

Задача 1 (10 баллов)

В-1 Четвертый элемент арифметической прогрессии на 6 меньше утроенного пятого элемента. Найдите сумму первых десяти элементов этой прогрессии.

В-2 Утроенный шестой элемент арифметической прогрессии на 4 больше пятого элемента. Найдите сумму первых двенадцати элементов этой прогрессии.

В-3 Четвертый элемент арифметической прогрессии на 2 меньше утроенного седьмого элемента. Найдите сумму первых шестнадцати элементов этой прогрессии.

В-4 Утроенный восьмой элемент арифметической прогрессии на 3 больше пятого элемента. Найдите сумму первых восемнадцати элементов этой прогрессии.

Задача 2 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2021/22 учебного года для 10 классов

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b - a)^{20}$.

В-2 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b - a)^{24}$.

В-3 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b - a)^{28}$.

В-4 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b - a)^{32}$.

Задача 4 (10 баллов)

В-1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 17y - 6x + 20 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 38y - 6x + 41 = 0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y , являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

В-2 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 17y - 5x + 3 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 20y + 2x + 10 = 0. \end{cases}$$

В-3 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 35y - 21x + 98 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 98y + 245 = 0. \end{cases}$$

В-4 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 34y - 12x + 80 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 76y - 12x + 164 = 0. \end{cases}$$

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2021/22 учебного года для 10 классов

Задача 5 (10 баллов)

В-1 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 8. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-2 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 14. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-3 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 10. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-4 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-5 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 9. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-6 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 13. При необходимости округлите ответ до сотых.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2021/22 учебного года для 10 классов

Задача 6 (10 баллов)

В-1 Фабрика производит $n > 15\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы фабрики на производство одной игрушки составляют не менее $\frac{126\,000}{n} + 9 - \left| 3 - \frac{54\,000}{n} \right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18 - \frac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

В-2 Фабрика производит $n > 400$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы предприятия на изготовление одной ели составляют не менее $\frac{40\,500}{n} + 270 - \left| 90 - \frac{40\,500}{n} \right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

В-3 Фабрика производит $n < 20\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы предприятия на изготовление одной игрушки составляют не менее $\frac{126\,000}{n} + 9 - \left| 3 - \frac{54\,000}{n} \right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18 - \frac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

В-4 Фабрика производит $n < 500$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы фабрики на изготовление одной ели составляют не менее $\frac{40\,500}{n} + 270 - \left| 90 - \frac{40\,500}{n} \right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2021/22 учебного года для 10 классов

Задача 7 (10 баллов)

В-1 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 15y + 15x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y .

В-2 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 + 3y - 3x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y .

В-3 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 + xy - 2y^2 - 6x + 6y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x .

В-4 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 8y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x .

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2021/22 учебного года для 10 классов

Задача 8 (15 баллов)

В-1 Решите уравнение

$$\cos^2 8x \sin 2x + 2 \cos^2 x = 1 + \sqrt{2}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

В-2 Решите уравнение

$$\sin^4 6x \sin 2x + 2\sqrt{3} \cos^2 x = 2 + \sqrt{3}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

В-3 Решите уравнение

$$\cos^2 8x \sin 2x - 2 \cos^2 x = \sqrt{2} - 1.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до одного знака после запятой.

В-4 Решите уравнение

$$\sin^4 6x \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 2 - \sqrt{3}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2021/22 учебного года для 10 классов

Задача 9 (15 баллов)

В-1 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2021}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a .

В-2 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2022}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a .

В-3 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2023}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a .

В-4 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2024}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a .

В-5 Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2025}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a .
