

Вариант 1

1.5.1. Задача. Брусек прямоугольной формы соскальзывает по гладкой плоской поверхности, расположенной под углом к горизонту $\alpha = 30^\circ$. При своём движении он последовательно перекрывает находящиеся на некотором расстоянии друг от друга два фотоэлемента малых размеров. Определите время τ от начала перекрывания первого фотоэлемента до начала перекрывания второго фотоэлемента. Длина бруска $b = 0,1$ м. Интервалы времени, на которые брусек перекрывает каждый из фотоэлементов, равны $\tau_1 = 2$ с и $\tau_2 = 1$ с соответственно. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Решение. Будем отсчитывать координату x от положения 1-го фотоэлемента, и направим ось x так, что в момент времени $t = 0$, когда брусек начинает перекрывать 1-й фотоэлемент, его скорость равна $V_1 > 0$. Ясно, что ускорение бруска в проекции на эту ось $a_x = \pm g \sin \alpha \equiv \pm a$, причем в итоге брусек «соскальзывает», то есть движется вниз - в направлении ускорения. Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1: $a_x = +a$. Брусек всегда движется только вниз. Тогда его скорость в момент начала

перекрывания второго фотоэлемента $V_2 = V_1 + a\tau$. Поскольку $b = V_1\tau_1 + \frac{a\tau_1^2}{2}$ и $b = V_2\tau_2 + \frac{a\tau_2^2}{2}$, то

$a\tau = V_2 - V_1 = b \cdot \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \frac{1}{2} a(\tau_1 - \tau_2)$. Итак, в этом случае время равно

$$\tau = \frac{V_2 - V_1}{g \sin \alpha} = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right). \quad (1)$$

Полученное решение справедливо не при всех численных значениях величин. Ясно, что при этом характере движения должны выполняться неравенства

$$\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} = 0,2 \text{ с}. \quad (2)$$

В частности, при $\tau_1 = 2$ с и $\tau_2 = 1$ с 'эти условия не выполняются и поэтому описанное в условии движение не реализуется.

При других численных значениях, удовлетворяющих написанным выше неравенствам (2), например при $\tau_1 = 0,2$ с и $\tau_2 = 0,1$ с, решение имеет место в соответствии с общей формулой (1)

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) = 0,15 \text{ с}.$$

Вариант 2: $a_x = -a$. Брусек запускается вверх по склону, через некоторое время останавливается, и только потом начинает соскальзывать. В этом случае может быть несколько ситуаций в зависимости от положения точки остановки по отношению к второму фотоэлементу.

Вариант 2а: Брусек до остановки проезжает оба светодиода. Ясно, что этот случай отличается от варианта 1 только знаком ускорения, то есть в этом случае

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha} \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right), \quad (1')$$

причем теперь точку расположения второго фотоэлемента брусек проходит медленнее, чем первого, но он все равно должен проехать ее целиком, то есть теперь условия реализуемости движения – это

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} \quad (2')$$

Вариант 2б: Брусок проезжает первый фотозаэлемент и останавливается над вторым. Теперь время перекрытия второго - это время возвращения в положение начала перекрытия, то есть теперь

$$V_2 \tau_2 - \frac{a \tau_2^2}{2} = 0, \text{ и } V_1 - a \tau = a \frac{\tau_2}{2}. \text{ С учетом выражения для } V_1 = \frac{b}{\tau_1} + \frac{a \tau_1}{2} \text{ найдем, что теперь}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha \tau_1}, \quad (1'')$$

а условия реализуемости движения – это

$$\tau_1 \leq \tau_0, \tau_2 \leq 2\tau_0. \quad (2'')$$

Случай, когда брусок остановится на первом фотозаэлементе, отвечает условиям задачи только в том случае, когда второй расположен ниже первого (ведь после остановки брусок соскальзывает вниз).

В этом случае время перекрытия первого фотозаэлемента становится временем возвращения в начальное положение, и $V_1 = \frac{a \tau_1}{2}$, а из этого положения брусок едет уже вниз, разгоняясь:

$$V_2 = V_1 + a(\tau - \tau_1) = a\left(\tau - \frac{\tau_1}{2}\right), \text{ и из соотношения } b = V_2 \tau_2 + \frac{a \tau_2^2}{2} \text{ находим, что справедлива формула}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha \tau_2}, \quad (1''')$$

и этот случай реализуется при

$$\tau_2 \leq \tau_0, \tau_1 \leq 2\tau_0. \quad (2''')$$

Ответ: Описанное в условии движение реализуемо только при выполнении условий на данные задачи, причем аналитический ответ в этих случаях имеет вид:

$$\tau = \begin{cases} \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right), \text{ если } \tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} = 0,2 \text{ с} \\ \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha} \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right), \text{ если } \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_0 \\ \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha \tau_1}, \text{ если } \tau_1 \leq \tau_0, \tau_2 \leq 2\tau_0 \\ \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{b}{g \sin \alpha \tau_2}, \text{ если } \tau_2 \leq \tau_0, \tau_1 \leq 2\tau_0 \end{cases}.$$

При указанных в условии задаче численных значениях величин эти движения не реализуемы.

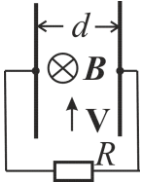
2.3.1. Задача. В сухое помещение объёмом $V = 30 \text{ м}^3$ при температуре $T = 273 \text{ К}$ и нормальном атмосферном давлении вносят открытый сосуд со смесью воды и льда при этой же температуре. На сколько увеличится масса льда Δm в сосуде после установления равновесия? Давление насыщенных паров воды при температуре 0°С $p_{\text{нас}} = 611 \text{ Па}$. Удельные теплоты кристаллизации и испарения при температуре 0°С для воды, соответственно: $\lambda_{\text{к}} = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, $r_n = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

Решение. Вода начинает испаряться из сосуда, пока парциальное давление получаемого в помещении пара не достигнет давления насыщенного пара. На это будет тратиться энергия $Q = r_n \cdot m_n$, где m_n – масса образующегося пара, определяемая из уравнения состояния идеального газа: $m_n = \mu p_{\text{нас}} V / RT$. Расход теплоты на испарение приведёт к образованию льда массой $\Delta m = Q / \lambda_{\text{к}}$.

Подставив Q и m_n , получим, что $\Delta m = \frac{\mu r_n p_{\text{нас}} V}{\lambda_{\text{к}} RT}$.

