Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

Вариант 1

1. *В некоторых клетках полоски 1×2021 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?*

Ответ: 1347.

Решение. Пусть n — количество расставленных фишек. Заметим, что числа в пустых клетках лежат в диапазоне от 1 до n и имеют одинаковую четность. Поэтому таких чисел может быть не более $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Значит, количество пустых клеток не превосходит $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, иначе расставленные в них числа будут повторяться. Тогда

$$2021 - n \leqslant \left[\tfrac{n+1}{2}\right] \leqslant \tfrac{n+1}{2}, \quad \text{откуда} \quad n \geqslant \tfrac{4041}{3} = 1347.$$

Покажем, что значение $n = 1347$ реализуется. Нам подойдет расстановка

$$\underbrace{01\,01\,\ldots\,01}_{674\text{ пары}}\underbrace{111\,\ldots\,1}_{673\text{ числа}},$$

где единицами обозначены фишки, а нулями — пустые клетки. При этом на месте нулей окажутся следующие числа:

$$1347, 1345, 1343, \ldots, 3, 1. \quad \square$$

Замечание. Приведенная в решении реализация не единственна. Например, подойдет и такая:

$$1\,011\,011\,\ldots\,011\,0\,.$$

Ей соответствуют следующие числа:

$$1345, 1341, \ldots, 5, 1, 3, 7, \ldots, 1343, 1347.$$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} + \frac{b^4 + c^4}{a^2 + 4bc} + \frac{c^4 + a^4}{b^2 + 4ca}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Решение. По неравенствам для средних

$$\frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} \geqslant \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 2a^2 + 2b^2} = \frac{a^4 + b^4}{3 + a^2 + b^2} \geqslant \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{2(3 + a^2 + b^2)} = \frac{\left(3 - c^2\right)^2}{2(6 - c^2)} = \frac{1}{2}\left(-c^2 + \frac{9}{6 - c^2}\right).$$

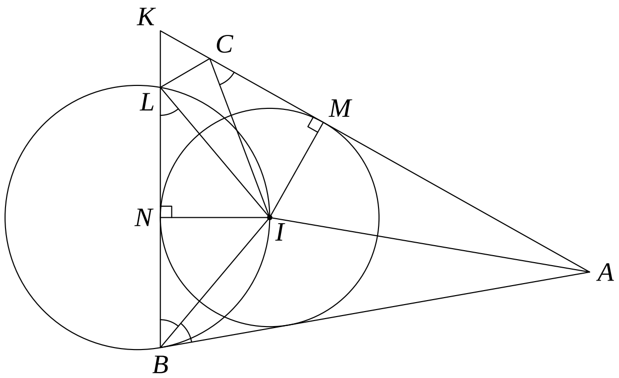
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в A. Складывая эти неравенства, мы получим

$$A \geqslant \frac{1}{2}\left(-\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{9}{6 - a^2} + \frac{9}{6 - b^2} + \frac{9}{6 - c^2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{81}{18 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)}\right) = \frac{6}{5}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.*

Ответ: 90°.



Решение. Пусть IM и IN — перпендикуляры, опущенные из точки I на AK и BK соответственно. Заметим, что $\angle ABI = \angle BLI$, поскольку прямая AB касается описанной окружности треугольника BLI. Прямая AI — биссектриса угла A, а $AB = AC$ по условию. Значит, треугольники ABI и ACI равны по двум сторонам и углу. Поэтому

$$\angle ACI = \angle ABI = \angle BLI \quad \text{и} \quad IM = IN,$$

то есть прямоугольные треугольники CMI и LNI равны. Следовательно,

$$KC = KM - CM = KN - LN = KL.$$

Прямая KI является биссектрисой равнобедренного треугольника CLK, откуда $KI \perp CL$. $\square$

4. *На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n + 2$ пятерок, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?*

Ответ: $n = 0$.

Решение. Договоримся шестеричные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Тогда

$$x = (1200\underbrace{55\ldots5}_{10n+2}) = (1201\underbrace{00\ldots0}_{10n+2}) - 1 = 289 \cdot 6^{10n+2} - 1 =$$
$$= (17 \cdot 6 \cdot 6^{5n} - 1)(17 \cdot 6 \cdot 6^{5n} + 1) = (102 \cdot 7776^n - 1)(102 \cdot 7776^n + 1).$$

Если $n = 0$, то $x = 101 \cdot 103$, что нам подходит. Пусть $n \geqslant 1$. Заметим, что

$$102 \bmod 101 = 1, \quad 7776^n \bmod 101 = (77 \cdot 101 - 1)^n \bmod 101 = (-1)^n.$$

Положим $a = 102 \cdot 7776^n - 1$, $b = 102 \cdot 7776^n + 1$. Эти числа взаимно просты, так как они нечетны и различаются на 2. Рассмотрим два случая.

1) *n четно.* Тогда a делится на 101. Но a и b не имеют общих простых делителей, откуда $a = 101^p$ при некотором натуральном p. Мы получим

$$101^p - 1 = 102 \cdot 7776^n - 2 = 2\,(51 \cdot 7776^n - 1),$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 4, а правая — нет.

2) *n нечетно.* Тогда b делится на 101 и, аналогично, $b = 101^q$ при некотором натуральном q. Поэтому

$$101^q - 1 = 102 \cdot 7776^n,$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 5, а правая — нет. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n+1$, $6n+3$, $6n+5$ и $6n+7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $12n^2 + 8n - 1$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n+3$, $6n+5$ и $6n+7$ пиастров. Для любого $r = 1, \ldots, 6n$ обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $6n+1$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если $r \in \{1, \ldots, 6n\}$, $s \bmod (6n+1) = r$, то при $s \geqslant m_r$ сумму s банк выплатить сможет, а при $s < m_r$ — не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $6n+1$ пиастров. Предположим теперь, что $s < m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $6n+1$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $6n+1$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа $2k \bmod (6n+1)$ пробегают значения $\{1, \ldots, 6n\}$ при $k = 1, \ldots, 6n$.* Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $2k - 2k'$ кратно $(6n+1)$, то $(k-k') \,\vdots\, (6n+1)$. Так как $|k - k'| \leqslant 6n$, мы получаем $k = k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $6n+1$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1, \ldots, m_{6n}\} - (6n+1)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r \in \{1, \ldots, 6n\}$. Заметим, что

$$6n+3 = (6n+1)+2, \quad 6n+5 = (6n+1)+4 \quad \text{и} \quad 6n+7 = (6n+1)+6.$$

В силу 2) существует единственное число $k \in \{1, \ldots, 6n\}$, для которого $2k \bmod (6n+1) = r$. Поскольку остатки монет по модулю $6n+1$ принимают значения 2, 4 и 6, нам надо представить $2k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем шестерки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $2k$, а затем при необходимости добавляем 2 или 4. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r = 2k + \left[\tfrac{k+2}{3}\right] \cdot (6n+1) \leqslant 2 \cdot 6n + 2n\,(6n+1) = 12n^2 + 14n,$$

