

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий заключительного этапа

2024/2025 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

1. На столе в ряд стоит 40 чашек, занумерованных слева направо числами от 1 до 40. В каждой чашке лежит не более 10 вишен, а количество вишен в любых соседних чашках отличается ровно на один. В чашках с номерами 1, 4, 7, 10, . . . , 40 вместе 125 вишен. Какое наибольшее количество вишен может быть во всех чашках?

Ответ: 372

Решение. Заметим, что для каждой пары соседних чашек в одной четное число вишен, а в другой — нечетное. Тогда в них вместе нечетное, не превосходящее 20, число вишен. Значит, в каждой паре соседних чашек не более 19 вишен. Тогда в каждой из пар 2–3, 5–6, 8–9, . . . , 38–39 не более 19 вишен, а во всех этих парах вместе не более $19 \cdot 13 = 247$ вишен. Тогда всего в чашках не более $247 + 125 = 372$ вишен.

Приведем пример размещения 372 ягод. В чашки с нечетными номерами положим по 9 вишен, а в чашки с четными номерами по 10 вишен. Всего получится 380 вишен. Далее съедем по две вишни из чашек с номерами 4, 10, 16 и 22. Останется 372 вишни.

2. Вещественные числа a , b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc - ca$.

Ответ: 3

Решение. При $a = c = 1$ и $b = 2$ имеем $ab + bc - ca = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3$. Докажем, что $ab + bc - ca \leq 3$. Для этого покажем, что $2ab + 2bc - 2ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ или, что то же самое, $2b(a + c) \leq b^2 + (a + c)^2$. Но это следствие неравенства о средних для двух чисел: $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

3. Три простые числа p , q и r больше трех и удовлетворяют условию $2p + 5q = r$. Для какого наибольшего n число $p + q + r$ всегда будет делиться на n ?

Ответ: 9

Решение. Покажем, что $p + q + r$ всегда делится на 9. Действительно, по условию $2p + 5q = r$, поэтому $p + q + r = 3p + 6q = 3(p + 2q)$. Заметим, что $2p + 5q = 2(p + q) + 3q$, поэтому если p и q дают остатки 1 и 2 от деления на три, то $2p + 5q$ делится на три и больше трех, поэтому не может быть простым числом. Значит, p и q дают одинаковые остатки от деления на три. Тогда $p + 2q$ делится на три, а, значит, $p + q + r$ делится на 9.

Если $p = 11$ и $q = 5$, то $r = 2p + 5q = 47$ простое число и $p + q + r = 63$. Если $p = 17$ и $q = 5$, то $r = 2p + 5q = 59$ простое число и $p + q + r = 81$. Поэтому для чисел из условия задачи $p + q + r$ гарантированно может делиться только на $\text{НОД}(63, 81) = 9$.

4. Пусть Ω и Γ — две такие окружности с центрами O и P соответственно, что окружность Γ проходит через точку O . На окружности Γ вне окружности Ω выбрана точка M . Касательные к Ω , проходящие через M , касаются Ω в точках A и B и вторично пересекают Γ в точках C и D . Отрезки AB и CD пересекаются в точке E . Докажите, что прямые PE и CD перпендикулярны.

Решение. Для начала заметим, что поскольку MA и MB — касательные к окружности Ω , а точка O — центр Ω , то $\angle AMO = \angle BMO$. Значит, $\angle CMO = \angle DMO$, т. е. дуги OC и OD окружности Γ равны, т. е. точки C и D симметричны относительно прямой OP .

Пусть E' — точка пересечения прямых CD и OP . В силу симметрии C и D , мы знаем, что $PE' \perp CD$. Докажем, что $E' = E$. Для этого достаточно проверить, что E' лежит на прямой AB .

Пример легко построить из оценки: возьмём ученика без карточек, 100 учеников с одной карточкой, а также $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950$ учеников со всеми возможными $\frac{100 \cdot 99}{2}$ парами карточек. Тогда каждое конкретное число встречается ровно у $1 + 99 = 100$ учеников.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

1. По кругу записано 75 различных чисел, причем произведение любых двух соседних чисел не является положительным. Для каждого из 75 чисел рассмотрим произведение числа и его двух соседей. Сколько из них может быть положительных?