Ответ: $\Delta m = \frac{\mu r_n p_{\text{нас}} V}{\lambda_{\text{к}} RT} \approx 1 \text{ кг}$.

3.3.1. Задача Между двумя параллельными металлическими пластинами, замкнутыми на резистор с сопротивлением $R = 0,4$ Ом и отстоящими друг от друга на расстояние d , создан поток проводящей жидкости, которая течёт со скоростью $V = 10$ см/с параллельно пластинам. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, направленной параллельно пластинам и перпендикулярно скорости потока. При этом на резисторе R выделяется максимальная возможная при данных условиях мощность $P_m = 1$ мВт. Определите расстояние d между пластинами.



Решение.

В силу физической постановки задачи при возникновении движения проводящей жидкости в магнитном поле за-за действия силы Лоренца на заряды проводящей жидкости между пластинами возникает разность потенциалов $U = VBd$. Если далее замкнуть цепь на внешнее сопротивление R то по замкнутой цепи будет протекать электрический ток I . При прохождении тока через внешнее сопротивление R на нем будет выделяться мощность P . При прохождении тока между пластинами через жидкую среду в ней также будет выделяться мощность равная $I^2 r$, где r сопротивление среды между пластинами. Сопротивление проводящей среды r при заданных геометрических размерах пластин является фиксированным и определяется внутренними свойствами материала, в частности для проводящих сред существуют таблицы экспериментально измеренных удельных сопротивлений. Таким образом, в силу физических свойств сопротивление проводящей среды между пластинами не может изменяться и имеет некоторое фиксированное значение. Внешнее сопротивление R можно легко изменять, например, используя проволочный реостат.

Согласно закону сохранения энергии, мощность P выделяемая током на внешнем сопротивлении будет равна мощности ЭДС за вычетом мощности выделяемой на внутреннем сопротивлении, то есть $P = IU - I^2 r$.

Зависимость мощности от тока представляет собой перевернутую параболу. Мощность P будет равна нулю при двух значениях тока: $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{U}{r}$. Так как в силу параболической зависимости вершина параболы находится посередине этих значений, то максимум мощности достигает при

$$I_m = \frac{U}{2r}$$

И соответственно максимум мощности выделяемой током на внешнем сопротивлении будет равно

$$P_m = \frac{U^2}{4r}$$

С другой стороны, мощность, выделяемую на внешнем сопротивлении можно записать иначе

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{(R + r)^2} R$$

Сравнивая последние 2 выражения, находим, что максимальная мощность будет выделяться если $R = r$.

Следовательно, $P_m = \frac{V^2 B^2 d^2}{4R}$, а потому искомое расстояние $d = \frac{2\sqrt{P_m R}}{VB} = 40$ см.

Ответ: $d = \frac{2\sqrt{P_m R}}{VB} = 40$ см.

Замечание.

Максимальное значение мощности можно определить иначе. Выделяющаяся на резисторе мощность равна $P = I^2 R$. По условию эта мощность должна быть максимальной, а потому должно выполняться уравнение

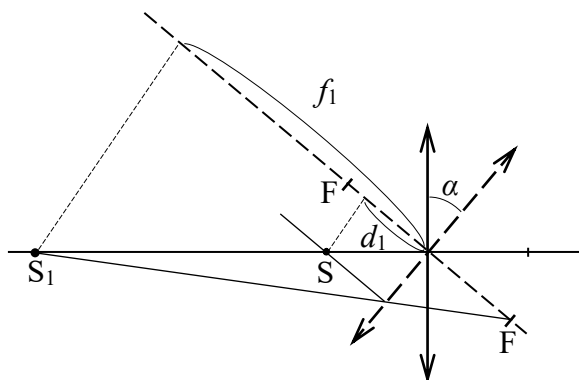
$$\frac{dP(R)}{dR} = U^2 \left[\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} \right] = 0. \text{ Следовательно, } P_m = \frac{V^2 B^2 d^2}{4R}, \text{ а}$$

потому искомое расстояние $d = \frac{2\sqrt{P_m R}}{VB} = 40$ см.

4.10.1. Задача. Две одинаковые тонкие собирающие линзы с фокусным расстоянием $F = 7,5$ см расположены на расстоянии F друг от друга так, как показано на рисунке. В переднем фокусе первой линзы находится точечный источник света. Первую линзу поворачивают на угол $\alpha = 30^\circ$ вокруг горизонтальной оси, проходящей через её центр перпендикулярно плоскости рисунка. Найти расстояние x между источником и его изображением в этой системе линз.

Решение.

На рисунке изображен ход лучей при формировании изображения S_1 источника света S первой линзой, повернутой на угол α . Положения линзы и ее главной оптической оси после поворота показаны на рисунке пунктирными линиями.



Так как оптические центры линз при повороте не смещаются, то идущий вдоль главной оси первоначальной системы луч преломляться не будет, и изображение останется на этой оси при любых поворотах линз. После поворота первой линзы на угол α источник окажется ближе к плоскости линзы – на расстоянии $d_1 = F \cos \alpha$ от неё. Поэтому первая линза будет формировать мнимое изображение S_1 , находящееся на главной оси первоначальной системы слева от первой линзы (см. рис.). Чтобы найти расстояние f_1 от плоскости первой линзы до изображения S_1 ,

воспользуемся формулой тонкой линзы: $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}$.

Откуда следует, что $f_1 = \frac{F \cos \alpha}{\cos \alpha - 1} < 0$. Изображение, полученное первой линзой, служит источником для второй. Расстояние вдоль главной оси первоначальной системы от него до второй линзы равно: $d_2 = \frac{|f_1|}{\cos \alpha} + F = F \frac{2 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

Вторая линза будет формировать действительное изображение, находящееся справа от неё на расстоянии f_2 на главной оси системы. Снова воспользуемся формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}.$$

Подставляя сюда выражение для d_2 , полученное выше, находим, что, расстояние от второй линзы до изображения равно: $f_2 = F(2 - \cos \alpha)$.

