

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2022/23 учебного года для 5-6 классов

Задача 1.

В-1 Сколькими способами можно разменять купюру 1000 рублей монетами достоинством 5 и 10 рублей?

Ответ: 101

Решение. Находим количество решений в неотрицательных целых числах уравнения

$$5n + 10m = 1000 \iff n + 2m = 200.$$

Если $m > 100$, то n отрицательно, поэтому $0 \leq m \leq 100$. При каждом таком m число n тоже неотрицательно: $n = 200 - 2m$. Значит, способов всего столько, сколько есть различных подходящих m , то есть 101.

В-2 Сколькими способами можно разменять купюру 500 рублей монетами достоинством 10 и 2 рубля?

Ответ: 51

В-3 Сколькими способами можно разменять купюру 1000 рублей монетами достоинством 2 и 10 рублей?

Ответ: 101

В-4 Сколькими способами можно разменять купюру 500 рублей монетами достоинством 5 и 10 рублей?

Ответ: 51

Задача 2.

В-1 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведены 2022 прямые?

Ответ: 2023

Решение. Будем проводить прямые последовательно. Если каждая следующая прямая не пересекает ни одну из предыдущих (либо пересекает её за пределами нашего прямоугольника), то при проведении этой прямой ровно одна губерния делится на две части (а с остальными губерниями ничего не происходит), и количество губерний увеличивается на 1. Если же следующая прямая пересекает какие-то из предыдущих, то они делит на две части как минимум две губернии, и число губерний увеличивается минимум на 2. Значит, наименьшее количество губерний получится, если все прямые параллельны друг другу (или пересекаются за пределами прямоугольника), и это количество губерний на 1 больше количества прямых.

В-2 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведены 2023 прямые?

Ответ: 2024

В-3 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведены 2024 прямые?

Ответ: 2025

В-4 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведено 2025 прямых?

Ответ: 2026

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 5-6 классов

Задача 3.

В-1 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 17 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 1 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 10 см, затем снова заползает за час на 1 м, снова сползает за час на 10 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 10 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 80.8

Решение. За сутки улитка поднимается 6 часов и спускается 18 часов, а высота, на которой она находитесь, увеличивается на $6 \cdot 1 - 18 \cdot 0,1 = 4,2$ м. За трое суток эта высота увеличится на $3 \cdot 4,2 = 12,6$ м. Каждые 2 часа днём улитка поднимается на $1 - 0,1 = 0,9$ м, через 8 часов после начала четвёртого дня улитка окажется на высоте $12,6 + 4 \cdot 0,9 = 16,2$ м, и ей останется проползти $17 - 16,2 = 0,8$ м, которые она преодолеет за 0,8 ч. То есть время подъёма составит 3 суток и 8,8 часов, т.е. $3 \cdot 24 + 8,8 = 80,8$ часов.

В-2 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 40 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 2 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 20 см, затем снова заползает за час на 2 м, снова сползает за час на 20 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 20 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 102.5

В-3 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 10 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 1 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 20 см, затем снова заползает за час на 1 м, снова сползает за час на 20 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 20 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 78.4

В-4 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 50 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 2 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 10 см, затем снова заползает за час на 2 м, снова сползает за час на 10 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 10 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 104.8

Задача 4.

В-1 У каждого ученика в классе не менее 15 друзей, причем не более 15 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 17

Решение. Нарисуем граф: ученики — это точки, ребро — дружба между учениками. Так как у каждого не менее 15 друзей, то всего учеников хотя бы 16. Ровно 16 учеников быть не может, так как тогда все вершины будут соединены со всеми, и у всех 16 учеников будет поровну друзей, что противоречит условию. Значит, учеников хотя бы 17. Пример для 17 — 17 вершин, где каждая соединена с каждой, но одного ребра нет (получается 15 учеников с 16 друзьями у каждого и 2 — с 15-ю).

В-2 У каждого ученика в классе не менее 16 друзей, причем не более 16 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 18

В-3 У каждого ученика в классе не менее 17 друзей, причем не более 17 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 19

В-4 У каждого ученика в классе не менее 18 друзей, причем не более 18 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 20

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 5-6 классов

Задача 5.