Ответ: 37.

Решение. Если ни одно из чисел не равно нулю, то произведение соседних чисел отрицательно и, значит, соседние числа имеют противоположные знаки. Поэтому числа стоящие через одно имеют одинаковые знаки, т. е. одного знака первое, третье, пятое, ..., 75-е числа. Первое и 75-е числа стоят рядом, но их произведение положительно, что противоречит условию. Таким образом, среди чисел есть ровно один ноль, а соседние ненулевые числа имеют противоположные знаки. Разрежем круг по числу ноль. В получившейся полоске знаки чисел чередуются $+-+ \dots +-+$ или $-+-+ \dots -+-$. Для таких расстановок произведение числа и его двух соседей будет положительным в точности когда это число отрицательно. А таких чисел ровно 37.

2. Каждое натуральное число окрашено в синий или красный цвет. Сумма любых двух разноцветных чисел — синее число, а их произведение — красное число. Какого цвета произведение двух красных чисел?

Ответ: красного.

Решение. Пусть r_1 и r_2 красные числа, а b — синее число. Тогда $r_1 + b$ — синее число, а $r_1 r_2 + r_2 b = r_2(r_1 + b)$ — красное число. Кроме того $r_2 b$ — красное число. Если бы число $r_1 r_2$ было бы синим, то сумма $r_1 r_2 + r_2 b$ также была бы синим, что не так. Следовательно, $r_1 r_2$ — красное число.

3. Положительные числа a и b удовлетворяют неравенству $a^2 + b^2 \leq \frac{5}{9}$. Докажите, что

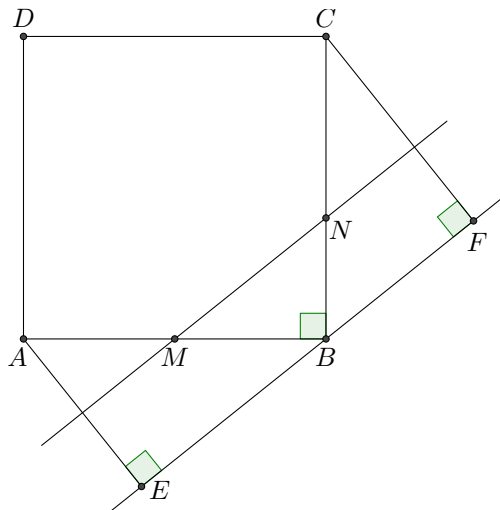
$$ab + a \leq \frac{8}{9}.$$

Решение. По неравенству о средних для двух чисел $\frac{a^2}{4} + b^2 \geq ab$ и $\frac{3a^2}{4} + \frac{1}{3} \geq a$. Следовательно,

$$ab + a \leq \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right) + \left(\frac{3a^2}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + a^2 + b^2 \leq \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9}.$$

4. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Через M провели прямую, она пересекла сторону BC в точке N . Оказалось, что расстояние от точки A до прямой MN равно 3, а расстояние от точки C до прямой MN равно 8. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 157.



Решение. Через вершину B проведем прямую, параллельную MN . Опустим на нее перпендикуляры из точек A и C , обозначим их основания через D и E . Поскольку прямая MN параллельна DE , она является средней линией треугольника ABE и, значит, пересекает сторону AE в ее середине. Поэтому $AE = 6$ и расстояние между прямыми MN и EF равно 3. Следовательно, $CF = 8 + 3 = 11$. Прямоугольные треугольники ABE и BCF равны по сторонам и углу, поэтому $BE = CF = 11$. Таким образом, $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 6^2 + 11^2 = 157$.

5. В стране 2025 городов. Между некоторыми городами построены дороги с односторонним движением, а между 2 городами может быть несколько дорог в разных направлениях. Для любых двух городов A и B можно добраться (возможно через какие-то другие города) либо из A в B , либо из B в A , либо из A в B и из B в A . Для какого наименьшего n можно утверждать, что всегда можно так построить n новых дорог, что в любой город можно будет добраться из любого другого города?