причем равенство реализуется при $k = 6n$. Значит, ответом в задаче будет

$$12n^2 + 14n - (6n+1) = 12n^2 + 8n - 1. \quad \square$$

Вариант 2

1. *В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?*

Ответ: 1400.

Решение. Пусть n — количество расставленных фишек. Заметим, что числа в пустых клетках лежат в диапазоне от 1 до n и имеют одинаковую четность. Поэтому таких чисел может быть не более $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Значит, количество пустых клеток не превосходит $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, иначе расставленные в них числа будут повторяться. Тогда

$$2100 - n \leqslant \left[\tfrac{n+1}{2}\right] \leqslant \tfrac{n+1}{2}, \quad \text{откуда} \quad n \geqslant \tfrac{4199}{3} = 1399\tfrac{2}{3} \ \text{ и } \ n \geqslant 1400.$$

Покажем, что значение $n = 1400$ реализуется. Нам подойдет расстановка

$$\underbrace{01\,01\ldots01}_{700 \text{ пар}}\underbrace{111\ldots1}_{700 \text{ чисел}},$$

где единицами обозначены фишки, а нулями — пустые клетки. При этом на месте нулей окажутся следующие числа:

$$1400, 1398, 1396, \ldots, 4, 2. \quad \square$$

Замечание. Приведенная в решении реализация не единственна. Например, подойдет и такая:

$$\underbrace{101\,101\ldots101}_{350 \text{ троек}}\,\underbrace{110\,110\ldots110}_{350 \text{ троек}},$$

Ей соответствуют следующие числа:

$$1398, 1394, \ldots, 6, 2, 4, 8, \ldots, 1396, 1400.$$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} + \frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2} + \frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}.$$

Ответ: $\frac{3}{8}$.

Решение. Заметим, что

$$4\bigl(a^3+b^3\bigr) \geqslant (a+b)^3 \quad \text{и} \quad 9-c^2 = (3-c)(3+c) = (a+b)(3+c).$$

Тогда по неравенствам для средних

$$\frac{4\bigl(a^3+b^3\bigr)}{8ab+9-c^2} \geqslant \frac{(a+b)^3}{2(a+b)^2+9-c^2} = \frac{(a+b)^2}{2(a+b)+3+c} = \frac{(3-c)^2}{9-c} = -c-3+\frac{36}{9-c}.$$

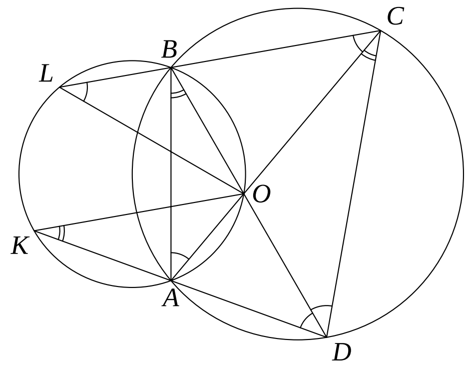
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в $4A$. Складывая эти неравенства, мы получим

$$A \geqslant \frac{1}{4}\left(-(a+b+c) - 9 + \frac{36}{9-a} + \frac{36}{9-b} + \frac{36}{9-c}\right) \geqslant -3 + \frac{81}{27-(a+b+c)} = \frac{3}{8}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.*

Ответ: $1 : 1$.



Решение. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, верны равенства $\angle BAC = \angle BDC$ и $\angle BCA = \angle BDA$. Заметим также, что $\angle BCA = \angle BDC$ по условию и $\angle BAO = \angle BLO$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Тогда

$$\angle BCA = \angle BDC = \angle BAC = \angle BAO = \angle BLO.$$

Поэтому треугольник CLO равнобедренный, то есть $OC = OL$. Кроме того,

$$\angle ADO = \angle BCA = \angle BDC = \angle ODC \quad \text{и} \quad \angle AKO = \angle ABO = \angle ABD = \angle ACD.$$

Значит, треугольники DKO и DCO равны по двум углам и стороне, откуда $OK = OC$. Таким образом, $OK = OL$. $\square$

4. *На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?*

Ответ: $n = 0$.

Решение. Договоримся четверичные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Тогда

$$x = (12320\underbrace{33\ldots3}_{10n+1}) = (12321\underbrace{00\ldots0}_{10n+1}) - 1 = 441 \cdot 4 \cdot 4^{10n} - 1 = (42 \cdot 1024^n - 1)(42 \cdot 1024^n + 1).$$

Если $n = 0$, то $x = 41 \cdot 43$, что нам подходит. Пусть $n \geqslant 1$. Заметим, что

$$1024 \bmod 41 = 32^2 \bmod 41 = (-9)^2 \bmod 41 = -1, \quad \text{откуда} \quad 1024^n \bmod 41 = (-1)^n.$$

Положим $a = 42 \cdot 1024^n - 1$, $b = 42 \cdot 1024^n + 1$. Эти числа взаимно просты, так как они нечетны и различаются на 2. Рассмотрим два случая.

1) *n четно.* Тогда a делится на 41. Но a и b не имеют общих простых делителей, откуда $a = 41^p$ при некотором натуральном p. Мы получим

$$41^p - 1 = 42 \cdot 1024^n - 2 = 2\,(21 \cdot 1024^n - 1),$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 4, а правая — нет.