В-1 В домике живут 15 гномиков, среди которых могут быть гномики ростом 10, 11, 12 и 13 сантиметров. Их суммарный рост равен 190 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 13 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 12 сантиметров?

Ответ: 10

Решение. Решение приведём в общем виде. Есть $3x$ гномиков. Возможные росты гномиков равны a, b, c, d , где $a < b < c < d$. Их суммарный рост равен $x(c + 2d)$. Гномиков роста d в два раза больше, чем гномиков роста c . Найдём количество гномиков роста d . Пусть есть k гномиков роста c , тогда есть $2k$ гномиков роста d . Их суммарный рост $k(c + 2d)$. Есть $3x - 3k$ гномиков роста, отличного от c и d , тогда их рост не превосходит $(3x - 3k)b$. Предположим, что $k < x$, тогда суммарный рост равен $x(c + 2d)$, с другой стороны, он не больше $k(c + 2d) + (x - k) \cdot 3b < k(c + 2d) + (x - k)(c + 2d) = x(2c + d)$, противоречие. Так как гномиков всего $3x$, а гномиков ростов c и d вместе $3k$, то $3k \leq 3x, k \leq x$. Значит, $k = x$, гномиков роста d ровно $2x = 2 \cdot 5 = 10$.

В-2 В домике живут 18 гномиков, среди которых могут быть гномики ростом 11, 12, 13 и 14 сантиметров. Их суммарный рост равен 246 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 14 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 13 сантиметров?

Ответ: 12

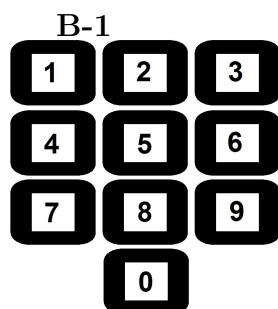
В-3 В домике живёт 21 гномик, среди которых могут быть гномики ростом 12, 13, 14 и 15 сантиметров. Их суммарный рост равен 308 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 15 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 14 сантиметров?

Ответ: 14

В-4 В домике живут 24 гномика, среди которых могут быть гномики ростом 13, 14, 15 и 16 сантиметров. Их суммарный рост равен 376 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 16 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 15 сантиметров?

Ответ: 16

Задача 6.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 2?

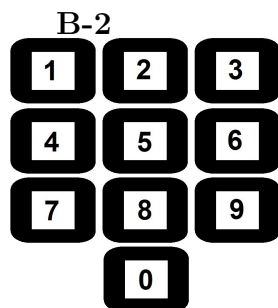
Ответ: 13

Решение. Заметим, что если на третьем месте в пароле стоит 1, то для четвёртой цифры имеется пять вариантов (5, 6, 8, 9, 0), если 2 — то два (6, 9), если 4 — то три (8, 9, 0), если 5 — то один (9), если 7 — то один (0), если какая-то другая цифра — то нет вариантов. Если вторая цифра 4, то третьей может быть только 1, а, значит, вариантов будет пять, если вторая цифра 5, то третьей может быть только 2, а, значит, вариантов будет два, если вторая цифра 7, то третьей может быть 1 или 4, а, значит, вариантов будет $5 + 3 = 8$, если вторая цифра 8, то третьей может быть 2 или 5, а, значит, вариантов будет $2 + 1 = 3$, если вторая цифра 0, то третьей может быть 2, 5 или 8, а, значит, вариантов будет $2 + 1 + 0 = 3$, если вторая цифра какая-то другая, то число вариантов в этом случае в итоге будет равно нулю.

Если первая цифра 2, то второй может быть 4 или 7, а, значит, число вариантов равно $5 + 8 = 13$.

Для второго варианта задачи: если первая цифра 3, то второй может быть 4, 5, 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $5 + 2 + 8 + 3 + 3 = 21$.

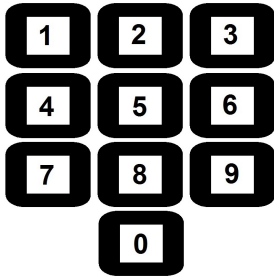
Для третьего варианта задачи: если первая цифра 6, то второй может быть 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $8 + 3 + 3 = 14$.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 3?