Искомое расстояние между источником и его изображением в системе линз равно:

$$x = 2F + f_2 = F(4 - \cos \alpha).$$

Ответ: $x = F(4 - \cos \alpha) \approx 23,5$ см

5.2.1. Задача. Плоский конденсатор, обкладки которого представляют собой квадратные пластины со стороной $l = 20$ см и расположены горизонтально, зарядили до напряжения $U_0 = 100$ В и отключили от источника. После этого в конденсатор вставили диэлектрическую пластину, поперечные размеры которой совпадают с размерами обкладок, а ее толщина равна расстоянию между обкладками $d = 1$ мм. Выдвинув диэлектрическую пластину из конденсатора в направлении, перпендикулярном ребру обкладок, ее отпустили без начальной скорости. Найдите период T возникших после этого колебаний пластины, считая, что ее начальное смещение $x = 0,1$ мм удовлетворяет неравенствам $x \ll d \ll l$. Масса диэлектрической пластины $m = 10$ г, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 4$. Зазором между диэлектриком и обкладками конденсатора, а также трением можно пренебречь, электрическую постоянную примите равной $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Учтите, что при малых x справедливо приближенное равенство $\frac{1}{1+x} \approx 1$.

5.2.1. Решение. При выдвигании диэлектрической пластины из конденсатора изменяется его емкость. Используя формулу для емкости плоского конденсатора, находим, что $C(x) = \frac{\varepsilon_0 l |x|}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l (l - |x|)}{d} = C_0 \left(\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{|x|}{l} \right)$, где $C_0 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$ – емкость пустого конденсатора.

Поскольку конденсатор после зарядки отключен от источника, заряд на нем $q = C_0 U_0 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d} U_0$ будет оставаться постоянным. Изменение энергии конденсатора при выдвигании из него пластины равно: $\Delta W = \frac{q^2}{2C(x)} - \frac{q^2}{2\varepsilon C_0} = \frac{q^2 d (\varepsilon - 1) |x|}{2\varepsilon \varepsilon_0 l^3 \left(\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{|x|}{l} \right)}$.

Учитывая, что по условию $|x| \ll l$, последнее равенство можно приближенно представить в виде:

$\Delta W \approx \frac{q^2 d (\varepsilon - 1) |x|}{2\varepsilon^2 \varepsilon_0 l^3}$. Видно, что при малых x изменение энергии конденсатора пропорционально смещению диэлектрической пластины.

Поскольку изменение энергии равно работе по перемещению пластины: $\Delta W = Fx$, сила F , стремящаяся втянуть диэлектрик обратно в конденсатор, в рассматриваемых условиях является постоянной. Она вызывает постоянное по величине ускорение пластины $a = \frac{F}{m} = \frac{q^2 d (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon^2 \varepsilon_0 l^3 m}$, или $a = \frac{U_0^2 \varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon^2 d m}$. Следовательно, время τ

движения пластины из смещенного положения в положение равновесия можно найти по формуле $\tau = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Это время составляет четверть периода колебаний пластины.

Ответ: $T = 8 \frac{\varepsilon}{U_0} \sqrt{\frac{d m x}{\varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}} \approx 4,35$ с.

Замечание.

"подсказка" указывает на то, что нужно использовать приближение малых изменений, а то, что нужно учитывать именно первый порядок по x , участник должен выяснить самостоятельно.

Вариант 2

1.5.2. Задача. Брусек прямоугольной формы соскальзывает по гладкой плоской поверхности. При своём движении он последовательно перекрывает находящиеся на некотором расстоянии друг от друга два фотоэлемента малых размеров. Известно, что время от начала перекрывания первого фотоэлемента до начала перекрывания второго фотоэлемента, составляет $\tau = 0,51$ с. Длина бруска $b = 0,1$ м. Интервалы времени, на которые брусек перекрывает каждый из фотоэлементов, равны $\tau_1 = 2$ с и $\tau_2 = 1$ с соответственно. Какой угол α образует с горизонтом поверхность, по которой соскальзывает брусек? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Решение. Будем отсчитывать координату x от положения 1-го фотоэлемента, и направим ось x так, что в момент времени $t = 0$, когда брусек начинает перекрывать 1-й фотоэлемент, его скорость равна $V_1 > 0$. Ясно, что ускорение бруска в проекции на эту ось $a_x = \pm g \sin \alpha \equiv \pm a$, причем в итоге брусек «соскальзывает», то есть движется вниз - в направлении ускорения. Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1: $a_x = +a$. Брусек всегда движется только вниз. Тогда его скорость в момент начала перекрывания второго фотоэлемента $V_2 = V_1 + a\tau$. Поскольку $b = V_1\tau_1 + \frac{a\tau_1^2}{2}$ и $b = V_2\tau_2 + \frac{a\tau_2^2}{2}$, то

$$a\tau = V_2 - V_1 = b \cdot \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \frac{1}{2} a(\tau_1 - \tau_2). \text{ Следовательно, } \sin \alpha = \frac{2(\tau_1 - \tau_2)b}{g\tau_1\tau_2(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}. \quad (1)$$

Полученное решение справедливо не при всех численных значениях величин. Ясно, что при этом характере движения должны выполняться неравенства

$$\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} = 0,2 \text{ с}. \quad (2)$$

В частности, при $\tau_1 = 2$ с и $\tau_2 = 1$ с ‘эти условия не выполняются и поэтому описанное в условии движение не реализуется.

При других численных значениях, удовлетворяющих написанным выше неравенствам (2), например при $\tau_1 = 0,2$ с, $\tau_2 = 0,1$ с и $\tau = 0,15$ с, решение имеет место в соответствии с общей формулой (1)

$$\sin \alpha = 0,5, \quad \alpha = \arcsin(0,5) = 30^\circ.$$

Вариант 2: $a_x = -a$. Брусек запускается вверх по склону, через некоторое время останавливается, и только потом начинает соскальзывать. В этом случае может быть несколько ситуаций в зависимости от положения точки остановки по отношению к второму фотоэлементу.

Вариант 2а: Брусек до остановки проезжает оба светодиода. Ясно, что этот случай отличается от варианта 1 только знаком ускорения, то есть в этом случае

$$\sin \alpha = \frac{2(\tau_2 - \tau_1)b}{g\tau_1\tau_2(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}, \quad (1')$$

причем теперь точку расположения второго фотоэлемента брусек проходит медленнее, чем первого, но он все равно должен проехать ее целиком, то есть теперь условия реализуемости движения – это

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} \quad (2')$$

Вариант 2б: Брусек проезжает первый фотоэлемент и останавливается над вторым. Теперь время перекрытия второго - это время возвращения в положение начала перекрытия, то есть теперь

$V_2\tau_2 - \frac{a\tau_2^2}{2} = 0$, и $V_1 - a\tau = a\frac{\tau_2}{2}$. С учетом выражения для $V_1 = \frac{b}{\tau_1} + \frac{a\tau_1}{2}$ найдем, что теперь

$$\sin \alpha = \frac{2b}{g\tau_1(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}, \quad (1'')$$