2) *n нечетно.* Тогда b делится на 41 и, аналогично, $b = 41^q$ при некотором натуральном q. Поэтому

$$41^q - 1 = 42 \cdot 1024^n,$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 5, а правая — нет. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n+1$, $6n+4$, $6n+7$ и $6n+10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $12n^2 + 14n - 1$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n+4$, $6n+7$ и $6n+10$ пиастров. Для любого $r = 1, \ldots, 6n$ обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $6n+1$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если $r \in \{1, \ldots, 6n\}$, $s \bmod (6n+1) = r$, то при $s \geqslant m_r$ сумму s банк выплатить сможет, а при $s < m_r$ — не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $6n+1$ пиастров. Предположим теперь, что $s < m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $6n+1$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $6n+1$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа $3k \bmod (6n+1)$ пробегают значения $\{1, \ldots, 6n\}$ при $k = 1, \ldots, 6n$.* Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $3k - 3k'$ кратно $(6n+1)$, то $(k - k') \,\vdots\, (6n+1)$. Так как $|k - k'| \leqslant 6n$, мы получаем $k = k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $6n+1$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1, \ldots, m_{6n}\} - (6n+1)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r \in \{1, \ldots, 6n\}$. Заметим, что

$$6n+4 = (6n+1)+3, \quad 6n+7 = (6n+1)+6 \quad \text{и} \quad 6n+10 = (6n+1)+9.$$

В силу 2) существует единственное число $k \in \{1, \ldots, 6n\}$, для которого $3k \bmod (6n+1) = r$. Поскольку остатки монет по модулю $6n+1$ принимают значения 3, 6 и 9, нам надо представить $3k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем девятки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $3k$, а затем при необходимости добавляем 3 или 6. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r = 3k + \left[\tfrac{k+2}{3}\right] \cdot (6n+1) \leqslant 3 \cdot 6n + 2n\,(6n+1) = 12n^2 + 20n,$$

причем равенство реализуется при $k = 6n$. Значит, ответом в задаче будет

$$12n^2 + 20n - (6n+1) = 12n^2 + 14n - 1. \quad \square$$

Вариант 3

1. *При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?*

Ответ: все $n > 5$, кратные 5.

Решение. Пусть доску можно разрезать на m квадратов 1×1 и m квадратов 2×2. Тогда $n^2 = m + 4m = 5m$, откуда $n^2 \,\vdots\, 5$ и $n \,\vdots\, 5$, а $m = \frac{n^2}{5}$. Значит, нам не подходят n, которые не делятся на 5.

Пусть $n \,\vdots\, 5$. Заметим, что при $n \geqslant 10$ доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты размера 10×10 и 15×15. Поэтому нам достаточно проверить, что $n = 10$ и $n = 15$ удовлетворяют условию задачи, а $n = 5$ — нет. При таких n на доске $n \times n$ помещается максимум 25, 49 и 4 неналегающих квадратов размера 2×2, а требуется их 20, 45 и 5 соответственно. Тогда случай $n = 5$ не подходит. При $n = 10$ и $n = 15$ можно вырезать соответственно 20 и 45 квадратов размера 2×2, а оставшуюся часть доски разрезать на одиночные клетки. Значит, $n = 10$ и $n = 15$ удовлетворяют условию. $\square$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

Ответ: 6.

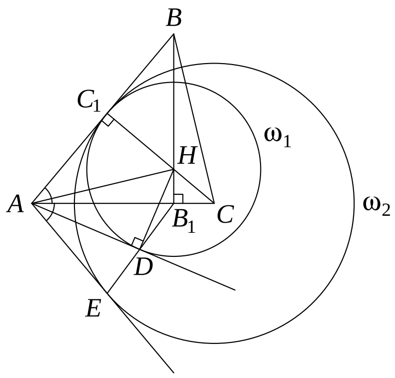
Решение. По неравенству Коши

$$A = \left(a^7b + ab^3\right) + \left(b^7c + bc^3\right) + \left(c^7a + ca^3\right) \geqslant 2\left(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2\right) \geqslant \tfrac{2}{3}\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)^2 = 6.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.*

Ответ: 180°.



Решение. Поскольку прямоугольные треугольники ACC_1 и ACE равны по катету и гипотенузе, прямая CA — биссектриса равнобедренного треугольника C_1CE. Поэтому она является серединным перпендикуляром к отрезку C_1E, то есть точки C_1 и E симметричны относительно прямой AC. Из равенства треугольников AHD и AHC_1 вытекает также, что $\angle AHD = \angle AHC_1$. У четырехугольника AB_1HC_1 есть два противоположных прямых угла. Значит, он вписанный, откуда $\angle AB_1C_1 = \angle AHC_1$. В силу симметрии точек C_1 и E

$$\angle AB_1E = \angle AB_1C_1 = \angle AHC_1.$$

Кроме того, $\angle ADH = 90^\circ = \angle AB_1H$. Поэтому четырехугольник ADB_1H также вписанный, и

$$\angle AB_1D = \angle AHD = \angle AHC_1.$$

Таким образом, $\angle AB_1D = \angle AB_1E$, то есть $\angle B_1DE = 180^\circ$. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geqslant 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?*

Ответ: 2021.

Решение. Пусть a и b — простые делители x, $b = a+4$. Пары последних цифр a и b могут быть $(3,7)$, $(7,1)$, $(9,3)$. Так как x не может оканчиваться на 7, возможен только первый случай. Тогда число $y = \dfrac{a+b}{2}$ оканчивается на 5 и, значит, имеет вид $y = 10m+5$. Отсюда

$$y^2 \bmod 100 = 25\,(4m^2+4m+1) \bmod 100 = 25,$$

то есть y^2 оканчивается на 25. Поэтому $x = y^2 - 4$ оканчивается на 21, и 21 — последнее из чисел, написанных Петей. Значит, x принимает одно из следующих значений:

$$2021,\ 192021,\ 18192021,\ \ldots,\ 1011\ldots2021.$$

Первое из них нам подходит, поскольку $2021 = 43\cdot 47$. Заметим, что x не делится на 3 и на 11 (иначе $x \leqslant 3\cdot(3+4) = 21$ и $x \leqslant 11\cdot(11+4) = 165$ соответственно). По первому условию мы отбрасываем числа, начинающиеся с 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, а по второму — число, начинающееся с 11 (суммы его цифр на четных и нечетных позициях различаются на 33). Начинаться с 14 число x не может по условию. Если $x = 1718192021$, то

$$y^2 = x + 4 = 1718192025.$$

Но правая часть делится на 11 и не делится на 121, а потому точным квадратом быть не может. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1}\cdot 5$, $3^{n-2}\cdot 5^2$, $3^{n-3}\cdot 5^3$, $\ldots$, $3\cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}$.

Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 3^n, $3^{n-1}\cdot 5$, $\ldots$, 5^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n = 1$ доступны только монеты по 3 и 5 пиастров. Если $s \geqslant 10$, то найдется такое $r \in \{0,1,2\}$, что $(s-5r) \,\vdots\, 3$. Тогда s имеет вид $5r+3k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что числа 9 и 8 будут 1-разложимыми, а 7 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $7 = 5^2 - 2\cdot 3^2$.

Докажем, что для любого натурального n число $5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n-1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 5^n пиастров, то $m < 5$ и $(5^{n+1} - m\cdot 5^n) \,\vdots\, 3$, откуда $m = 2$. Поэтому найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$s = 2\cdot 5^n + k_1\cdot 5^{n-1}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^n.$$

Но тогда

$$5^n - 2\cdot 3^n = \frac{s - 2\cdot 5^n}{3} = k_1\cdot 5^{n-1} + k_2\cdot 5^{n-2}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^{n-1},$$

что невозможно, поскольку число $5^n - 2 \cdot 3^n$ не является $(n-1)$-разложимым.

Докажем теперь, что если $s > 5^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n-1$ утверждение справедливо. Выберем $r \in \{0, 1, 2\}$ так, чтобы $s - r \cdot 5^n$ делилось на 3. Положим $N = \dfrac{s - r \cdot 5^n}{3}$. Тогда

$$N > \frac{5^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} - r \cdot 5^n}{3} = \frac{(5-r)\,5^n - 2 \cdot 3^{n+1}}{3} \geqslant \frac{3 \cdot 5^n - 2 \cdot 3 \cdot 3^n}{3} = 5^n - 2 \cdot 3^n,$$

и по индукционному предположению N будет $(n-1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$N = k_1 \cdot 5^{n-1} + k_2 \cdot 5^{n-2} \cdot 3 + \ldots + k_n \cdot 3^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r \cdot 5^n + k_1 \cdot 5^{n-1} \cdot 3 + \ldots + k_n \cdot 3^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$

Вариант 4

1. *При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?*

   Ответ: все $n > 7$, кратные 7.

   Решение. Пусть доску можно разрезать на m квадратов 1×1 и m прямоугольников 2×3. Тогда $n^2 = m + 6m = 7m$, откуда $n^2 \vdots 7$ и $n \vdots 7$, а $m = \frac{n^2}{7}$. Значит, нам не подходят n, которые не делятся на 7.

   Пусть $n \vdots 7$. Заметим, что при $n \geqslant 14$ доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты размера 14×14 и 21×21. Поэтому нам достаточно проверить, что $n = 14$ и $n = 21$ удовлетворяют условию задачи, а $n = 7$ — нет. При таких n на доске $n \times n$ помещается максимум 28, 70 и 6 неналегающих прямоугольников размера 2×3, а требуется их 28, 63 и 7 соответственно. Тогда случай $n = 7$ не подходит. При $n = 14$ и $n = 21$ можно вырезать соответственно 28 и 63 прямоугольников размера 2×3, а оставшуюся часть доски разрезать на одиночные клетки. Значит, $n = 14$ и $n = 21$ удовлетворяют условию. $\square$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

   Ответ: $3\sqrt{2}$.

   Решение. Воспользуемся неравенством $\sqrt{x+y} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ при $x, y \geqslant 0$. С учетом неравенства Коши мы получим

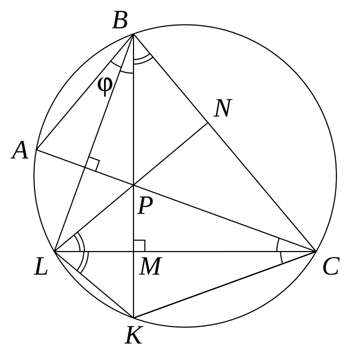
$$A \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^3 + b^2c^3}{b} + \frac{b^3 + c^2a^3}{c} + \frac{c^3 + a^2b^3}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^3}{b} + bc^3 + \frac{b^3}{c} + ca^3 + \frac{c^3}{a} + ab^3\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{a^3}{b} + ab^3\right) + \left(\frac{b^3}{c} + bc^3\right) + \left(\frac{c^3}{a} + ca^3\right)\right) \geqslant \sqrt{2}\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) = 3\sqrt{2}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.*

   Ответ: 90°.



Решение. Пусть $\angle ABL = \varphi$. Тогда $\angle KBL = \varphi$ и $\angle KBC = 2\varphi$. Поскольку $BK = BC$, мы получаем $\angle BKC = \angle BCK = 90^\circ - \varphi$. Кроме того,

$$\angle LCK + \angle BKC = \angle LBK + \angle BKC = \varphi + (90^\circ - \varphi) = 90^\circ,$$

то есть прямые BK и CL перпендикулярны. С другой стороны,

$$\angle BLC + \angle ACL = \angle BKC + \angle ABL = (90^\circ - \varphi) + \varphi = 90^\circ,$$

поэтому прямые BL и AC также перпендикулярны. Стало быть, точка P является ортоцентром треугольника BCL, откуда $LP \perp BC$. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?*

Ответ: 91.

Решение. Пусть a и b — простые делители x, $b = a + 6$. Пары последних цифр a и b могут быть $(1,7)$, $(3,9)$, $(7,3)$. Так как x не может оканчиваться на 7, возможен только последний случай. Тогда число $y = \dfrac{a+b}{2}$ оканчивается на 5 или на 0. Заметим, что число x нечетно и $x = y^2 - 9$. Значит, число y четно, то есть оно кратно 10, откуда

$$x \bmod 100 = (y^2 - 9) \bmod 100 = 100 - 9 = 91.$$

Таким образом, x оканчивается на 91 и принимает одно из следующих значений:

$$91,\ 9291,\ 939291,\ \ldots,\ 9998\ldots9291.$$

Первое из них нам подходит, поскольку $91 = 13 \cdot 7$. Покажем, что все остальные числа не подходят. Действительно, для них y^2 оканчивается на 300. Тогда число y представимо в виде $10z$, где z^2 оканчивается на 3, что невозможно. Таким образом, $x = 91$ — единственный ответ. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, …, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $3^{n+1} - 2^{n+2}$.

Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, …, 3^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n = 1$ доступны только монеты по 2 и 3 пиастра. Если $s \geqslant 3$, то найдется такое $r \in \{0, 1\}$, что $(s - 3r)$ четно. Тогда s имеет вид $3r + 2k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что число 2 будет 1-разложимым, а 1 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $1 = 3^2 - 2^3$.

Докажем, что для любого натурального n число $3^{n+1} - 2^{n+2}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n - 1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 3^{n+1} - 2^{n+2}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 3^n пиастров, то $m < 3$ и $3^{n+1} - m \cdot 3^n$ четно, откуда $m = 1$. Поэтому найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$s = 3^n + k_1 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^n.$$

Но тогда

$$3^n - 2^{n+1} = \frac{s - 3^n}{2} = k_1 \cdot 3^{n-1} + k_2 \cdot 3^{n-2} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^{n-1},$$

что невозможно, поскольку число $3^n - 2^{n+1}$ не является $(n-1)$-разложимым.

Докажем теперь, что если $s > 3^{n+1} - 2^{n+2}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n - 1$ утверждение справедливо. Выберем $r \in \{0, 1\}$ так, чтобы $s - r \cdot 3^n$ делилось на 2. Положим $N = \dfrac{s - r \cdot 3^n}{2}$. Тогда

$$N > \frac{3^{n+1} - 2^{n+2} - r \cdot 3^n}{2} = \frac{(3 - r)\,3^n - 2^{n+2}}{2} \geqslant \frac{2 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^{n+1}}{2} = 3^n - 2^{n+1},$$

и по индукционному предположению N будет $(n-1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$N = k_1 \cdot 3^{n-1} + k_2 \cdot 3^{n-2} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r \cdot 3^n + k_1 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$

Вариант 5

1. *Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?*

Ответ: любое нечетное число.

Решение. Докажем вначале, что в любой четверке идущих подряд чисел есть два четных и два нечетных числа. Действительно, пусть в некоторой четверке есть три числа одинаковой четности. Тогда среди них найдутся два числа, идущих через одно. Но число между ними будет иметь соседей одинаковой четности, что невозможно.

Разобьем диапазон со второй по 2021-ю позицию на блоки по 4 числа. По доказанному в каждом блоке четных и нечетных чисел поровну, а тогда и во всем диапазоне тоже. Но в промежутке $[1, 2021]$ нечетных чисел больше, чем четных. Значит, первым будет нечетное число. Покажем, что любое нечетное число может на первой позиции оказаться. Расположим все числа по схеме

$$\text{Н ЧЧНН ЧЧНН} \ldots \text{ЧЧНН},$$

где Ч обозначает четное число, а Н — нечетное. Такая расстановка удовлетворяет условию задачи. При этом нечетное число на первой позиции может быть произвольным. □

2. *При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

Ответ: 3.

Решение. Заметим, что $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + B$, где

$$B = 3\left(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2\right) \geqslant 18\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 18abc$$

(мы воспользовались неравенством Коши). Тогда

$$a^3 + b^3 + c^3 \leqslant (a+b+c)^3 - 24abc.$$

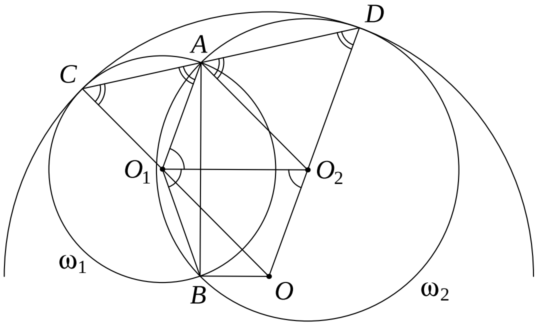
Положим $t = \dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$. По неравенству Коши $t \geqslant 27$, откуда

$$A \leqslant \frac{(a+b+c)^3 - 24abc}{(a+b+c)^3 - 26abc} = \frac{t-24}{t-26} = 1 + \frac{2}{t-26} \leqslant 3.$$

Равенство реализуется при $a = b = c$. □

3. *Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.*

Ответ: 90°.



Решение. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей ω_1 и ω_2. Треугольники COD, CO_1A, AO_2D равнобедренные. Поскольку точки C, A, D лежат на одной прямой, мы получаем

$$\angle O_1AC = \angle O_1CA = \angle OCD = \angle ODC.$$

Поэтому $O_1A \parallel OO_2$ и, аналогично, $O_2A \parallel OO_1$. Значит, OO_1AO_2 — параллелограмм, откуда

$$O_1A = O_2O \quad \text{и} \quad \angle AO_1O_2 = \angle O_1O_2O.$$

Так как треугольники AO_1B и AO_2B равнобедренные, отрезок O_1O_2 является серединным перпендикуляром к AB. Тогда

$$O_1B = O_1A = O_2O \quad \text{и} \quad \angle BO_1O_2 = \angle AO_1O_2 = \angle O_1O_2O.$$

Поэтому O_1O_2OB — равнобедренная трапеция, откуда $BO \parallel O_1O_2$ и, значит, $BO \perp AB$. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geqslant 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?*

Ответ: 7767.