Ответ: 21

В-3



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 6?

Ответ: 14

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 1.

В-1 Для скольких натуральных n из отрезка $[22, 2022]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1021

Решение. Если $n = 2k$, то $n^n = (2k)^{2k} = ((2k)^k)^2$, то есть годится любое чётное n . Их будет 1001 штука. Если n нечётное, то n^n будет полным квадратом только в том случае, когда само n — полный квадрат. Это числа $5^2, 7^2, 9^2, \dots$, и всего их будет 20 штук. Ответ: $1001+20=1021$.

В-2 Для скольких натуральных n из отрезка $[23, 2023]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1020

В-3 Для скольких натуральных n из отрезка $[2, 2022]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1032

В-4 Для скольких натуральных n из отрезка $[3, 2023]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1031

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 2.

В-1 У каждого ученика в классе не менее 15 друзей, причем не более 15 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 17

Решение. Нарисуем граф: ученики — это точки, ребро — дружба между учениками. Так как у каждого не менее 15 друзей, то всего учеников хотя бы 16. Ровно 16 учеников быть не может, так как тогда все вершины будут соединены со всеми, и у всех 16 учеников будет поровну друзей, что противоречит условию. Значит, учеников хотя бы 17. Пример для 17 — 17 вершин, где каждая соединена с каждой, но одного ребра нет (получается 15 учеников с 16 друзьями у каждого и 2 — с 15-ю).

В-2 У каждого ученика в классе не менее 16 друзей, причем не более 16 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 18

В-3 У каждого ученика в классе не менее 17 друзей, причем не более 17 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 19

В-4 У каждого ученика в классе не менее 18 друзей, причем не более 18 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 20

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 3.

В-1 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведены 2022 прямые?

Ответ: 2045254

Решение. Будем проводить прямые по очереди. Проводим каждую новую прямую так, чтобы она пересекала все старые, и так, чтобы не было пересечений трёх (и более) прямых в одной точке. Тогда k -я прямая пересечёт $k - 1$ прямую (каждую из предыдущих) — значит, она пройдёт через k губерний, и каждая затронутая губерния будет поделена на две части. Отсюда получаем рекуррентную формулу для числа губерний $N(k)$ при k проведённых прямых: $N(0) = 1$, $N(k) = N(k-1) + k = N(k-2) + k - 1 + k = \dots = k + k - 1 + k - 2 + \dots + 2 + 1 + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + 1$.

В-2 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведены 2023 прямые?

Ответ: 2047277

В-3 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведены 2024 прямые?

Ответ: 2049301

В-4 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведено 2025 прямых?

Ответ: 2051326

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 4.

В-1 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 13]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 650

Решение. Решим задачу в общем виде, когда $a, b, c \in [1, n]$.

Если $a = 1$, то b может принять $(n - 1)$ значение, и c может принять $(n - 1)$ значение. Всего $(n - 1)^2$ вариантов. Если $a = 2$, то b может принять $(n - 2)$ значений, и c может принять $(n - 2)$ значений. Всего $(n - 2)^2$ вариантов. Аналогично для последующих значений a : если $a = k$, то b и c могут принять по $(n - k)$ значений, всего $(n - k)^2$ вариантов. Когда $a = n - 1$, то для b и c остаётся по одному варианту, а когда $a = n$, то вариантов нет.

Таким образом, общее число вариантов равно

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6}.$$

В-2 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 14]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 819

В-3 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 15]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 1015

В-4 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 12]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 506

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 5.

В-1 Дан прямоугольник длины 6 и ширины 4. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 50

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть квадрат $ABCD$, а прямоугольник $KLMN$, причём точка K лежит на AB , L — на BC , M — на CD , N — на DA , $KL = MN = x$, $LM = KN = y$. Из того, что $\angle NKA = \angle KNA = \angle MND = \angle NMD = 45^\circ$, получаем равенство сторон треугольников KAN , NMD , в них $AK = AN$, $ND = MD$, по теореме Пифагора в них $AK^2 + AN^2 = KN^2$, $ND^2 + MD^2 = NM^2$, тогда $2AN^2 = y^2$, $2ND^2 = x^2$, $AN = \frac{y}{\sqrt{2}}$, $ND = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $AD = AN + ND = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, а площадь квадрата $S = AD^2 = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(6+4)^2}{2} = 50$. Отметим, что стороны прямоугольника, вписанного в квадрат, всегда образуют со сторонами этого квадрата углы по 45° — это условие задачи избыточно и дано только для упрощения рассуждений.