а условия реализуемости движения – это

$$\tau_1 \leq \tau_0, \tau_2 \leq 2\tau_0. \quad (2'')$$

Случай, когда брусок остановится на первом фотоэлементе, отвечает условиям задачи только в том случае, когда второй расположен ниже первого (ведь после остановки брусок соскальзывает вниз). В этом случае время перекрытия первого фотоэлемента становится временем возвращения в начальное положение, и $V_1 = \frac{a\tau_1}{2}$, а из этого положения брусок едет уже вниз, разгоняясь:

$V_2 = V_1 + a(\tau - \tau_1) = a\left(\tau - \frac{\tau_1}{2}\right)$, и из соотношения $b = V_2\tau_2 + \frac{a\tau_2^2}{2}$ находим, что справедлива формула

$$\sin \alpha = \frac{2b}{g\tau_2(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}, \quad (1''')$$

и этот случай реализуется при

$$\tau_2 \leq \tau_0, \tau_1 \leq 2\tau_0. \quad (2''')$$

Ответ: Описанное в условии движение реализуемо только при выполнении условий на данные задачи, причем аналитический ответ в этих случаях имеет вид:

$$\sin \alpha = \begin{cases} \frac{2(\tau_1 - \tau_2)b}{g\tau_1\tau_2(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}, \text{ если } \tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} = 0,2 \text{ с} \\ \frac{2(\tau_2 - \tau_1)b}{g\tau_1\tau_2(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}, \text{ если } \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_0 \\ \frac{2b}{g\tau_1(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}, \text{ если } \tau_1 \leq \tau_0, \tau_2 \leq 2\tau_0 \\ \frac{2b}{g\tau_2(2\tau - \tau_1 + \tau_2)}, \text{ если } \tau_2 \leq \tau_0, \tau_1 \leq 2\tau_0 \end{cases}.$$

При указанных в условии задаче численных значениях величин эти движения не реализуемы.

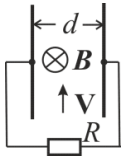
2.3.2. Задача. В сухое помещение при температуре $T = 273$ К и нормальном атмосферном давлении вносят открытый сосуд со смесью воды и льда при этой же температуре. После установления равновесия масса льда в сосуде увеличилась на величину $\Delta m = 1$ кг. Давление насыщенных паров воды при температуре 0°C $p_{\text{нас}} = 611$ Па. Удельные теплоты кристаллизации и испарения при температуре 0°C для воды, соответственно: $\lambda_{\text{к}} = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг, $r_n = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8,3$ Дж/(моль·К). Каков объём V помещения?

Решение. Вода начинает испаряться из сосуда, пока парциальное давление получаемого в помещении пара не достигнет давления насыщенного пара. На это будет тратиться энергия $Q = r_n \cdot m_n$, где m_n – масса образующегося пара, определяемая из уравнения состояния идеального газа: $m_n = \mu p_{\text{нас}} V / RT$. Расход теплоты на испарение приведёт к образованию льда массой $\Delta m = Q / \lambda_{\text{к}}$.

Подставив Q и m_n , получим, что $\Delta m = \frac{\mu r_n p_{\text{нас}} V}{\lambda_{\text{к}} RT}$. Отсюда $V = \frac{\lambda_{\text{к}} RT \Delta m}{\mu r_n p_{\text{нас}}}$.

Ответ: $V = \frac{\lambda_{\text{к}} RT \Delta m}{\mu r_n p_{\text{нас}}} \approx 30 \text{ м}^3$.

3.3.2. Задача Между двумя параллельными металлическими пластинами, замкнутыми на резистор с сопротивлением $R = 0,4 \text{ Ом}$ и отстоящими друг от друга на расстояние $d = 40 \text{ см}$, создан поток проводящей жидкости, которая течёт со скоростью $V = 10 \text{ см/с}$ параллельно пластинам. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , направленной параллельно пластинам и перпендикулярно скорости потока. При этом на резисторе R выделяется максимальная возможная при данных условиях мощность $P_m = 1 \text{ мВт}$. Определите модуль индукции B .



Решение.

В силу физической постановки задачи при возникновении движения проводящей жидкости в магнитном поле за-за действия силы Лоренца на заряды проводящей жидкости между пластинами возникает разность потенциалов $U = VBd$. Если далее замкнуть цепь на внешнее сопротивление R то по замкнутой цепи будет протекать электрический ток I . При прохождении тока через внешнее сопротивление R на нем будет выделяться мощность P . При прохождении тока между пластинами через жидкую среду в ней также будет выделяться мощность равная $I^2 r$, где r сопротивление среды между пластинами. Сопротивление проводящей среды r при заданных геометрических размерах пластин является фиксированным и определяется внутренними свойствами материала, в частности для проводящих сред существуют таблицы экспериментально измеренных удельных сопротивлений. Таким образом, в силу физических свойств сопротивление проводящей среды между пластинами не может изменяться и имеет некоторое фиксированное значение. Внешнее сопротивление R можно легко изменять, например, используя проволочный реостат.

Согласно закону сохранения энергии, мощность P выделяемая током на внешнем сопротивлении будет равна мощности ЭДС за вычетом мощности выделяемой на внутреннем сопротивлении, то есть $P = IU - I^2 r$.

Зависимость мощности от тока представляет собой перевернутую параболу. Мощность P будет равна нулю при двух значениях тока: $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{U}{r}$. Так как в силу параболической зависимости вершина параболы находится посередине этих значений, то максимум мощности достигает при

$$I_m = \frac{U}{2r}$$

И соответственно максимум мощности выделяемой током на внешнем сопротивлении будет равно

$$P_m = \frac{U^2}{4r}$$

С другой стороны, мощность, выделяемую на внешнем сопротивлении можно записать иначе

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{(R + r)^2} R$$

Сравнивая последние 2 выражения, находим, что максимальная мощность будет выделяться если $R = r$.

Следовательно, $P_m = \frac{V^2 B^2 d^2}{4R}$, а потому $B = 1 \text{ Тл}$.

Ответ: $B = \frac{2\sqrt{P_m R}}{Vd} = 1 \text{ Тл}$.

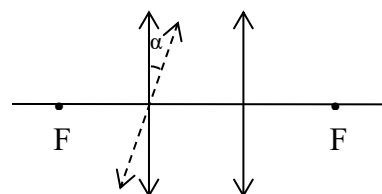
Замечание.