Решение. Пусть y, z — простые делители x, $z = y + 6$. Заметим, что число $x + 9$ равно $\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$, то есть оно является точным квадратом. Запишем допустимые пары (y, z) в восьмеричной форме:

$$\big(\overline{\ldots a1}, \overline{\ldots a7}\big), \quad \big(\overline{\ldots a3}, \overline{\ldots (a+1)1}\big), \quad \big(\overline{\ldots a5}, \overline{\ldots (a+1)3}\big), \quad \big(\overline{\ldots a7}, \overline{\ldots (a+1)5}\big). \qquad (*)$$

В первом случае восьмеричная запись x оканчивается на 07, что невозможно, поскольку числа в прогрессии двузначные. Для третьей пары последней восьмеричной цифрой x будет 7, а предпоследней — $(8a + 5 + 1) \bmod 8 = 6$. Тогда с учетом условия $n \geqslant 2$ мы получаем $x = 7767_8$. Это нам подходит, так как

$$x + 9 = 7767_8 + 9 = 4096 = 64^2 \quad \text{и} \quad x = 61 \cdot 67.$$

Рассмотрим теперь вторую и четвертую пары в $(*)$. Последней восьмеричной цифрой x будет 3, а предпоследней — $(4a + 3) \bmod 8$, так как $\big(7(a + 1) + 5a + 4\big) \bmod 8 = (4a + 3) \bmod 8$. Нечетные a не подходят по условию $n \geqslant 2$, так как число $73_8 + 8$ уже трехзначное. Поэтому восьмеричная запись x оканчивается на 33. Значит, x может быть одним из чисел

$$4333_8,\ 534333_8,\ 63534333_8,\ 7363534333_8.$$

Второе и третье не подходят, поскольку они делятся на 3 (суммы цифр на четных и нечетных позициях различаются на 3 и 6 соответственно). Кроме того,

$$(4333_8 + 9) \bmod 3 = (6 - 7 + 9) \bmod 3 = 2 \quad \text{и} \quad (7363534333_8 + 9) \bmod 3 = (15 - 25 + 9) \bmod 3 = 2.$$

Поэтому числа $4333_8 + 9$ и $7363534333_8 + 9$ не являются точными квадратами, что невозможно. Таким образом, $x = 7767_8$ — единственный ответ. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 1$, $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $6n^2 + 4n - 5$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров. Для любого $r = 1, \ldots, 3n - 2$

обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $3n-1$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если $r \in \{1, \ldots, 3n-2\}$, $s \bmod (3n-1) = r$, то при $s \geqslant m_r$ сумму s банк выплатить сможет, а при $s < m_r$ — не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $3n-1$ пиастров. Предположим теперь, что $s < m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $3n-1$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $3n-1$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа $3k \bmod (3n-1)$ пробегают значения $\{1, \ldots, 3n-2\}$ при $k = 1, \ldots, 3n-2$.* Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $(3k-3k') \,\vdots\, (3n-1)$, то $(k-k') \,\vdots\, (3n-1)$. Так как $|k-k'| \leqslant 3n-2$, мы получаем $k = k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $3n-1$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1, \ldots, m_{3n-2}\} - (3n-1)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r \in \{1, \ldots, 3n-2\}$. Заметим, что

$$6n+1 = 2\,(3n-1)+3, \quad 6n+4 = 2\,(3n-1)+6 \quad \text{и} \quad 6n+7 = 2\,(3n-1)+9.$$

В силу 2) существует единственное число $k \in \{1, \ldots, 3n-2\}$, для которого $3k \bmod (3n-1) = r$. Поскольку остатки монет по модулю $3n-1$ принимают значения 3, 6 и 9, нам надо представить $3k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем девятки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $3k$, а затем при необходимости добавляем 3 или 6. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r = 3k + \left[\tfrac{k+2}{3}\right] \cdot 2\,(3n-1) \leqslant 3\,(3n-2) + 2n\,(3n-1) = 6n^2 + 7n - 6,$$

причем равенство реализуется при $k = 3n-2$. Значит, ответом в задаче будет

$$(6n^2+7n-6) - (3n-1) = 6n^2 + 4n - 5. \quad \square$$

Вариант 6

1. *Натуральные числа от 1 до 2023 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что любые три числа, расположенные через одно, дают разные остатки от деления на 3. Какое число может быть на первом месте?*

Ответ: любое число, дающее остаток 1 от деления на 3.

Решение. Разобьем диапазон от 1 до 2023 на группы чисел, дающих при делении на 3 остатки 0, 1 и 2. Первая и третья группа содержит по 674 чисел, а вторая — 675 чисел. В любой шестерке идущих подряд чисел есть ровно по два числа из каждой группы, поскольку на позициях $1, 3, 5$, а также на позициях $2, 4, 6$ находятся числа из разных групп. Разобьем диапазон со второй по 2023-ю позицию на блоки по 6 чисел. Каждый блок содержит одинаковое количество чисел из каждой группы, а тогда и весь диапазон тоже. Оставшееся число дает при делении на 3 остаток 1, и только оно может быть первым.

Покажем, что любое число из второй группы может оказаться на первой позиции. Допустимость конфигурации чисел зависит не от самих чисел, а только от их остатков при делении на 3. Расположим эти остатки по схеме

$$1\,220011\,220011\,\ldots\,220011\,.$$

Она удовлетворяет условию задачи. Значит, первым может оказаться любое число, дающее при делении на 3 остаток 1. $\square$

2. *При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4 - 80\,(abc)^{4/3}}.$$

Ответ: 3.

Решение. Заметим, что $(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + B$, где

$$B = 4\left(a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3\right) + 6\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + 12\left(abc^2 + bca^2 + cab^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant 24\sqrt[6]{(abc)^8} + 18\sqrt[3]{(abc)^4} + 36\sqrt[3]{(abc)^4} = 78\,(abc)^{4/3}$$

(мы воспользовались неравенством Коши). Тогда

$$a^4 + b^4 + c^4 \leqslant (a+b+c)^4 - 78\,(abc)^{4/3}.$$

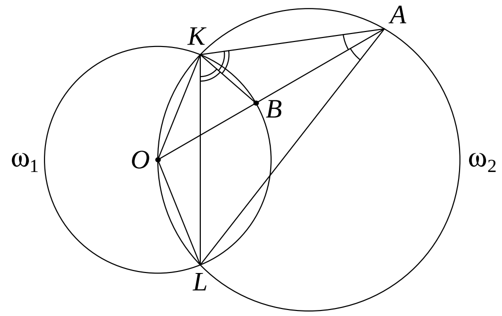
Положим $t = \dfrac{(a+b+c)^4}{(abc)^{4/3}}$. По неравенству Коши $t \geqslant 81$, откуда

$$A \leqslant \frac{(a+b+c)^4 - 78\,(abc)^{4/3}}{(a+b+c)^4 - 80\,(abc)^{4/3}} = \frac{t-78}{t-80} = 1 + \frac{2}{t-80} \leqslant 3.$$

Равенство реализуется при $a = b = c$. $\square$

3. *Окружность ω_1 с центром O пересекается в точках K и L с окружностью ω_2, проходящей через точку O. Через точку O проведена прямая, вторично пересекающая окружность ω_2 в точке A. Отрезок OA пересекает окружность ω_1 в точке B. Найдите отношение расстояний от точки B до прямых AL и KL.*

Ответ: $1 : 1$.