В-2 Дан прямоугольник длины 8 и ширины 6. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 98

В-3 Дан прямоугольник длины 10 и ширины 8. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 162

В-4 Дан прямоугольник длины 6 и ширины 4. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 242

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 6.

В-1 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 22 ноября 2021 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 20

Решение. С полудня 23 сентября до полудня 31 декабря года рождения космонавта прошло 99 суток. Пусть с полудня 31 декабря года рождения космонавта до полудня 31 декабря года, предшествовавшего первому високосному году в жизни космонавта прошло x лет ($0 \leq x \leq 3$), то есть $365x$ суток, а с полудня 31 декабря года, предшествовавшего первому високосному году в жизни космонавта до полудня 31 декабря 2019 года прошло $1461y$ суток (то есть y блоков по 4 года, где в каждом блоке первый год — високосный). Далее, с полудня 31 декабря 2019 года до полудня 22 ноября 2021 года прошло ещё $366+326$ суток.

Всего к полудню 22 ноября 2021 года космонавт прожил $99 + 365x + 1461y + 366 + 326$ суток, что оказалось кратно 1000; пусть это число суток равно $1000n$. Тогда $365x + 1461y = 1000n - 791$. Рассмотрим 4 случая.

Если $x = 0$, то $1461y = 1000(n - 1) + 209$; тогда число y должно оканчиваться на 9. При $y = 9$ и $y = 19$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 29$ возраст космонавта будет больше 100 лет. Если $x = 1$, то $1461y = 1000(n - 2) + 844$; тогда число y должно оканчиваться на 4. При $y = 4$ получаем $n = 7$. При $y = 14$ и $y = 24$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 34$ возраст космонавта будет больше 100 лет.

Если $x = 2$, то $1461y = 1000(n - 2) + 479$; тогда число y должно оканчиваться на 9. При $y = 9$ и $y = 19$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 29$ возраст космонавта будет больше 100 лет.

Если $x = 3$, то $1461y = 1000(n - 2) + 114$; тогда число y должно оканчиваться на 4. При $y = 4$, $y = 14$ и $y = 24$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 34$ возраст космонавта будет больше 100 лет.

Таким образом, единственно возможный случай: $x = 1$, $y = 4$, $n = 7$, и космонавту на 26 ноября 2022 года в этом случае будет 20 полных лет (и ещё некоторое количество дней).

В-2 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 1 июня 2020 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 16

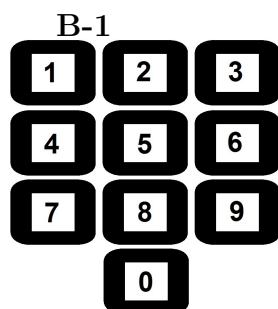
В-3 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 18 августа 2020 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 24

В-4 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 8 февраля 2022 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 28

Задача 7.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 2?

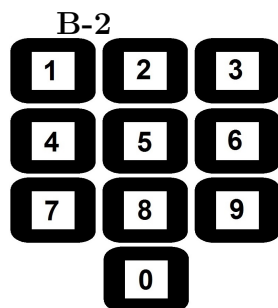
Ответ: 13

Решение. Заметим, что если на третьем месте в пароле стоит 1, то для четвёртой цифры имеется пять вариантов (5, 6, 8, 9, 0), если 2 — то два (6, 9), если 4 — то три (8, 9, 0), если 5 — то один (9), если 7 — то один (0), если какая-то другая цифра — то нет вариантов. Если вторая цифра 4, то третьей может быть только 1, а, значит, вариантов будет пять, если вторая цифра 5, то третьей может быть только 2, а, значит, вариантов будет два, если вторая цифра 7, то третьей может быть 1 или 4, а, значит, вариантов будет $5 + 3 = 8$, если вторая цифра 8, то третьей может быть 2 или 5, а, значит, вариантов будет $2 + 1 = 3$, если вторая цифра 0, то третьей может быть 2, 5 или 8, а, значит, вариантов будет $2 + 1 + 0 = 3$, если вторая цифра какая-то другая, то число вариантов в этом случае в итоге будет равно нулю.