Максимальное значение мощности можно определить иначе. Выделяющаяся на резисторе мощность равна $P = I^2 R$. По условию эта мощность должна быть максимальной, а потому должно

выполняться уравнение $\frac{dP(R)}{dR} = U^2 \left[\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} \right] = 0$. Следовательно, $P_m = \frac{V^2 B^2 d^2}{4R}$, а

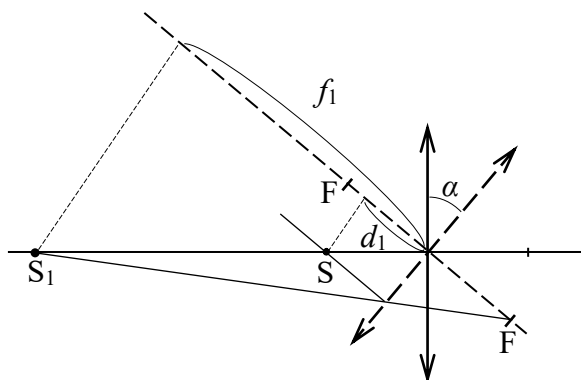
потому $P_m = \frac{V^2 B^2 d^2}{4R}$, а потому $B = 1 \text{ Тл}$.

Задача. 4.10.2. Две одинаковые тонкие собирающие линзы расположены на фокусном расстоянии друг от друга так, как показано на рисунке. В переднем фокусе первой линзы находится точечный источник света. Первую линзу поворачивают на угол $\alpha = 30^\circ$ вокруг горизонтальной оси, проходящей через её центр перпендикулярно плоскости рисунка. Найти фокусное расстояние F линз, если расстояние между источником и его изображением в этой системе линз оказалось равным $x = 23,5$ см.



Решение.

На рисунке изображен ход лучей при формировании изображения S_1 источника света S первой линзой, повернутой на угол α . Положения линзы и ее главной оптической оси после поворота показаны на рисунке пунктирными линиями.



Так как оптические центры линз при повороте не смещаются, то идущий вдоль главной оси первоначальной системы луч преломляться не будет, и изображение останется на этой оси при любых поворотах линз. После поворота первой линзы на угол α источник окажется ближе к плоскости линзы – на расстоянии $d_1 = F \cos \alpha$ от неё. Поэтому первая линза будет формировать мнимое изображение S_1 , находящееся на главной оси первоначальной системы слева от первой линзы (см. рис.). Чтобы найти расстояние f_1 от плоскости первой линзы до изображения S_1 ,

воспользуемся формулой тонкой линзы: $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}$.

Откуда следует, что $f_1 = \frac{F \cos \alpha}{\cos \alpha - 1} < 0$. Изображение, полученное первой линзой, служит источником для второй. Расстояние вдоль главной оси первоначальной системы от него до второй линзы равно: $d_2 = \frac{|f_1|}{\cos \alpha} + F = F \frac{2 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

Вторая линза будет формировать действительное изображение, находящееся справа от неё на расстоянии f_2 на главной оси системы. Снова воспользуемся формулой тонкой линзы: $\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}$. Подставляя сюда выражение для d_2 , полученное выше, находим, что, расстояние от второй линзы до изображения равно: $f_2 = F(2 - \cos \alpha)$.

Расстояние между источником и его изображением в системе линз равно: $x = 2F + f_2 = F(4 - \cos \alpha)$ Откуда следует, что искомое фокусное расстояние линз равно:

$$F = \frac{x}{4 - \cos \alpha}.$$

Ответ: $F = \frac{x}{4 - \cos \alpha} \approx 7,5 \text{ см}$

5.2.2. Задача. Плоский конденсатор, обкладки которого представляют собой квадратные пластины со стороной $l = 20$ см и расположены горизонтально, зарядили до напряжения $U_0 = 100$ В и отключили от источника. После этого в конденсатор вставили диэлектрическую пластину, поперечные размеры которой совпадают с размерами обкладок, а ее толщина равна расстоянию между обкладками $d = 1$ мм. Выдвинув диэлектрическую пластину из конденсатора на расстояние $x = 0,1$ мм в направлении, перпендикулярном ребру обкладок, ее отпустили без начальной скорости, считая, что ее начальное смещение удовлетворяет неравенствам $x \ll d \ll l$. При этом возникли колебаний пластины с периодом $T = 4,35$ с. Найдите массу m диэлектрической пластины, если ее диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 4$. Зазором между диэлектриком и обкладками конденсатора, а также трением можно пренебречь, электрическую постоянную примите равной $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Учтите, что при малых x справедливо приближенное равенство $\frac{1}{1+x} \approx 1$.

5.2.2. Решение. При выдвигании диэлектрической пластины из конденсатора изменяется его емкость. Используя формулу для емкости плоского конденсатора, находим, что $C(x) = \frac{\varepsilon_0 l |x|}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l (l - |x|)}{d} = C_0 \left(\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{|x|}{l} \right)$, где $C_0 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$ – емкость пустого конденсатора.

Поскольку конденсатор после зарядки отключен от источника, заряд на нем $q = C_0 U_0 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d} U_0$ будет оставаться постоянным. Изменение энергии конденсатора при выдвигании из него пластины равно: $\Delta W = \frac{q^2}{2C(x)} - \frac{q^2}{2\varepsilon C_0} = \frac{q^2 d (\varepsilon - 1) |x|}{2\varepsilon \varepsilon_0 l^3 \left(\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{|x|}{l} \right)}$. Учитывая, что по условию $|x| \ll l$, последнее

равенство можно приближенно представить в виде: $\Delta W \approx \frac{q^2 d (\varepsilon - 1) |x|}{2\varepsilon^2 \varepsilon_0 l^3}$. Видно, что при малых x

изменение энергии конденсатора пропорционально смещению диэлектрической пластины. Поскольку изменение энергии равно работе по перемещению пластины: $\Delta W = Fx$, сила F , стремящаяся втянуть диэлектрик обратно в конденсатор, в рассматриваемых условиях является постоянной. Она вызывает постоянное по величине ускорение пластины $a = \frac{F}{m} = \frac{q^2 d (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon^2 \varepsilon_0 l^3 m}$, или

$a = \frac{U_0^2 \varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon^2 d m}$. Следовательно, время τ движения пластины из смещенного положения в

положение равновесия можно найти по формуле $\tau = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Это время составляет четверть периода

колебаний пластины. Поэтому $T = 8 \frac{\varepsilon}{U_0} \sqrt{\frac{d m x}{\varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}}$. Отсюда $m = \frac{U_0^2 T^2 \varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}{64 \varepsilon^2 d x}$.

