

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

Ответ: 18.

Решение. Перемножая три уравнения системы и сокращая на ненулевое выражение xyz , получаем

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3),$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем

$$(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) = -9.$$

Сложив три уравнения системы, получаем, что $xy + yz + zx = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$, и, подставив в предыдущее равенство, получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) = -9$, откуда

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 = 18.$$

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

Ответ: 79 999.

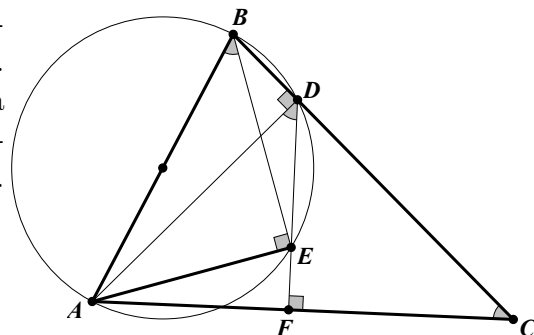
Решение. Число n равно $10^{40\,000} - 1$. Тогда $n^3 = (10^{40\,000} - 1)^3 = 10^{120\,000} - 3 \cdot 10^{80\,000} + 3 \cdot 10^{40\,000} - 1$. Выполняя арифметические операции, получаем число

$$\underbrace{99 \dots 9}_{39\,999} \underbrace{700 \dots 0}_{39\,999} \underbrace{299 \dots 9}_{40\,000}.$$

В нём два «участка» из 39 999 и 40 000 девяток соответственно. Итого 79 999 девяток.

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.

Ответ: $\frac{55}{18}$.



Решение. Углы ABE и ADE равны как вписанные в окружность ω и опирающиеся на дугу AE . Кроме того,

$$\angle ADF = 90^\circ - \angle DAF = \angle ACD.$$

Значит, $\angle ABE = \angle ADF = \angle ACD$ (обозначим этот угол через α). Но тогда треугольники ABE , ADF , ACD — прямоугольные и имеют равные острые углы, следовательно, они подобны.

Из треугольника ABE получаем, что $\cos \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{6}$. Далее находим:

$$CD = AC \cos \alpha \quad (\text{из } \triangle ACD);$$

$$CF = CD \cos \alpha = AC \cos^2 \alpha = 10 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{18} \quad (\text{из } \triangle CDF).$$

Значит, $AF = AC - CF = 10 - \frac{125}{18} = \frac{55}{18}$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

Ответ: 2.

Решение. Пусть всего коробок N . Вычислим первоначальную вероятность выигрыша. Общее количество исходов эксперимента равно количеству способов выбрать 5 различных коробок из N , то есть C_N^5 . Количество благоприятных исходов равно C_{N-3}^2 : должны быть выбраны все три коробки с шариками и любые две из $(N-3)$ оставшихся. Значит, вероятность выигрыша равна

$$P_1 = \frac{C_{N-3}^2}{C_N^5} = \frac{(N-3)!}{(N-5)!2!} : \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{N(N-1)(N-2)}.$$

Аналогично находим, что если разрешают открыть шесть коробок, вероятность выигрыша равна

$$P_2 = \frac{C_{N-3}^3}{C_N^6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{N(N-1)(N-2)}.$$

Следовательно, вероятность выигрыша увеличилась в $\frac{P_2}{P_1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 2$ раза.

Замечание. Можно посчитать вероятность и иначе. Без ограничения общности можно считать, что игрок выбрал первые пять коробок из N . Разместим три шара по коробкам случайным образом. Общее количество способов это сделать равно C_N^3 , а количество выигрышных вариантов равно C_5^3 (все три шара должны быть в первых пяти коробках). Значит, первоначальная вероятность выигрыша равна $C_5^3 : C_N^3$. Аналогично, вероятность выигрыша, когда разрешают открыть шесть коробок, равна $C_6^3 : C_N^3$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

Ответ: 4.