Решение. Заметим, что $\angle OAK = \angle OAL$ как углы, опирающиеся на равные хорды OK и OL. Значит, AB — биссектриса угла LAK. Кроме того, $\angle AKL = \angle AOL$ как углы, опирающиеся на дугу AL. Тогда

$$\angle BKL = \tfrac{1}{2}\angle BOL = \tfrac{1}{2}\angle AKL.$$

Поэтому KB — биссектриса угла AKL. Таким образом, точка B — центр вписанной окружности треугольника AKL. Значит, она равноудалена от прямых AL и KL. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geqslant 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью 8, причем первое число не содержит цифру 2. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 2. Что написано на доске?*

Ответ: 3343.

Решение. Пусть y, z — простые делители x, $z = y + 2$. Заметим, что число $x + 1$ равно $\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$, то есть оно является точным квадратом. Запишем возможные пары (y, z) в восьмеричной форме:

$$\left(\overline{\ldots a1}, \overline{\ldots a3}\right), \quad \left(\overline{\ldots a3}, \overline{\ldots a5}\right), \quad \left(\overline{\ldots a5}, \overline{\ldots a7}\right), \quad \left(\overline{\ldots a7}, \overline{\ldots (a+1)1}\right). \qquad (*)$$

Для первой и третьей пар последней восьмеричной цифрой x будет 3, а предпоследней — $4a \bmod 8$ или $(12a + 4) \bmod 8$. Эта цифра ненулевая, так как числа в прогрессии двузначные. Поэтому в обоих случаях она равна 4, а восьмеричная запись x оканчивается на 43. С учетом условия x может принимать значения 3343_8 или 13233343_8. Первое число нам подходит, поскольку

$$x + 1 = 3343_8 + 1 = 1764 = 42^2 \quad \text{и} \quad x = 41 \cdot 43.$$

Пусть $x = 13233343_8$. Тогда

$$(x + 1) \bmod 3 = (12 - 10 + 1) \bmod 3 = 0 \quad \text{и} \quad (x + 1) \bmod 9 = (12 - 10 + 1) \bmod 9 = 3.$$

Значит, число $x + 1$ делится на 3 и не делится на 9, а потому оно не является точным квадратом.

Рассмотрим теперь вторую и четвертую пары в $(*)$. Последней восьмеричной цифрой x будет 7, а предпоследней — 1 или 7. Первого случая не может быть при $n \geqslant 2$, поскольку число $17_8 - 8$ не является двузначным. Значит, с учетом условия возможны следующие значения x:

$$6777_8, \ 576777_8, \ 47576777_8, \ 3747576777_8, \ 17273747576777_8.$$

Заметим, что $x + 1 = \ldots 7000_8 = \ldots 7_8 \cdot 2^9$. Тогда число $x + 1$ делится на 2^9 и не делится на 2^{10}, а потому оно не является точным квадратом. Таким образом, $x = 3343_8$ — единственный ответ. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 2$, $6n - 1$, $6n + 2$ и $6n + 5$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $6n^2-4n-3$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n-1$, $6n+2$ и $6n+5$ пиастров. Для любого $r=1,\dots,3n-3$ обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $3n-2$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если* $r\in\{1,\dots,3n-3\}$, $s \bmod (3n-2)=r$, *то при* $s\geqslant m_r$ *сумму* s *банк выплатить сможет, а при* $s<m_r$ *— не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $3n-2$ пиастров. Предположим теперь, что $s<m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $3n-2$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $3n-2$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа* $3k \bmod (3n-2)$ *пробегают значения* $\{1,\dots,3n-3\}$ *при* $k=1,\dots,3n-3$. Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $(3k-3k') \,\vdots\, (3n-2)$, то $(k-k') \,\vdots\, (3n-2)$. Так как $|k-k'|\leqslant 3n-3$, мы получаем $k=k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $3n-2$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1,\dots,m_{3n-3}\}-(3n-2)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r\in\{1,\dots,3n-3\}$. Заметим, что

$$6n-1=2\,(3n-2)+3,\quad 6n+2=2\,(3n-2)+6\quad\text{и}\quad 6n+5=2\,(3n-2)+9.$$

В силу 2) существует единственное число $k\in\{1,\dots,3n-3\}$, для которого $3k \bmod (3n-2)=r$. Поскольку остатки монет по модулю $3n-2$ принимают значения 3, 6 и 9, нам надо представить $3k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем девятки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $3k$, а затем при необходимости добавляем 3 или 6. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r=3k+\left[\tfrac{k+2}{3}\right]\cdot 2\,(3n-2)\leqslant 3\,(3n-3)+2\,(n-1)(3n-2)=6n^2-n-5,$$

причем равенство реализуется при $k=3n-3$. Значит, ответом в задаче будет

$$(6n^2-n-5)-(3n-2)=6n^2-4n-3.\quad\square$$

Вариант 7

1. *Можно ли в таблице 35×35 расставить различные целые числа так, чтобы значения в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 18?*

Ответ: нет.

Решение. Пусть m — наименьшее число в таблице. Перемещаясь каждый раз на одну клетку в горизонтальном или вертикальном направлении, мы сможем попасть в любую клетку таблицы за не более чем $34 \cdot 2 = 68$ шагов. По условию на каждом шаге значение в клетке может увеличиться не более чем на 18. Поэтому все числа таблицы лежат в промежутке $[m, m + 68 \cdot 18]$. Этот диапазон содержит $68 \cdot 18 + 1 = 1225$ чисел, то есть ровно столько, сколько клеток в таблице. Значит, таблица заполнена в некотором порядке числами от m до $m + 68 \cdot 18$. Заметим, что минимальное и максимальное числа располагаются в противоположных углах таблицы. При перемещении от минимального числа к максимальному по маршруту, состоящему из 68 шагов, нам нужно каждый раз увеличивать значение ровно на 18. Но таких маршрутов много. Например, мы можем пройти от m к $m + 68 \cdot 18$ через любую из двух клеток, граничащих с m. Значит, в этих клетках стоят одинаковые числа. $\square$

2. *При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3 - 2abc}.$$

Ответ: 6.

