

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-1

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 3 м/с модель Альфа продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Бета, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |2x - 1| - |2x - 3| + 6$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x + 3) \leq f(x) + 6 \quad \text{и} \quad f(x + 2) \geq f(x) + 4.$$

3. Решите уравнение

$$36 \cos(x + \cos x) \cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике PVG обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников ONP и ONV равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника ONG .

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B , а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A , B и C , а сумма ее координат равна (-2023) . Найдите минимально возможную при данных условиях длину отрезка AB .

6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{tg} a] - 1|^x = [\operatorname{tg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x . Здесь, $[t]$ – целая часть числа t .

Апрель 2024 г.