Ответ: при $n = 1$.

Решение. Сначала приведем пример, когда одну дорогу придется построить. Занумеруем города числами от 1 до 2025. Пусть из каждого города k есть дорога в город $k + 1$ (конечно $1 \leq k \leq 2024$). Условие задачи выполнено, но из второго города в первый не добраться. Поэтому нужно построить хотя бы одну дорогу.

Докажем теперь, что всегда можно построить одну дорогу так, что из любого города можно будет попасть в любой другой. Рассмотрим город X , из которого можно приехать в наибольшее количество городов страны. Предположим, что существует город A , в который не приехать из города X . По условию тогда из города A можно добраться до города X . Но тогда из города A можно приехать и во все города, в которые можно было приехать из города X , а еще можно добраться и до города X . Это противоречит выбору города X , как города, из которого можно приехать в наибольшее количество городов. Таким образом, из города X можно добраться во все города страны.

Аналогично, существует такой город Y , в который можно приехать из любого города страны. Тогда если построить дорогу из Y и X , то для любых двух городов A и B появится способ добраться из A в B . А именно, нужно сначала приехать из A в Y , затем по новой дороге переместиться из Y в X и наконец из X приехать в B .

6. Найдите все простые числа p , для которых существует ровно пять таких натуральных чисел n , что $n^3 + p^2$ делится на $n + p$.

Ответ: $p = 5$.

Решение. Поскольку $n^3 + p^3$ всегда делится на $n + p$, число

$$(n^3 + p^3) - (n^3 + p^2) = p^3 - p^2 = p^2(p - 1)$$

делится на $n + p$ в точности когда $n^3 + p^2$ делится на $n + p$.

Если n не делится на p , то $n + p$ также не делится на p и, значит, числа p и $n + p$ взаимно просты. Тогда число $p - 1$ должно делиться на $n + p$, но это невозможно так как $n + p > p - 1 > 0$. Следовательно, n кратно p . Тогда $n = mp$ для некоторого натурального числа k . Число $p^2(p - 1)$ делится на $n + p = (m + 1)p$ в точности когда $p(p - 1)$ делится на $m + 1$. Таким образом, если d — отличный от единицы делитель числа $p(p - 1)$, то число $m = d - 1$ подходит, т.е. $n = (d - 1)p$ удовлетворяет условию. Таким образом, у произведения $p(p - 1)$ должно быть в точности шесть натуральных делителей. Для $p = 2$ таких делителей два, а для $p = 3$ — четыре, поэтому $p \geq 5$. Для $p = 5$ число $p(p - 1) = 20$ имеет в точности шесть натуральных делителей, поэтому $p = 5$ подходит. Пусть $p \geq 7$, тогда $p = 2k + 1$ при некотором $k \geq 3$ и произведение $p(p - 1)$ равно $2k(2k + 1)$. Но это число имеет не меньше восьми натуральных делителей: 1, 2, k , $2k$, $2k + 1$, $2(2k + 1)$, $k(2k + 1)$ и $2k(2m + 1)$, поэтому такие p не подходят.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 6-7 классов

(Правильное и полное решение задач 1, 2, 3 и 5, а также пункта 4в в задаче 4 оценивается в 20 баллов; правильное и полное решение каждого из пунктов 4а и 4б в задаче 4 оценивается в 10 баллов)

1. По кругу в некотором порядке выписаны числа от 1 до 25. Разрешается взять несколько чисел, стоящих подряд, (но не все) и заменить их на их произведение. Можно ли при помощи таких операций сделать все числа на окружности равными? Если да — то объясните, как это сделать, если нет — объясните, для какой начальной расстановки и почему это невозможно.

Ответ: это всегда возможно.

Сначала перемножим все числа, кроме 1. Мы получим расстановку чисел, среди которых одна единица, а остальные числа равны одному и тому же числу x . Теперь перемножим единицу и 12 следующих чисел — эти числа станут все равны x^{12} . Наконец, перемножим оставшиеся 12 чисел x .

