углового квадратика любой грани, а при первом перемещении жучок переползает на соседнюю грань, причем третья примыкающая грань остается соответственно справа или слева от него;
- 6) старт с приреберного квадратика любой грани по направлению к центру;
- 7) старт с приреберного квадратика любой грани с переходом на соседнюю грань при первом перемещении;
- 8–9) старт с приреберного квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка.

Заполним таблицу, в которой для каждой группы приведем пример маршрута в течение того времени, когда обнаруживается его периодичность, т. е. когда на какой-либо четной секунде жучок оказывается на начальном квадратице, а еще через 1 с — на квадратице, где он был через 1 с после начала движения.

В случае группы 1 выберем для старта квадратик 22 с первым перемещением $22 \rightarrow 23$ и проследим весь маршрут, пока не обнаружим, что его период равен 24 с (1-я колонка таблицы после двойной вертикальной черты).

Заметим, что через 2 с после начала движения жучок окажется в начальном состоянии группы 8. Поэтому для нее маршрут также будет иметь период 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 2 с.

Еще через 2 с жучок окажется в начальном состоянии группы 4. Поэтому и для нее маршрут будет с периодом 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 4 с.

Еще через 2 с имеем начальное состояние группы 7 и получаем ее маршрут с периодом 24 с из маршрута группы 1 сдвигом на 6 с.

Для остальных групп получаются кольцевые маршруты с периодом 8 с, причем в течение одного периода жучок ни на одном квадратице не оказывается дважды.

$T, \text{с}$	Гр. 1	Гр. 2	Гр. 3	Гр. 4	Гр. 5	Гр. 6	Гр. 7	Гр. 8	Гр. 9
0	22	31	31	43	13	21	23	24	12
1	23	32	21	33	14	22	24	34	13
2	24	33	11	23	15	23	25	43	14
3	34	43	12	24	25	33	35	33	24
4	43	53	13	25	35	43	53	23	34
5	33	52	23	35	34	42	43	24	33
6	23	51	33	53	33	41	33	25	32
7	24	41	32	43	23	31	34	35	22
8	25	31	31	33	13	21	35	53	12
9	35	32	21	34	14	22	53	43	13
10	53			35			52	33	
11	43			53			42	34	
12	33			52			32	35	
13	34			42			33	53	
14	35			32			34	52	
15	53			33			43	42	
16	52			34			42	32	
17	42			43			32	33	
18	32			42			22	34	
19	33			32			23	43	
20	34			22			24	42	
21	43			23			34	32	
22	42			24			43	22	
23	32			34			33	23	
24	22			43			23	24	
25	23			33			24	34	

Так как $2023 \equiv 7 \pmod{24}$ (остаток от деления 2023 на 24 равен 7) и $2023 \equiv 7 \pmod{8}$ (остаток от деления 2023 на 8 равен 7), то через 2023 с после начала движения жучок окажется на том же квадратице, на котором он был через 7 с после начала, а за 5 с до этого — на том же квадратице, на котором он был через 2 с после начала.

Как видно из таблицы, такое совпадение имеет место только для группы 1 (квадратик 24). Так как этот квадратик встречается на маршруте только дважды в течение периода (2 с и 7 с), следующее попадание на него произойдет через $2 + 24 - 7 = 19$ (с).

В-2 На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 7 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

Ответ: 10

Решение. Решение то же, что и для В-1, но последнее условие задачи выполняется только для группы 4 (квадратик 43 через 0 с, 7 с и 17 с). Поэтому получается ответ $17 - 7 = 10$ (с).

В-3 На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 10 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

Ответ: 7

Решение. Решение то же, что и для В-1, но последнее условие задачи выполняется только для группы 7 (квадратик 34 через 7 с, 14 с и 21 с) ввиду того, что $2023 - 10 \equiv 21 \pmod{24}$. Поэтому получается ответ $14 - 7 = 7$ (с).

В-4 На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

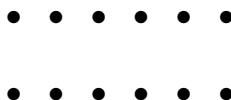
Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 19 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

Ответ: 5

Решение. Решение то же, что и для В-1, но последнее условие задачи выполняется только для группы 8 (квадратик 35 через 7 с и 12 с) ввиду того, что $2023 - 19 \equiv 12 \pmod{24}$. Поэтому получается ответ $12 - 7 = 5$ (с).