Если первая цифра 2, то второй может быть 4 или 7, а, значит, число вариантов равно $5 + 8 = 13$.

Для второго варианта задачи: если первая цифра 3, то второй может быть 4, 5, 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $5 + 2 + 8 + 3 + 3 = 21$.

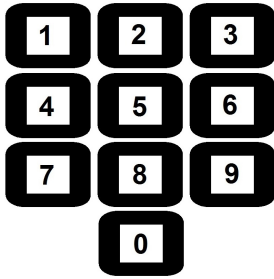
Для третьего варианта задачи: если первая цифра 6, то второй может быть 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $8 + 3 + 3 = 14$.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 3?

Ответ: 21

В-3



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 6?

Ответ: 14

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

Задача 1.

В-1 Для скольких натуральных n из отрезка $[22, 2022]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1021

Решение. Если $n = 2k$, то $n^n = (2k)^{2k} = ((2k)^k)^2$, то есть годится любое чётное n . Их будет 1001 штука. Если n нечётное, то n^n будет полным квадратом только в том случае, когда само n — полный квадрат. Это числа $5^2, 7^2, 9^2, \dots$, и всего их будет 20 штук. Ответ: $1001+20=1021$.

В-2 Для скольких натуральных n из отрезка $[23, 2023]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1020

В-3 Для скольких натуральных n из отрезка $[2, 2022]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1032

В-4 Для скольких натуральных n из отрезка $[3, 2023]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1031

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

Задача 2.

В-1 Дан прямоугольник длины 6 и ширины 4. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 50

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть квадрат $ABCD$, а прямоугольник $KLMN$, причём точка K лежит на AB , L — на BC , M — на CD , N — на DA , $KL = MN = x$, $LM = KN = y \neq x$. Тогда $\angle LMC = 90^\circ - \angle NMD = \angle MND = 90^\circ - \angle KNA = \angle KAN$, т.е. в прямоугольных треугольниках LMC , NMD , KNA есть по равному острому углу, поэтому все они подобны. Пусть $a = AN$, $b = AK$, тогда из подобия $\frac{ND}{AK} = \frac{MD}{AN} = \frac{NM}{KN} = \frac{x}{y}$, $ND = \frac{x}{y}b$, $MD = \frac{x}{y}a$, $\frac{CM}{AK} = \frac{LM}{KN} = 1$, $CM = AK = b$, получим $AD = AN + ND = a + \frac{x}{y}b$, $CD = CM + MD = b + \frac{x}{y}a$, $AD = CD$, $a + \frac{x}{y}b = b + \frac{x}{y}a$, $\left(\frac{x}{y} - 1\right)(b - a) = 1$, $\frac{x}{y} \neq 1$, т.к. $x \neq y$, тогда $b = a$, $AN = AK$, треугольник KAN равнобедренный прямоугольный, по теореме Пифагора $AN^2 + AK^2 = KN^2$, $2a^2 = y^2$, $a = \frac{y}{\sqrt{2}}$, $b = a$. Площадь квадрата $S = AD^2 = \left(a + \frac{x}{y}a\right)^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \frac{x+y}{y}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(6+4)^2}{2} = 50$.

В-2 Дан прямоугольник длины 8 и ширины 6. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 98

В-3 Дан прямоугольник длины 10 и ширины 8. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 162

В-4 Дан прямоугольник длины 12 и ширины 10. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 242

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

Задача 3.

В-1 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 13]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 650

Решение. Решим задачу в общем виде, когда $a, b, c \in [1, n]$.