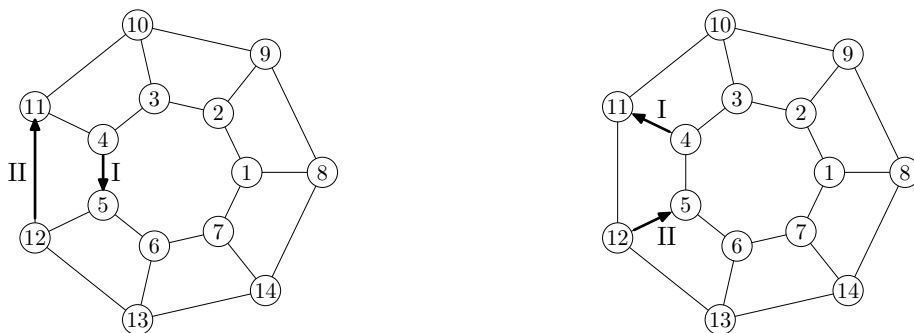
2. Бульдозеристы Аз и Бук играют на карте (см. рисунок, кружки — это деревни, а линии — дороги). Сначала Аз ставит свой бульдозер в любую деревню по своему выбору и проезжает по любой дороге, выходящей из этой деревни, в соседнюю деревню. Дорога при этом разрушается. Потом Бук ставит свой бульдозер в любую деревню (в том числе, можно выбирать деревню, где был или находится Аз), проезжает по любой неразрушенной дороге, выходящей из этой деревни, в соседнюю деревню и оставляет там свой бульдозер (там может уже стоять бульдозер Аза).

Далее ходы выполняются по очереди. Каждым ходом игрок должен переместить свой бульдозер по еще не разрушенной дороге в соседнюю деревню (там может стоять бульдозер другого игрока), при этом дорога разрушается. Если игрок не может сделать ход из-за того, что все дороги, выходящие из деревни, разрушены, он считается проигравшим.

Кто из игроков — Аз или Бук — выигрывает при правильной игре вне зависимости от действий другого игрока? Приведите подробное объяснение его стратегии.

Ответ: выигрывает второй игрок — Бук.

Приведем выигрышную стратегию Бука. Поскольку картинка симметрична, можно считать, что имеется всего два варианта первого хода Аза: а) по ребру, соединяющему внешний и внутренний круги; б) по ребру одного из кругов. В силу симметрии также неважно, в каком направлении Аз двигался по ребру.



На рисунке приведён ответный ход Бука в каждом из этих случаев. Далее Бук применяет симметричную стратегию: если Аз ходит по ребру внутреннего круга, то Бук идёт по ребру внешнего в противоположном направлении, а если Аз идёт по ребру внешнего, то Бук идёт по ребру внутреннего (тоже в противоположном направлении). Если Аз переходит с одного круга на другой, то Бук переходит с другого на первый. В результате на любой ход Аза у Бука всегда есть ответный ход, кроме случая, когда Аз доберётся до ребра 1–8 и пойдёт по нему.

Этот случай, однако, сразу приводит к проигрышу Аза. Действительно, если Аз пошел по ребру 1–8, для определенности Аз находился в вершине 1 и пошел в вершину 8, то в силу симметрии Бук в момент начала этого хода находился в вершине 8. Очевидно, ранее игроки не могли посещать вершины 1 и 8 (слишком мало дорог). Значит, Бук пришел в вершину 8, отвечая на предыдущий ход соперника, разрушив дорогу. Аз, проходя из 1 в 8, разрушает вторую дорогу. Таким образом, Бук может уйти из вершины 8 по третьей дороге, и Аз проиграл (ему некуда идти).

Таким образом, Бук выиграет независимо от того, произойдет разобранный случай или нет.

3. Существуют ли три натуральных числа x, y, z , удовлетворяющих уравнению

$$17^x + 4 \cdot 17^y = z^2 ?$$

Если да — приведите пример такой тройки чисел, если нет — объясните, почему решений нет.

Решение. Ответ: таких чисел не существует.