Задача 8.

В-1



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 7 пар пересекающихся отрезков?

Ответ: 101

Решение. Пусть в каждом ряду по n точек. Способ соединить точки можно задать перестановкой n чисел, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$: первая точка верхнего ряда соединяется с точкой под номером i_1 , вторая — с i_2 , и так далее. Значит, всего возможных рисунков будет $n!$.

Теперь берём пару отрезков. Пусть это отрезки с концами a, i_a и b, i_b , считаем $a < b$. В каком случае они пересекаются? В том, когда $i_a > i_b$. Учитывая, что a, b могут быть любой парой, замечаем следующее: общее количество пересечений отрезков равно количеству случаев, когда в перестановке большее число стоит раньше меньшего (не обязательно по соседству). Как сказали бы старшие товарищи, число пересечений равно числу инверсий в перестановке. Так и будем говорить дальше.

Например, 12345 — нет инверсий и нет пересечений, 21345 — одна инверсия (2 и 1), 43152 — 6 инверсий (4 и 3, 4 и 1, 4 и 2, 3 и 1, 3 и 2, 5 и 2). Наибольшее количество инверсий будет, если написать числа задом наперёд: 54321, какие два числа не выбери — большее будет стоять раньше. То есть инверсий в последнем примере 10, а в общем случае — C_n^2 .

Как посчитать число перестановок с заданным количеством инверсий? Подойдём к задаче индуктивно. В фигурных скобках будем указывать различные перестановки, а в квадратных перечислим количества перестановок, имеющих соответственно $0, 1, \dots, C_n^2$ инверсий.

Итак, единственный элемент можно расположить единственным образом, и у нас есть одна перестановка с нулевым числом инверсий.

$$\{1\}; \quad [1]$$

Добавляем двойку — её можно добавить в начало и в конец имеющейся перестановки $\{1\}$. Одна из полученных перестановок будет без инверсий, другая — с одной инверсией.

$$\underbrace{\{12\}}_{0 \text{ инверсий}}, \underbrace{\{21\}}_{1 \text{ инверсия}}; \quad [1, 1]$$

Добавляем тройку — её мы можем поставить в любое место каждой из имеющихся перестановок. Тройка больше всех имевшихся ранее чисел, поэтому если поставить её на последнее место — новых инверсий не добавится, если поставить на предпоследнее (на второе) — добавится одна инверсия, а если на первое — будет плюс две инверсии. Одна перестановка с нулём инверсий, две перестановки с одной, две перестановки с двумя, одна перестановка с тремя. То есть:

$$\underbrace{\{123\}}_{0+0}, \underbrace{\{213\}}_{1+0}, \underbrace{\{132\}}_{0+1}, \underbrace{\{231\}}_{1+1}, \underbrace{\{312\}}_{0+2}, \underbrace{\{321\}}_{1+2}; \quad [1, 2, 2, 1]$$

Так же будет происходить добавление нового числа n в общем случае: число n можно поставить на любое место, и в зависимости от места к инверсиям добавится $+0, +1, +2, \dots, +(n-1)$ штук. То есть на новом шаге перестановка с l инверсиями превращается в n перестановок с $l+0, l+1, l+2, \dots, l+(n-1)$ инверсиями соответственно.

Посмотрим, какие числа получались в квадратных скобках. Напишем эти последовательно-сти одну под другой:

1
1 1
1 2 2 1
.....

Здесь в n -й строке (нумерация начинается с 1) приводятся числа P_n^k для $k = 0, 1, \dots, C_n^k$, равные количеству перестановок из n чисел с k инверсиями.

Вспоминая, как происходит добавление нового n , получим

$$P_n^k = \underbrace{P_{n-1}^k}_{+0 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-1}}_{+1 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-2}}_{+2 \text{ инв.}} + \dots + \underbrace{P_{n-1}^{k-n+1}}_{+(n-1) \text{ инв.}}.$$

Действительно, P_{n-1}^k — количество перестановок из $(n-1)$ чисел, в которых уже есть k инверсий. В них мы вынуждены поставить новое n на последнее место (+0 инверсий). Раз мы ставим n на единственно возможное место, количество перестановок не изменится.