Если $a = 1$, то b может принять $(n - 1)$ значение, и c может принять $(n - 1)$ значение. Всего $(n - 1)^2$ вариантов. Если $a = 2$, то b может принять $(n - 2)$ значений, и c может принять $(n - 2)$ значений. Всего $(n - 2)^2$ вариантов. Аналогично для последующих значений a : если $a = k$, то b и c могут принять по $(n - k)$ значений, всего $(n - k)^2$ вариантов. Когда $a = n - 1$, то для b и c остаётся по одному варианту, а когда $a = n$, то вариантов нет.

Таким образом, общее число вариантов равно

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6}.$$

В-2 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 14]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 819

В-3 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 15]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 1015

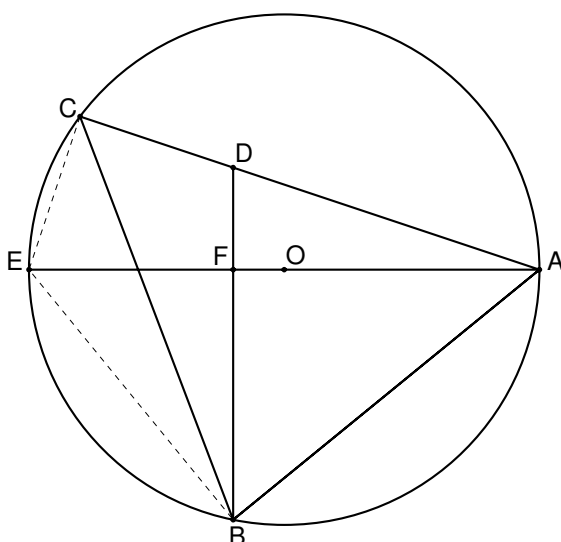
В-4 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 12]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 506

Задача 4.

В-1 В треугольнике ABC стороны $AB = 84$, $AC = 98$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , а прямая BD перпендикулярна AO и пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 26



Решение.

Решим задачу в общем виде: пусть $AB = c$, $AC = b$, $AB < AC$. Пусть AE — диаметр описанной окружности треугольника ABC . Тогда $\angle ABE = 90^\circ$, $\triangle ABE$ подобен $\triangle BFA$, $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$, значит, $AE \cdot AF = c^2$. Далее, $\triangle AEC$ подобен $\triangle AFD$, $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF}$, значит, $AD = \frac{AE \cdot AF}{AC} = \frac{c^2}{b}$. Тогда $CD = AC - AD = b - \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 - c^2}{b}$. **Ответ:** $CD = \frac{b^2 - c^2}{b}$.

В-2 В треугольнике ABC стороны $AB = 42$, $AC = 49$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , а прямая BD перпендикулярна AO и пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 13

В-3 В треугольнике ABC стороны $AB = 168$, $AC = 196$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , а прямая BD перпендикулярна AO и пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 52

В-4 В треугольнике ABC стороны $AB = 35$, $AC = 49$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , а прямая BD перпендикулярна AO и пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 24

Задача 5.

В-1 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее a , округлённое до сотых.

Ответ: 3

Решение. Рассмотрим неравенство

$$x^4y^2 + x^2y^4 - ax^2y^2 + 1 \geq 0.$$

При $xy = 0$ оно выполнено: $1 \geq 0$. При $xy \neq 0$ можно разделить обе части неравенства на x^2y^2 :

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq a.$$

По неравенству о средних

$$\frac{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 1 \implies x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq 3.$$

Значит, заведомо подходят все значения $a \leq 3$, и только они: при $x = y = 1$ неравенство выполняется только при $a \leq 3$. Поэтому наибольшее подходящее значение a равно 3.

В-2 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 + ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наименьшее a , округлённое до сотых.

Ответ: -3

В-3 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - a^2x^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее a , округлённое до сотых.

Ответ: 1.73

В-4 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 4ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее a , округлённое до сотых.

Ответ: 0.75

Задача 6.

В-1

	1	2	3	4	5	6
1	2	2	2	2	1	0
2	2					1
3	3					1
4	3					1
5	3					1
6	1	2	2	2	1	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде: $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$, где X_i, Y_i — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфеты, причём либо $X_i < X_{i+1}$, либо $X_i = X_{i+1}$ и $Y_i < Y_{i+1}$.

