

Ответы и решения

1-1. Ответ: модель Альфа, на 50 м.

Решение. Решим задачу в общем виде. В условии заданы: u м/с – скорость ветра; модель Альфа продержалась в воздухе на t секунд меньше модели Бета; модель Альфа пролетела на l метров дальше.

Пусть v_1 и v_2 — скорости при безветренной погоде моделей Альфа и Бета соответственно (в м/с), t_1 и t_2 время (в секундах), которое первая и вторая модели соответственно продержались в воздухе.

Тогда при встречном ветре $(v_1 - u)t_1$ — дальность полета модели Альфа, $(v_2 - u)t_2$ — дальность полета модели Бета. По условию:

$$t = t_2 - t_1, \quad l = (v_1 - u)t_1 - (v_2 - u)t_2 = v_1 t_1 - v_2 t_2 + ut.$$

При безветренной погоде разность между дальностью полета первой и второй моделей равна

$$x = v_1 t_1 - v_2 t_2 = l - ut.$$

Таким образом, $x > 0$, если $l > ut$; $x < 0$, если $l < ut$; $x = 0$, если $l = ut$.

При $u = 3$, $t = 150$ и $l = 500$ получаем $x = 500 - 450 = 50 > 0$. Таким образом, модель Альфа пролетит дальше на 50 метров.

1-2. Ответ: модель Б-2, на 100 м.

2-1. Ответ: Можно.

Решение. Проведя $3 \cdot 44 = 132$ прямых, параллельных сторонам исходного треугольника, разобьем бумажный треугольник на $45^2 = 2025$ правильных треугольников со стороной 1. Так как отмечено 2023 точки, то существует, как минимум, два треугольника, на которых точек нет (принцип Дирихле).

2-2. Ответ: Можно.

3-1. Ответ: 4052.

Решение. Отметим, что $f(0) = 4, f(1) = 6, f(2) = 8$.

По условию, с одной стороны,

$$f(x + 6) \leq f(x + 3) + 6 \leq f(x) + 12,$$

а, с другой стороны,

$$f(x + 6) \geq f(x + 4) + 4 \geq f(x + 2) + 8 \geq f(x) + 12.$$

Поэтому $f(x + 6) = f(x) + 12$ и, более того, все неравенства выше обращаются в равенства. Поэтому $f(x + 3) = f(x) + 6$, $f(x + 2) = f(x) + 4$ и $f(x + 1) = f(x) + 2$. Таким образом, искомая функция – это функция $f(x) = 4 + 2x$ при целых значениях x .

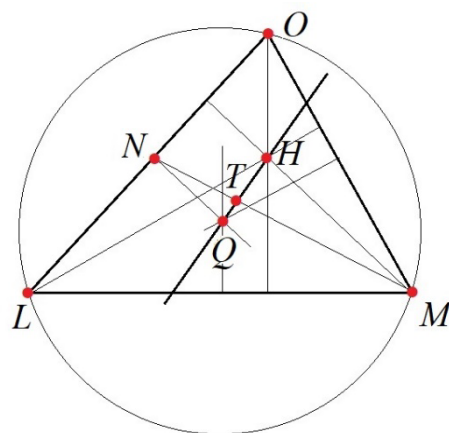
Кроме этого, известны значения функции на отрезке $[0; 2]$.

Значит, $f(2024) = 4 + 2024 \cdot 2 = 4052$.

3-2. Ответ: 4051.

4-1. Ответ: 8 или 2.

Решение. В точке H пересекаются три высоты треугольника. Так как Q – центр описанной окружности, то в точке Q пересекаются серединные перпендикуляры треугольника. Так как точка N – середина стороны LO , то MN – медиана. Точка T – точка пересечения медианы и прямой HQ .



Треугольники NQT и MHT подобны (следует из параллельности прямых NQ и HM , которые обе перпендикулярны прямой LO). Так как $HM = 2 \cdot$

NQ (это простой факт из школьной геометрии), то коэффициент подобия равен 2.

Значит, $MT : TN = 2 : 1$, то есть медиана MN делится точкой T в отношении 2 : 1. Это означает, что T – точка пересечения медиан треугольника LOM .