Далее, P_{n-1}^{k-1} — количество перестановок с $(k-1)$ инверсией, и, чтобы добавить недостающую, мы вынуждены ставить n на предпоследнее место (+1 инверсия).

Продолжаем так вплоть до P_{n-1}^{k-n+1} , потому что добавить больше $(n-1)$ инверсии нельзя. Всего получается n слагаемых. Из других перестановок предыдущей строки мы ничего нового получить не сможем.

Заметим, что $P_n^{-k} = 0$, так как не бывает перестановок с отрицательным числом инверсий, как и не может быть перестановок со слишком большим (больше чем C_n^2) количеством инверсий.

Итак, имеем следующий способ построения коллекции P_n^k .

Первая строчка:

$$\dots 0 \underbrace{00}_{\rightarrow} 0001000000 \dots$$

По строчке ползёт «окно» шириной 2. Попавшие в «окно» числа складываются и выписываются в следующую (2-ю) строку:

$$\dots 0 \underbrace{(00)}_{=0} 1000 \dots \quad \dots 00 \underbrace{(01)}_{=1} 000 \dots \quad \dots 000 \underbrace{(10)}_{=1} 00 \dots \quad \dots 0001 \underbrace{(00)}_{=0} 0 \dots$$

Вторая строка:

$$\dots 0 \underbrace{000}_{\rightarrow} 0011000000 \dots$$

По ней будет ползти окно шириной 3. Сложение попавших в окно чисел даст третью строку:

$$\dots 0 \underbrace{0000}_{\rightarrow} 122100000 \dots$$

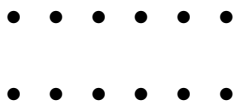
По ней поползёт окно шириной 4, и так далее, чтобы получить n -ю строку, нужно складывать n стоящих подряд чисел предыдущей строки.

Выпишем (без нулей) первые 6 строк нашей коллекции и выберем в ней нужное нам P_6^7 :

1
1 1
1 2 2 1
1 3 5 6 5 3 1
1 4 9 15 20 22 20 15 9 4 1
1 5 14 29 49 71 90 101 101 90 71 49 29 14 5 1

Заметим, что сумма чисел в каждой строке равна $n!$ (общее число перестановок).

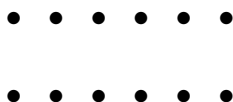
В-2



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 8 пар пересекающихся отрезков?

Ответ: 101

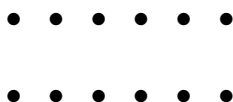
В-3



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 9 пар пересекающихся отрезков?

Ответ: 90

В-4



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 6 пар пересекающихся отрезков?

Ответ: 90

ЛОМОНОСОВ – 2022-23. МАТЕМАТИКА.
Критерии проверки. 11 класс

Задача № 1 (15 баллов)	Балл
Приближенное решение при верном ответе (в т. ч. с использованием знака ' $\approx$ ') <i>или</i> округление не в ту сторону на последнем шаге решения	10

Задача № 2 (15 баллов)	Балл
Арифметическая ошибка в конце решения (при этом верный ответ не получен ни в каком виде) <i>или</i> в процессе решения упущена точка	10
Указано, что решения возможны только при экстремальных значениях синуса, косинуса	5

Задача № 3 (15 баллов)	Балл
Нет проверки, связанной с ОДЗ	10
Верный ответ угадан	5

Задача № 4 (15 баллов)	Балл
Один случай последовательности длин сторон рассмотрен полностью, другой упомянут	15
Один случай последовательности длин сторон рассмотрен полностью, другой не упомянут (даже при наличии арифметической ошибки)	10

Задача № 5 (15 баллов)	Балл
Правильный ответ при недостаточном обосновании (в т. ч. использование знака ' $\approx$ ')	10

Задача № 6 (15 баллов)	Балл
Найдено одно из двух ключевых соотношений	10

Задача № 7 (15 баллов)	Балл
Перебор с верным ответом	15
Перебор без верного ответа	5

Задача № 8 (15 баллов)	Балл
Приведено соображение об инверсиях и пересечениях (иные существенные продвижения оцениваются индивидуально)	5

При получении суммы баллов, большей 100, участнику ставится оценка 100.