Ответ: 3234452

Решение. Условимся называть клетку XY , если она находится на пересечении строки с номером X и столбца с номером Y ; условимся называть прямоугольник $ABCD$, если его левая нижняя клетка — AB , а правая верхняя — CD . Из значений клеток 31 и 36 получаем, что всего 4 конфеты: три в прямоугольнике 5223 и одна в прямоугольнике 5425. Из значения клетки 16 получаем, что в квадрате 3425 конфет нет. Тогда из значения клетки 26 получаем, что в прямоугольнике 4445 ровно 1 конфеты, а, значит, в прямоугольнике 5455 конфет нет. Из значения клетки 61 получаем, что в прямоугольнике 5243 ровно 1 конфета, из значения клетки 62 — что в прямоугольнике 5244 ровно две конфеты. Значит, одна из конфет находится в клетке 44, а в клетке 45 пусто. Из значения клетки 51 получаем, что в прямоугольнике 5232 ровно три конфеты, так как больше конфет нет, то в прямоугольнике 2223 пусто. Но из значения клетки 11 получаем, что в прямоугольнике 3233 ровно 2 конфеты, а значит одна конфета в клетке 32, вторая — в клетке 33. Осталась одна конфета, из значений клеток 65 и 21 получаем, что она может быть только в клетке 52. Ответ: четыре конфеты в клетках 32, 33, 44 и 52.

	1	2	3	4	5	6
1	2	2	2	2	1	0
2	2					1
3	3	*	*			1
4	3			*		1
5	3	*				1
6	1	2	2	2	1	1

Ниже — ответы для других вариантов:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	3	3	3	1
2	2		*	*		2
3	2		*			2
4	2			*		2
5	1					1
6	0	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0					2
3	2			*		2
4	2				*	2
5	2	*	*			2
6	2	2	3	3	2	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	2	2	1
2	2			*		2
3	2		*			2
4	2	*			*	2
5	2					1
6	1	1	2	2	1	1

В-2

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	3	3	3	1
2	2					2
3	2					2
4	2					2
5	1					1
6	0	1	1	1	1	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде: $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$, где X_i, Y_i — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфету, причём либо $X_i < X_{i+1}$, либо $X_i = X_{i+1}$ и $Y_i < Y_{i+1}$.

Ответ: 23243344

Решение.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	3	3	3	1
2	2		*	*		2
3	2		*			2
4	2			*		2
5	1					1
6	0	1	1	1	1	1

Условимся называть клетку XY , если она находится на пересечении строки с номером X и столбца с номером Y ; условимся называть прямоугольник $ABCD$, если его левая нижняя клетка — AB , а правая верхняя — CD . Из значений клеток 16 и 15 получаем, что в прямоугольнике 3323 есть две конфеты, значит, есть по конфете в клетках 33 и 23. Также из значения клетки 16 получаем, что в квадрате 3425 одна конфета. Из значения клетки 11 получаем, что в прямоугольнике 3222 нет конфет. Из значения клетки 12 получаем, что в прямоугольнике 3424 одна конфета, следовательно, в прямоугольнике 3525 нет конфет. Из значений клеток 46 и 56 получаем, что в прямоугольнике 2425 одна конфета. В клетке 25 нет конфет, следовательно, она есть в клетке 24; таким образом, мы нашли все 3 конфеты в прямоугольнике 3225. Из значений клеток 16 и 26 получаем, что в прямоугольнике 4445 одна конфета. Из значения клетки 66 получаем, что в прямоугольнике 5455 нет конфет. Из значения клеток 61 и 62 получаем, что

в прямоугольнике 5444 одна конфета. В клетке 54 конфеты нет, следовательно, в клетке 44 есть конфеты. Из значения клетки 61 получаем, что в квадрате 5243 нет конфет. Итак, конфеты есть в клетках 23, 24, 33 и 44.

В-3

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0					2
3	2					2
4	2					2
5	2					2
6	2	2	3	3	2	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде: $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$, где X_i, Y_i — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфету, причём либо $X_i < X_{i+1}$, либо $X_i = X_{i+1}$ и $Y_i < Y_{i+1}$.