Заметим, что левая часть делится на 17. Значит, z^2 делится на 17, а так как 17 — простое число, то и z делится на 17. Пусть $z = 17^k z_1$, где z_1 не делится на 17. Подставим в уравнение:

$$17^x + 4 \cdot 17^y - 17^{2k} z_1^2 = 0.$$

Сократим это равенство на максимально возможную степень числа 17. В результате число 17 либо полностью сократится, либо останется только в одном из слагаемых (остаться в двух слагаемых оно не может, поскольку в этом случае левая часть не будет делиться на 17 и поэтому не сможет быть равна 0). Таким образом мы придем к одному из уравнений

$$\begin{aligned} 1 + 4 - z_1^2 &= 0, \\ 1 + 4 - 17^{k_1} z_1^2 &= 0, \\ 17^{x_1} + 4 - z_1^2 &= 0, \\ 1 + 4 \cdot 17^{y_1} - z_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что первые два равенства невозможны. Третье уравнение не имеет решений, поскольку приводится к виду

$$(z_1 - 2)(z_1 + 2) = 17^{x_1}.$$

Оба выражения в скобках должны быть степенями числа 17, что, очевидно, невозможно. Наконец, четвертое уравнение также перепишем в виде

$$(z_1 - 1)(z_1 + 1) = 4 \cdot 17^{y_1}.$$

Случай $y_1 = 0$ относится к самому первому из разбиравшихся уравнений. При $y_1 > 0$ обе скобки не могут делиться на 17, поскольку их разность равна 2, значит, меньшая скобка равна 1, 2 или 4, откуда находим, что $z_1 = 2, 3$ или 5 и равенство невозможно.

4. Вдоль дороги в некотором порядке стоят 32 столба, высотой 1, 2, ..., 32 м. Если среди столбов, расположенных между какими-то двумя несоседними столбами A и B , хотя бы один столб выше, чем A или B (в том числе, если он выше, чем оба столба A и B), то электрик соединяет столбы A и B кабелем. Известно, что электрик, пользуясь этим правилом, проложил все возможные кабели. Например, если бы стояло только 6 столбов в порядке высот 5, 3, 6, 2, 1, 4, то электрик проложил бы 6 кабелей:

$$(5, 2), (5, 1), (5, 4), (3, 2), (3, 1), (3, 4).$$

- а) Приведите пример расположения столбов, в котором всего будет протянут 461 кабель.
- б) Какое наибольшее число кабелей может быть?
- в) Докажите, что электрик протянул не меньше 435 кабелей.

Решение.

- б) Ответ: 465 кабелей.

Всего имеется $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$ пар столбов, при этом среди них 31 пара — это соседние столбы, которые никогда не соединяются кабелем. Остается $496 - 31 = 465$ пар столбов. Все они могут быть соединены, если столбы просто стоят по возрастанию высот.

а) Будем считать высоту столба его номером. С учетом решения пункта б) нам нужно расставить столбы так, чтобы все несоседние столбы были соединены, за исключением четырех пар столбов. Заметим, что в условии задачи приведен пример 6 столбов, в котором имеется ровно 4 пары несоседних не соединенных столбов — это пары

$$(5, 6), (6, 1), (6, 4), (2, 4).$$

Поэтому нам подходит расстановка

$$5, 3, 6, 2, 1, 4, \quad 7, 8, 9, 10, 11, \dots, 30, 31, 32.$$

Здесь соединены проводами все несоседние столбы, кроме пар, указанных выше. Итого $465 - 4 = 461$ кабель.

в) Докажем по индукции, что если имеется $n \geq 2$ столбов, то между столбами протянуто не меньше $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ кабелей. База $n = 2$ очевидна — 0 кабелей.