Ответ: $m = \frac{U_0^2 T^2 \varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}{64 \varepsilon^2 d x} \approx 10$ г.

Замечание.

"подсказка" указывает на то, что нужно использовать приближение малых изменений, а то, что нужно учитывать именно первый порядок по x , участник должен выяснить самостоятельно.

Вариант 3

1.5.3. Задача. Брусек прямоугольной формы соскальзывает по гладкой плоской поверхности, расположенной под углом к горизонту $\alpha = 30^\circ$. При своём движении он последовательно перекрывает находящиеся на некотором расстоянии друг от друга два фотоэлемента малых размеров. Известно, что время от начала перекрывания первого фотоэлемента до начала перекрывания второго фотоэлемента, составляет $\tau = 0,51$ с. Интервалы времени, на которые брусек перекрывает каждый из фотоэлементов, равны $\tau_1 = 2$ с и $\tau_2 = 1$ с соответственно. Какова длина бруска b ? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Решение. Будем отсчитывать координату x от положения 1-го фотоэлемента, и направим ось x так, что в момент времени $t = 0$, когда брусек начинает перекрывать 1-й фотоэлемент, его скорость равна $V_1 > 0$. Ясно, что ускорение бруска в проекции на эту ось $a_x = \pm g \sin \alpha \equiv \pm a$, причем в итоге брусек «соскальзывает», то есть движется вниз - в направлении ускорения. Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1: $a_x = +a$. Брусек всегда движется только вниз. Тогда его скорость в момент начала

перекрывания второго фотоэлемента $V_2 = V_1 + a\tau$. Поскольку $b = V_1\tau_1 + \frac{a\tau_1^2}{2}$ и $b = V_2\tau_2 + \frac{a\tau_2^2}{2}$, то

$a\tau = V_2 - V_1 = b \cdot \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \frac{1}{2} a(\tau_1 - \tau_2)$. Следовательно,

$$b = \frac{g \sin \alpha \tau_1 \tau_2 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2(\tau_1 - \tau_2)}. \quad (1)$$

Полученное решение справедливо не при всех численных значениях величин. Ясно, что при этом характере движения должны выполняться неравенства

$$\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} = 0,2 \text{ с}. \quad (2)$$

В частности, при $\tau_1 = 2$ с и $\tau_2 = 1$ с «эти условия не выполняются и поэтому описанное в условии движение не реализуется.

При других численных значениях, удовлетворяющих написанным выше неравенствам (2), например при $\tau_1 = 0,2$ с, $\tau_2 = 0,1$ с и $\tau = 0,15$ с, решение имеет место в соответствии с общей формулой (1) $b = 0,1$ м.

Вариант 2: $a_x = -a$. Брусек запускается вверх по склону, через некоторое время останавливается, и только потом начинает соскальзывать. В этом случае может быть несколько ситуаций в зависимости от положения точки остановки по отношению к второму фотоэлементу.

Вариант 2а: Брусек до остановки проезжает оба светодиода. Ясно, что этот случай отличается от варианта 1 только знаком ускорения, то есть в этом случае

$$b = \frac{g \sin \alpha \tau_1 \tau_2 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2(\tau_2 - \tau_1)}, \quad (1')$$

причем теперь точку расположения второго фотоэлемента брусек проходит медленнее, чем первого, но он все равно должен проехать ее целиком, то есть теперь условия реализуемости движения – это

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} \quad (2')$$

Вариант 2б: Брусек проезжает первый фотоэлемент и останавливается над вторым. Теперь время перекрытия второго - это время возвращения в положение начала перекрытия, то есть теперь

$V_2\tau_2 - \frac{a\tau_2^2}{2} = 0$, и $V_1 - a\tau = a \frac{\tau_2}{2}$. С учетом выражения для $V_1 = \frac{b}{\tau_1} + \frac{a\tau_1}{2}$ найдем, что теперь

$$b = \frac{g \sin \alpha \tau_1 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2}, \quad (1'')$$

а условия реализуемости движения – это

$$\tau_1 \leq \tau_0, \tau_2 \leq 2\tau_0. \quad (2'')$$

Случай, когда брусок остановится на первом фотоэлементе, отвечает условиям задачи только в том случае, когда второй расположен ниже первого (ведь после остановки брусок соскальзывает вниз). В этом случае время перекрытия первого фотоэлемента становится временем возвращения в начальное положение, и $V_1 = \frac{a\tau_1}{2}$, а из этого положения брусок едет уже вниз, разгоняясь:

$V_2 = V_1 + a(\tau - \tau_1) = a\left(\tau - \frac{\tau_1}{2}\right)$, и из соотношения $b = V_2\tau_2 + \frac{a\tau_2^2}{2}$ находим, что справедлива формула

$$b = \frac{g \sin \alpha \tau_2 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2}, \quad (1''')$$

и этот случай реализуется при

$$\tau_2 \leq \tau_0, \tau_1 \leq 2\tau_0. \quad (2''')$$

Ответ: Описанное в условии движение реализуемо только при выполнении условий на данные задачи, причем аналитический ответ в этих случаях имеет вид:

$$b = \begin{cases} \frac{g \sin \alpha \tau_1 \tau_2 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2(\tau_1 - \tau_2)}, \text{ если } \tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_0 \equiv \sqrt{\frac{2b}{g \sin(\alpha)}} = 0,2 \text{ с} \\ \frac{g \sin \alpha \tau_1 \tau_2 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2(\tau_2 - \tau_1)}, \text{ если } \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_0 \\ \frac{g \sin \alpha \tau_1 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2}, \text{ если } \tau_1 \leq \tau_0, \tau_2 \leq 2\tau_0 \\ \frac{g \sin \alpha \tau_2 (2\tau - \tau_1 + \tau_2)}{2}, \text{ если } \tau_2 \leq \tau_0, \tau_1 \leq 2\tau_0 \end{cases}.$$

При указанных в условии задаче численных значениях величин эти движения не реализуемы.