Ответ: 34455253

В-4

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	2	2	1
2	2					2
3	2					2
4	2					2
5	2					1
6	1	1	2	2	1	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде: $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$, где X_i, Y_i — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфету, причём либо $X_i < X_{i+1}$, либо $X_i = X_{i+1}$ и $Y_i < Y_{i+1}$.

Ответ: 24334245

Задача 7.

В-1 Есть квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Про него известно следующее: $f(1) = 0$, $60 < f(8) < 70$, $80 < f(9) < 90$. Чему равно $f(10)$?

Ответ: 117

Решение. Пусть

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$$f(1) = a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b.$$

$$f(8) = 64a + 8b + c \in (60, 70) \Rightarrow 63a + 7b \in (60, 70) \Rightarrow 9a + b \in \left(8\frac{4}{7}, 10\right) \Rightarrow 9a + b = 9.$$

$$f(9) = 81a + 9b + c \in (80, 90) \Rightarrow 80a + 8b \in (80, 90) \Rightarrow 10a + b \in \left(10, 11\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 10a + b = 11.$$

Отсюда $a = 2$, $b = -9$, $c = 7$ и $f(x) = 2x^2 - 9x + 7$, $f(10) = 117$.

В-2 Есть квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Про него известно следующее: $f(1) = 0$, $60 < f(7) < 70$, $80 < f(8) < 90$. Чему равно $f(9)$?

Ответ: 104

В-3 Есть квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Про него известно следующее: $f(1) = 0$, $50 < f(8) < 60$, $70 < f(9) < 80$. Чему равно $f(10)$?

Ответ: 90

В-4 Есть квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Про него известно следующее: $f(1) = 0$, $50 < f(7) < 60$, $80 < f(8) < 90$. Чему равно $f(9)$?

Ответ: 120

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

Задача 8.

В-1 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{6(x+y+z)} = 2\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+4\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.16 ($x = 4/25$, $y = z = 1/25$)

Решение. Решим задачу в общем виде:

$$\begin{cases} \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)} = a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z}, \\ x+y+A\sqrt{z} = 1, \end{cases}$$

где a, b, c, A — положительные числа. По неравенству Коши-Буняковского

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x+y+z} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)},$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $\frac{\sqrt{x}}{a} = \frac{\sqrt{y}}{b} = \frac{\sqrt{z}}{c}$, откуда $y = \frac{b^2}{a^2}x$, $z = \frac{c^2}{a^2}x$. Подставляя эти выражения во второе уравнение, получаем

$$(a^2+b^2)x + Aac\sqrt{x} - a^2 = 0,$$

откуда $\sqrt{x} = \frac{-Aac + a\sqrt{A^2c^2 + 4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$, $\sqrt{y} = \frac{-Abc + b\sqrt{A^2c^2 + 4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$, $\sqrt{z} = \frac{-Ac^2 + c\sqrt{A^2c^2 + 4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$ (из двух возможных значений для $\sqrt{x}$ выбирается положительное). В нашем случае $a = 2$, $b = c = 1$, $A = 4$, откуда находим $x = 4/25$, $y = z = 1/25$.

В-2 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{6(x+y+z)} = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+4\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.04 ($x = z = 1/25$, $y = 4/25$)

В-3 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{9(x+y+z)} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+7\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до трех знаков после запятой.

Ответ: 0.063 ($x = y = 1/16$, $z = 1/64$)

В-4 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{250(x+y+z)} = 5\sqrt{x} + 12\sqrt{y} + 9\sqrt{z}, \\ x+y+3\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до трех знаков после запятой.

Ответ: 0.071 ($x = 16/225$, $y = 256/5625$, $z = 16/225$)

Олимпиада школьников «Ломоносов», математика
Отборочный этап 2022/2023 учебного года
Баллы за верные ответы на задания

Номер задания	5-6 классы	7-8 классы	9 класс	10 класс	11 класс
1	15	10	10	10	10
2	15	10	10	10	10
3	15	15	10	10	10
4	15	15	10	10	10
5	20	15	10	15	10
6	20	15	15	15	10
7	—	20	15	15	10
8	—	—	20	15	15
9	—	—	—	—	15