Индукционный переход. Рассмотрим расстановку $n + 1$ столба с наименьшим числом кабелей. Возьмем столб наименьшей высоты. Заметим, что если убрать этот столб (с кабелями, которые на нем закреплены) то для всех оставшихся кабелей требования прокладки (кабель соединяет столбы A и B , если между ними хотя бы один «высокий» столб) останутся выполненными. Значит, таких кабелей не меньше $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Что же касается кабелей, выходящих из наименьшего столба, таких кабелей заведомо не меньше $n - 2$ — они ведут ко всем столбам, кроме соседних. Таким образом, число кабелей в нашей расстановке $n + 1$ столба не меньше $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2 = \frac{(n-1)(n-3)}{2}$, что и требуется для завершения шага индукции.

Замечание. Доказанная оценка реализуется, если мы каждый раз добавляем наименьший столб куда-нибудь в середину. Например, в конфигурации

$$32, 30, 28, 26, \dots, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 25, 27, 29, 31.$$

кабели проложены между любыми двумя несоседними столбами, кроме пар 32–31, 31–30, ..., 4–3, 3–2 (30 пар). Итого 496 пар минус 31 пара соседних столбов и минус 30 пар из предыдущей фразы.

5. Помик выписал все возможные равенства, где число 2025 представлено в виде суммы нескольких слагаемых, ни одно из которых не делится на 75. Калуша выписала равенства, где число 2025 представлено в виде суммы нескольких слагаемых, но ни одно слагаемое не повторяется больше 74 раз. (Предполагается, что слагаемые во всех суммах располагаются по убыванию.) Например, у Помика встречается первое равенство, а у Калуши второе:

$$2025 = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{1000 \text{ раз}} + 25, \quad 2025 = \underbrace{150 + 150 + \dots + 150}_{13 \text{ раз}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{25 \text{ раз}}.$$

Докажите, что у них получилось поровну равенств.

Решение. Построим правило (взаимно-однозначное соответствие), которое позволяет каждому равенству Помика поставить в пару равенство Калуши так, чтобы *разным равенствам Помика ставились в соответствие разные равенства Калуши и чтобы каждое равенство Калуши оказалось бы в паре с каким-то равенством Помика*. Тогда сам факт существования такого правила доказывает, что у Помика и у Калуши разложений поровну.

Правило простое — если в разложении Помика какое-то слагаемое x встречается не меньше 75 раз, следует заменить 75 из них на одно слагаемое $75x$, такие действия следует выполнять до тех пор, пока не окажется, что все слагаемые в сумме встречаются не более 74 раз. Например:

$$\begin{aligned} 2025 &= \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{1000 \text{ раз}} + 25 = \\ &= 150 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{925 \text{ раз}} + 25 = \\ &= 150 + 150 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{850 \text{ раз}} + 25 = \dots = \\ &= \underbrace{150 + 150 + \dots + 150}_{17 \text{ раз}} + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{25 \text{ раз}} + 25 \end{aligned}$$

Полученное в результате разложение имеется у Калуши. Заметим, что если такого слагаемого x не нашлось, то преобразовывать разложение Помика не нужно, оно у Калуши тоже есть. Отметим на всякий случай, что, сделав одно «укрупнение», т.е. получив число $75x$, Помик не сможет подвергнуть его еще одному укрупнению: никакое разложение не может содержать 75 слагаемых вида $75x$ — их сумма слишком велика. Тогда ясно, что если мы берем разные разложения Помика, то из них получаются разные разложения Калуши.

Для приведенного правила совсем несложно построить «обратное правило», которое для любого разложения Калуши предъявляет исходное разложение Помика: для этого нужно каждое слагаемое вида $75x$ (если такое найдётся) заменить на 75 одинаковых слагаемых x . Например

$$2025 = \underbrace{150 + 150 + \dots + 150}_{13 \text{ раз}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{25 \text{ раз}} = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{1275 \text{ раз}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{25 \text{ раз}}.$$

А вот разложение

$$2025 = \underbrace{37 + 37 + \dots + 37}_{54 \text{ раза}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{27 \text{ раз}}$$

ни Помику, ни Калуше менять не потребуется, оно опять-таки встречается у обоих. Благодаря этому «обратному правилу» мы сразу видим, что каждое разложение Калуши может быть получено из какого-то разложения Помика.

Таким образом мы проверили, что описанное правило удовлетворяет нужным требованиям.