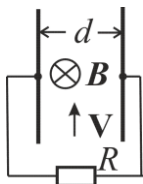
2.3.3. Задача. В сухое помещение объёмом $V = 30 \text{ м}^3$ при температуре $T = 273 \text{ К}$ и нормальном атмосферном давлении вносят открытый сосуд со смесью воды и льда при этой же температуре. После установления равновесия масса льда в сосуде увеличилась на величину $\Delta m = 1 \text{ кг}$. Каково давление насыщенных паров воды $p_{\text{нас}}$ при температуре 0°С ? Удельные теплоты кристаллизации и испарения при температуре 0°С для воды, соответственно: $\lambda_k = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, $r_n = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

2.3.3. Решение. Вода начинает испаряться из сосуда, пока парциальное давление получаемого в помещении пара не достигнет давления насыщенного пара. На это будет тратиться энергия $Q = r_n \cdot m_n$, где m_n – масса образующегося пара, определяемая из уравнения состояния идеального газа: $m_n = \mu p_{\text{нас}} V / RT$. Расход теплоты на испарение приведёт к образованию льда массой $\Delta m = Q / \lambda_k$.

Подставив Q и m_n , получим, что $\Delta m = \frac{\mu r_n p_{\text{нас}} V}{\lambda_k RT}$. Отсюда $p_{\text{нас}} = \frac{\lambda_k RT \Delta m}{\mu r_n V}$.

Ответ: $p_{\text{нас}} = \frac{\lambda_k RT \Delta m}{\mu r_n V} \approx 611 \text{ Па}$.

3.3.3. Задача Между двумя параллельными металлическими пластинами, замкнутыми на резистор с сопротивлением $R = 0,4 \text{ Ом}$ и отстоящими друг от друга на расстояние $d = 40 \text{ см}$, создан поток проводящей жидкости, которая течёт со скоростью V параллельно пластинам. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$, направленной параллельно пластинам и перпендикулярно скорости потока. При этом на резисторе R выделяется максимальная возможная при данных условиях мощность $P_m = 1 \text{ мВт}$. Определите модуль скорости потока.



Решение.

В силу физической постановки задачи при возникновении движения проводящей жидкости в магнитном поле за-за действия силы Лоренца на заряды проводящей жидкости между пластинами возникает разность потенциалов $U = VBd$. Если далее замкнуть цепь на внешнее сопротивление R , то по замкнутой цепи будет протекать электрический ток I . При прохождении тока через внешнее сопротивление R на нем будет выделяться мощность P . При прохождении тока между пластинами через жидкую среду в ней также будет выделяться мощность равная $I^2 r$, где r сопротивление среды между пластинами. Сопротивление проводящей среды r при заданных геометрических размерах пластин является фиксированным и определяется внутренними свойствами материала, в частности для проводящих сред существуют таблицы экспериментально измеренных удельных сопротивлений. Таким образом, в силу физических свойств сопротивление проводящей среды между пластинами не может изменяться и имеет некоторое фиксированное значение. Внешнее сопротивление R можно легко изменять, например, используя проволочный реостат.

Согласно закону сохранения энергии, мощность P выделяемая током на внешнем сопротивлении будет равна мощности ЭДС за вычетом мощности выделяемой на внутреннем сопротивлении, то есть $P = IU - I^2 r$.

Зависимость мощности от тока представляет собой перевернутую параболу. Мощность P будет равна нулю при двух значениях тока: $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{U}{r}$. Так как в силу параболической зависимости вершина параболы находится посередине этих значений, то максимум мощности достигает при

$$I_m = \frac{U}{2r}$$

И соответственно максимум мощности выделяемой током на внешнем сопротивлении будет равно

$$P_m = \frac{U^2}{4r}$$

С другой стороны, мощность, выделяемую на внешнем сопротивлении можно записать иначе

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{(R + r)^2} R$$

Сравнивая последние 2 выражения, находим, что максимальная мощность будет выделяться, если $R = r$.

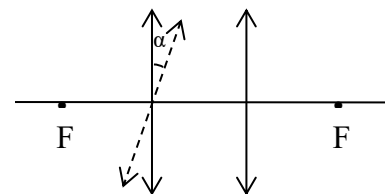
Следовательно, $P_m = \frac{V^2 B^2 d^2}{4R}$, а потому $V = 10$ см/с.

Ответ: $V = \frac{2\sqrt{P_m R}}{Bd} = 10$ см/с.

Замечание.

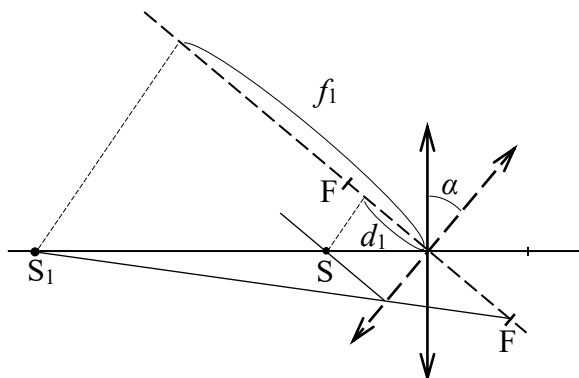
Максимальное значение мощности можно определить иначе. Выделяющаяся на резисторе мощность равна $P = I^2 R$. По условию эта мощность должна быть максимальной, а потому должно выполняться уравнение $\frac{dP(R)}{dR} = U^2 \left[\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} \right] = 0$. Следовательно $P_m = \frac{V^2 B^2 d^2}{4R}$, а потому $V = 10$ см/с.

Задача. 4.10.3. Две одинаковые тонкие собирающие линзы с фокусным расстоянием $F = 7,5$ см расположены на расстоянии F друг от друга так, как показано на рисунке. В переднем фокусе первой линзы находится точечный источник света. Первую линзу поворачивают на некоторый угол вокруг горизонтальной оси, проходящей через её центр перпендикулярно плоскости рисунка. Найти угол поворота α , если расстояние между источником и его изображением в этой системе линз оказалось равным $x = 23,5$ см.



Решение.

На рисунке изображен ход лучей при формировании изображения S_1 источника света S первой линзой, повернутой на угол α . Положения линзы и ее главной оптической оси после поворота показаны на рисунке пунктирными линиями.



Так как оптические центры линз при повороте не смещаются, то идущий вдоль главной оси первоначальной системы луч преломляться не будет, и изображение останется на этой оси при любых поворотах линз. После поворота первой линзы на угол α источник окажется ближе к плоскости линзы – на расстоянии $d_1 = F \cos \alpha$ от неё. Поэтому первая линза будет формировать мнимое изображение S_1 , находящееся на главной оси первоначальной системы слева от первой линзы (см. рис.). Чтобы найти расстояние f_1 от плоскости первой линзы до изображения S_1 ,

воспользуемся формулой тонкой линзы: $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}$. Откуда следует, что $f_1 = \frac{F \cos \alpha}{\cos \alpha - 1} < 0$.