Решение. Так как сумма пятого и шестого члена арифметической прогрессии равна сумме третьего и восьмого членов этой же прогрессии, а по теореме Виета, примененной к данным квадратным уравнениям, получаем равенство $a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$. Раскладывая на множители обе части и перенося всё в одну сторону, получаем $\frac{1}{4}a(a-1)(a-4) = 0$, поэтому a может быть равно только 0, 1 и 4.

Пусть x_n — n -ый член арифметической прогрессии с разностью d . Если $a = 0$, то корнями первого уравнения являются числа $\pm\sqrt{5}$, а второго — ± 1 . Поэтому $|d| = |x_6 - x_5| = 2\sqrt{5}$ и $5|d| = |x_8 - x_3| = 2$, чего быть не может, то есть $a = 0$ не подходит.

Если $a = 1$, то корнями первого уравнения являются числа ± 2 , а второго — $\pm \frac{1}{2}$. Поэтому $|d| = |x_6 - x_5| = 4$ и $5|d| = |x_8 - x_3| = 1$, чего быть не может, то есть $a = 1$ также не подходит.

Теперь рассмотрим случай $a = 4$. Первое уравнение записывается в виде $x^2 - 12x - 1 = 0$, а его корнями являются числа $6 \pm \sqrt{37}$. Второе уравнение после сокращения на 4 имеет вид $x^2 - 12x - 889 = 0$, а

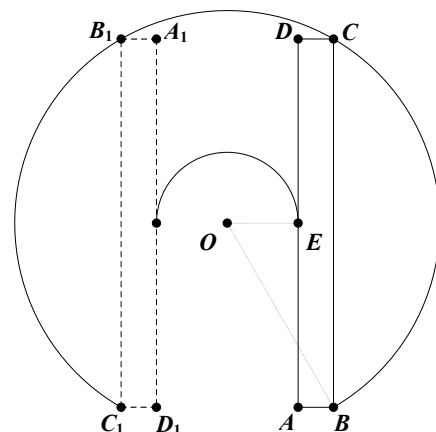
его корнями являются числа $6 \pm 5\sqrt{37}$. Эти числа являются членами арифметической прогрессии с $x_5 = 6 - \sqrt{37}$ и $d = 2\sqrt{37}$, поэтому $a = 4$ подходит.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

Ответ: $252\pi - 27\sqrt{3}$.

Решение. Сделаем замену $u = y - 20$, $v = \frac{x}{2\sqrt{3}}$. Тогда первое неравенство имеет вид $|u+v| + |u-v| \leq 8$.

Если пара (u, v) удовлетворяет данному неравенству, то и пары $(-u, v)$, $(u, -v)$, $(-u, -v)$ также ему удовлетворяют, поэтому на координатной плоскости неравенство задаёт множество, симметричное как относительно обеих координатных осей, так и относительно начала координат. Но при положительных u, v неравенство эквивалентно $u + v + |u - v| \leq 8$, то есть $2u \leq 8$ при $u \geq v$ и $2v \leq 8$ при $u \leq v$. В итоге получаем, что неравенство $|u + v| + |u - v| \leq 8$ определяет квадрат $-4 \leq u \leq 4$, $-4 \leq v \leq 4$. Значит, после обратной замены приходим к тому, что фигура Φ — прямоугольник с центром в точке $(\frac{15}{2}; 0)$, стороны которого лежат на прямых $x = 6, x = 9, y = \pm 9\sqrt{3}$. Множество M , которое замела фигура Φ , изображено на рисунке. По теореме Пифагора находим $OE = 6$, $OB = 18$, откуда $\cos \angle BOE = \frac{OE + AB}{OB} = \frac{1}{2}$, то есть $\angle BOE = 60^\circ$.