Поэтому площадь $\triangle MQH$ в 2 раза больше площади $\triangle NQH$. Так как N – середина LO , то

$$S_{\triangle NQH} = \frac{S_{\triangle LQH} + S_{\triangle OQH}}{2} \Rightarrow S_{\triangle MQH} = S_{\triangle LQH} + S_{\triangle OQH}.$$

Но здесь ошибкой был бы вывод о том, что, значит, $S_{\triangle MQH} = 5 + 3 = 8$. Дело в том, что выше доказано, что одна из этих трех площадей является суммой двух других. Но какая именно, зависит от рисунка, который мы сделаем. Важно, где прямая QH пересекает стороны треугольника. Если треугольник LOM правильный, то точки Q и H совпадают и указанные в условии задачи три площади вырождаются (это здесь невозможно, так как дано, что площади равны 3 и 5). Если прямая QH проходит через любую вершину треугольника, то тогда одна из трех площадей равна 0, а две другие – ненулевые, но равны между собой (тоже не наш случай). Если же прямая QH пересекает две стороны (рассмотренный выше случай), то мы доказали, что одна из этих трех площадей (в одном случае это $\triangle MQH$, в другом – $\triangle LQH$, в третьем – $\triangle OQH$) является суммой двух других.

Поэтому получаем либо $5 + 3 = x$ (то есть $x = 8$), либо $3 + x = 5$ (то есть $x = 2$), либо $5 + x = 3$ (что невозможно).

4-2. Ответ: 23 или 7.

5-1. Ответ: $a \in [-\pi/4 + \pi n; \pi n) \cup [\arctg 5 + \pi n; \arctg 6 + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Положим $b = [\operatorname{tg} a]$. Тогда уравнение принимает вид $(2b - 1)^x = b^2 + 2, b \in \mathbb{Z}$.

Нужно найти все целочисленные значения b , при которых существует рациональное решение x .

При $b = 0$ решений нет. Рассмотрим вначале случай $b > 0$, т.е. $b \in \mathbb{N}$. Тогда поскольку при любом натуральном b

$$b^2 + 2 > 2b - 1 \geq 1,$$

то можем считать, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Значит, числа $b^2 + 2$ и $2b - 1$ имеют одни и те же простые делители.

Пусть p — общий простой делитель этих чисел, тогда

$$\begin{cases} b^2 + 2 = pN, \\ 2b - 1 = pM, \end{cases}$$

где N и M — натуральные. Исключая b из левых частей уравнений этой системы, получаем

$$9 = 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = (4N - (2b + 1)M)p.$$

Значит $(4N - (2b + 1)M)$ — натуральное, а p — делитель 9, т.е. $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} b^2 + 2 = p^m, \\ 2b - 1 = p^k, \end{cases}$$

где m и k — натуральные и $m > k$.

Так как

$$9 = 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = 4 \cdot 3^m - (3^k + 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2),$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2$ не делится на 3, то $k = 2$ и $m = 3, b = 5, x = \frac{3}{2}$.

Для отрицательных b решение проводится почти аналогично. Положим $c = -b$. Тогда исходное уравнение будет записываться в виде:

$$(2c + 1)^x = c^2 + 2, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Случай $c = 1$ очевиден, поскольку решение $x = 1$. Пусть $c \in \mathbb{N}, c \geq 2$. Аналогично

предыдущему показывается, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные.

Опять предположив, что p — общий простой делитель этих чисел, получим

$$\begin{cases} c^2 + 2 = pN, \\ 2c + 1 = pM, \end{cases}$$

и также сделаем вывод, что $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} c^2 + 2 = 3^m, \\ 2c + 1 = 3^k, \end{cases}$$

где m и k — натуральные и $m > k$.

Так как

$$9 = 4(c^2 + 2) - (2c - 1)(2c + 1) = 4 \cdot 3^m - (3^k - 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2),$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2$ не делится на 3, то $k = 2$ и $4 \cdot 3^{m-2} - 3^2 + 2 = 1$ или $4 \cdot 3^{m-2} = 8$,

но последнее уравнение не имеет натуральных решений. Поэтому все решения

описываются уравнениями: $[\operatorname{tg} a] = -1$ и $[\operatorname{tg} a] = 5$, решив которые приходим к ответу.

5-2. Ответ: $a \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right] \cup (\operatorname{arccctg} 6 + \pi n; \operatorname{arctg} 5 + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.