Изображение, полученное первой линзой, служит источником для второй. Расстояние вдоль главной оси первоначальной системы от него до второй линзы равно:

$$d_2 = \frac{|f_1|}{\cos \alpha} + F = F \frac{2 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Вторая линза будет формировать действительное изображение, находящееся справа от неё на расстоянии f_2 на главной оси системы. Снова воспользуемся формулой тонкой линзы:

$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}$. Подставляя сюда выражение для d_2 , полученное выше, находим, что, расстояние от

второй линзы до изображения равно: $f_2 = F(2 - \cos \alpha)$.

Расстояние между источником и его изображением в системе линз равно: $x = 2F + f_2 = F(4 - \cos \alpha)$. Откуда следует, что искомый угол поворота первой линзы

определяется выражением: $\cos \alpha = 4 - \frac{x}{F}$. Таким образом: $\alpha = \arccos \left(4 - \frac{x}{F} \right)$.

Ответ: $\alpha = \arccos \left(4 - \frac{x}{F} \right) \approx 30^\circ$

5.2.3. Задача. Плоский конденсатор, обкладки которого представляют собой квадратные пластины со стороной l и расположены горизонтально, зарядили до напряжения $U_0 = 100$ В и отключили от источника. После этого в конденсатор вставили диэлектрическую пластину, поперечные размеры которой совпадают с размерами обкладок, а ее толщина равна расстоянию между обкладками $d = 1$ мм. Масса диэлектрической пластины $m = 10$ г. Выдвинув диэлектрическую пластину из конденсатора на расстояние $x = 0,1$ мм в направлении, перпендикулярном ребру обкладок, ее отпустили без начальной скорости, считая, что ее начальное смещение удовлетворяет неравенствам $x \ll d \ll l$. При этом возникли колебаний пластины с периодом $T = 4,35$ с. Найдите сторону l диэлектрической пластины, если ее диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 4$. Зазором между диэлектриком и обкладками конденсатора, а также трением можно пренебречь, электрическую постоянную примите равной $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Учтите, что при малых x справедливо приближенное равенство $\frac{1}{1+x} \approx 1$.

5.2.3. Решение. При выдвигании диэлектрической пластины из конденсатора изменяется его емкость. Используя формулу для емкости плоского конденсатора, находим, что $C(x) = \frac{\varepsilon_0 l |x|}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l (l - |x|)}{d} = C_0 \left(\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{|x|}{l} \right)$, где $C_0 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$ – емкость пустого конденсатора.

Поскольку конденсатор после зарядки отключен от источника, заряд на нем $q = C_0 U_0 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d} U_0$ будет оставаться постоянным. Изменение энергии конденсатора при выдвигании из него пластины равно: $\Delta W = \frac{q^2}{2C(x)} - \frac{q^2}{2\varepsilon C_0} = \frac{q^2 d (\varepsilon - 1) |x|}{2\varepsilon \varepsilon_0 l^3 \left(\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{|x|}{l} \right)}$. Учитывая, что по условию $|x| \ll l$, последнее

равенство можно приближенно представить в виде: $\Delta W \approx \frac{q^2 d (\varepsilon - 1) |x|}{2\varepsilon^2 \varepsilon_0 l^3}$. Видно, что при малых x

изменение энергии конденсатора пропорционально смещению диэлектрической пластины. Поскольку изменение энергии равно работе по перемещению пластины: $\Delta W = Fx$, сила F , стремящаяся втянуть диэлектрик обратно в конденсатор, в рассматриваемых условиях является постоянной. Она вызывает постоянное по величине ускорение пластины $a = \frac{F}{m} = \frac{q^2 d (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon^2 \varepsilon_0 l^3 m}$, или

$a = \frac{U_0^2 \varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon^2 dm}$. Следовательно, время τ движения пластины из смещенного положения в

положение равновесия можно найти по формуле $\tau = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Это время составляет четверть периода

колебаний пластины. Поэтому $T = 8 \frac{\varepsilon}{U_0} \sqrt{\frac{dmx}{\varepsilon_0 l (\varepsilon - 1)}}$. Отсюда $l = \frac{64\varepsilon^2 dmx}{U_0^2 T^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}$.

Ответ: $l = \frac{64\varepsilon^2 dmx}{U_0^2 T^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)} \approx 20$ см.

Замечание.

"подсказка" указывает на то, что нужно использовать приближение малых изменений, а то, что нужно учитывать именно первый порядок по x , участник должен выяснить самостоятельно.

Критерии оценки 11 класс

Задача 1 (оценивается максимально в 10 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но правильно понят характер движения и частично сформулированы необходимые физические законы: **1 – 2 балла**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы все необходимые физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **3 – 7 баллов**.
4. Проведен анализ корректности данных условия, установлено, что приведенные числовые данные не соответствуют реализуемым движениям – **8-10 баллов**.

Задача 2 (оценивается максимально в 20 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы;
или задача решается в числах с самого начала и имеется правильный ответ в числах: **1 – 5 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **6 – 12 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **13-18 баллов**.
5. Нет численного ответа **19 баллов**.
6. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **20 баллов**.

Задача 3 (оценивается максимально в 25 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы;
или задача решается в числах с самого начала и имеется правильный ответ в числах: **1 – 10 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **11 – 17 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **18-23 баллов**.
5. Нет численного ответа **24 баллов**.
6. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **25 баллов**.

Задача 4 (оценивается максимально в 25 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы;
или задача решается в числах с самого начала и имеется правильный ответ в числах: **1 – 10 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **11 – 17 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **18-23 баллов**.
5. Нет численного ответа **24 баллов**.
6. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **25 баллов**.

Задача 5 (оценивается максимально в 20 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы;
или задача решается в числах с самого начала и имеется правильный ответ в числах: **1 – 5 баллов**.

3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **6 – 12 баллов**.

4. В том случае, если участник правильно записал выражение для энергии, эквивалентное

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C(x)} - \frac{q^2}{2\epsilon C_0} = \frac{q^2 d(\epsilon - 1)|x|}{2\epsilon\epsilon_0 l^3 \left(\epsilon - (\epsilon - 1) \frac{|x|}{l} \right)},$$

а потом, сославшись на эту формулу, написал, что движение не начнется, предлагается ставить **9** баллов.

То есть считать, что "подсказка" просто указывала на то, что нужно использовать приближение малых изменений, а то, что нужно учитывать именно первый порядок по x , участник должен был выяснить самостоятельно.

5. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **13-18 баллов**.

6. Нет численного ответа **19 баллов**.

7. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **20 баллов**.