Искомая площадь множества M складывается из разности площадей двух полукругов $\frac{\pi}{2}(OB^2 - OE^2)$, площади прямоугольника $ABCD$ и площади сегмента с меньшей дугой BC (две половины равных прямоугольников и равных сегментов не попадают в разность полукругов). В итоге получаем

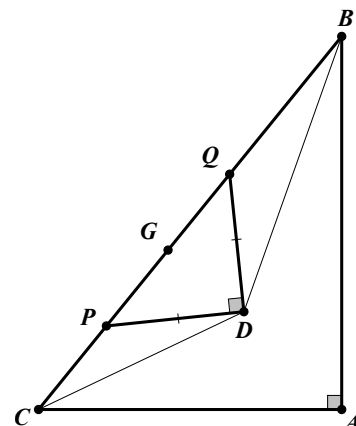
$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2}(OB^2 - OE^2) + AB \cdot CD + \left(\frac{\pi}{3}OB^2 - \frac{1}{2}OB^2 \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2}(18^2 - 6^2) + 3 \cdot 18\sqrt{3} + \left(\frac{\pi}{3}18^2 - \frac{1}{2}18^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 252\pi - 27\sqrt{3}. \end{aligned}$$

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

Ответ: 25° .

Решение. Пусть $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Тогда $PQ = BP - BQ = AB - (BC - CQ) = AB - BC + AC = c - a + b = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC . Пусть G — точка касания вписанной окружности с гипотенузой BC . Исходя из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, можно получить, что $BG = p - AC = \frac{a+c-b}{2}$. Тогда $PG = BP - BG = c - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b+c-a}{2}$. Значит, G — середина PQ , $GP = GQ = r$.

Треугольник DPQ — прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $DG = \frac{1}{2}PQ = r$. Это означает, что D — центр вписанной окружности в треугольник ABC , то есть точка пересечения биссектрис треугольника. Значит, $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = 135^\circ$. Поэтому $\angle DBC = 180^\circ - 135^\circ - \angle DCB = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$.



Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования — баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего. За грубые ошибки могут быть сняты дополнительные баллы.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. (4 балла) Перемножены уравнения системы и получена связь между $x + y + z$ и $xy + xz + yz$ — 2 балла;

- получено более одного ответа — не более 2 баллов за задачу;
- подобрана тройка чисел, удовлетворяющая системе, и для неё вычислено значение выражения — 0 баллов за задачу.

2. (2 балла) Обоснованно получен верный ответ — 2 балла.

- ответ отличается от правильного на 1 — снять 1 балл;
- рассмотрением нескольких частных случаев чисел, составленных из небольшого числа девяток, угадана закономерность для числа, составленного из k девяток, но данная закономерность не обоснована — не более 1 балла за задачу;
- верный ответ без обоснования — 0 баллов за задачу.

3. (5 баллов) Доказано, что треугольники ADF , ABE , ACD подобны — 2 балла.

- если замечено подобие только одной пары из трёх указанных треугольников — баллы не добавляются.

4. (4 балла) В каждом из двух случаев вероятность выражена через количество коробок — 1 балл;

- записано и упрощено отношение вероятностей (полученное уравнение не содержит числа коробок) — 2 балла;
- в ответ входит неизвестное число N — 0 баллов за задачу;
- комбинаторная ошибка: в полученной формуле для подсчёта вероятности значение не равно 1 в случае, когда количество открываемых коробок равно общему числу коробок — 0 баллов за задачу.

5. (5 баллов) Получено необходимое условие на параметр (исходя из равенства сумм корней двух квадратных уравнений) — 2 балла;

- ошибка в теореме Виета, вследствие которой получено неверное необходимое условие на параметр — 0 баллов за задачу;
- за проверку каждого из трёх случаев — по 1 баллу.

6. **(5 баллов)** Построена фигура Φ (прямоугольник) или приведено её корректное описание — 1 балл (обоснование построения требуется);
- Построена требуемая фигура (множество M) или приведено его корректное описание — 2 балла (обоснование построения не требуется);
 - вычислена площадь фигуры — 2 балла;
- если использована неверная формула для подсчёта площади хотя бы одной из частей фигуры — баллы за площадь не добавляются;
- если множество M построено неверно — не более 1 балла за задачу.
-
7. **(6 баллов)** Доказано, что D — центр вписанной окружности треугольника ABC и/или доказано, что D — центр описанной окружности треугольника APQ — 4 балла;
- Доказано, что $\angle PAQ = 45^\circ$ — не менее 2 баллов за задачу.