Решение. По неравенству Коши

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = \tfrac{1}{3}\left((a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3+6abc)\right) \leqslant \tfrac{1}{3}\left((a+b+c)^3 - 9abc\right).$$

Заметим, что

$$a^3 + b^3 + c^3 - 2abc \geqslant \tfrac{1}{9}(a+b+c)^3 - 2abc = \tfrac{1}{9}\left((a+b+c)^3 - 18abc\right).$$

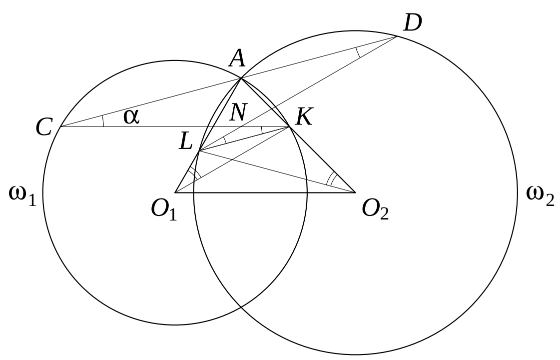
Положим $t = \dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$. По неравенству Коши $t \geqslant 27$, откуда

$$A \leqslant \frac{3\left((a+b+c)^3 - 9abc\right)}{(a+b+c)^3 - 18abc} = \frac{3(t-9)}{t-18} = 3\left(1 + \frac{9}{t-18}\right) \leqslant 6.$$

Равенство реализуется при $a = b = c$. $\square$

3. *Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке A. Отрезок O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке K, а отрезок O_1A вторично пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку A параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Отрезки CK и DL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1A и O_2N.*

Ответ: $90°$.



Решение. Треугольники O_1AK и O_2AL равнобедренные и имеют общий угол при основании. Значит, их углы при вершине равны. Обозначим общее значение этих углов через 2α. Поскольку вписанный угол в два раза меньше соответствующего ему центрального угла, справедливо равенство $\angle ADL = \angle ACK = \alpha$. Так как $KL \parallel CD$, мы получаем также $\angle KLN = \angle LKN = \alpha$. Тогда

$$\angle LNK = 180^\circ - 2\angle KLN = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle AO_2L = 180^\circ - \angle KO_2L.$$

Поэтому четырехугольник $LNKO_2$ вписанный, откуда

$$\angle KO_2N = \angle KLN = \alpha = \tfrac{1}{2}\angle AO_2L.$$

Значит, прямая O_2N — биссектриса угла при вершине в равнобедренном треугольнике AO_2L, а потому и высота. Таким образом, прямые O_2N и O_1A перпендикулярны. $\square$

4. *В файле записано подряд 2021 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?*

Ответ: нет.

Решение. Договоримся писать пятеричные числа в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Пусть x — считанное число, u и v — его простые делители, $v = u+2$. Заметим, что число $x+1$ четно и равно $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, то есть является точным квадратом. В частности, $x+1$ кратно 4. Будем писать x, u, v в пятеричной системе. Числа u и v оканчиваются не на 0, иначе одно из них равно 5 и $x \leqslant 35$. Поэтому допустимые пары последних цифр u и v — $(1,3)$, $(2,4)$, $(4,1)$. Значит, x оканчивается на 3 или 4. Рассмотрим два случая.

1) *x оканчивается на 4.* Тогда $x+1$ оканчивается на 0, откуда $(x+1) \,\vdots\, 25$. Значит, последними цифрами $x+1$ будут (00), а x оканчивается на (44). Поэтому

$$x = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4344) \quad \text{и} \quad x+1 = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4400).$$

В запись $x+1$ входит $\frac{2021-3}{2} = 1009$ троек. Тогда $(x+1) \bmod 4 = 1009 \cdot 3 \bmod 4 \neq 0$, что невозможно.

2) *x оканчивается на 3.* Пусть a — предпоследняя цифра x. Тогда в пятеричную запись x цифра a входит 2021 раз, двойка и тройка — 1010 и 1011 раз соответственно. Поэтому

$$0 = (x+1) \bmod 4 = (2021a + 1010 \cdot 5 + 3 + 1) \bmod 4 = (a+2) \bmod 4,$$

откуда $a = 2$ и $x = (23\,2223\,\ldots\,2223)$. По признаку делимости на 6 в пятеричной системе

$$x \bmod 6 = \big(1010 \cdot (3 - 2 + 2 - 2) + 3 - 2\big) \bmod 6 = 1011 \bmod 6 = 3.$$

Таким образом, $x \,\vdots\, 3$, что невозможно. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 5^n, $5^{n-1} \cdot 7$, $5^{n-2} \cdot 7^2$, $5^{n-3} \cdot 7^3$, …, $5 \cdot 7^{n-1}$, 7^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1}$.

Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 5^n, $5^{n-1} \cdot 7$, …, 7^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n = 1$ доступны только монеты по 5 и 7 пиастров. Если $s \geqslant 28$, то найдется такое $r \in \{0,1,2,3,4\}$, что $(s - 7r) \,\vdots\, 5$. Тогда s имеет вид $7r + 5k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что числа

$27, 26, 25, 24$ будут 1-разложимыми, а 23 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $23 = 2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 5^2$.

Докажем, что для любого натурального n число $2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n-1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 7^n пиастров, то $m < 14$ и $(2 \cdot 7^{n+1} - m \cdot 7^n) \mathrel{\vdots} 5$, откуда $m = 4$ или $m = 9$. Найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$s = m \cdot 7^n + k_1 \cdot 7^{n-1} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^n.$$

Тогда

$$k_1 \cdot 7^{n-1} + k_2 \cdot 7^{n-2} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^{n-1} = \frac{s - m \cdot 7^n}{5}.$$

Правая часть равна $2 \cdot 7^n - 3 \cdot 5^n$ или $7^n - 3 \cdot 5^n$. Но оба этих числа $(n-1)$-неразложимы: первое — по индукционному предположению, второе — поскольку из него можно получить первое добавлением $7 \cdot 7^{n-1}$. Таким образом, мы получили противоречие.

Докажем теперь, что если $s > 2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n-1$ утверждение справедливо. Выберем $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ так, чтобы $s - r \cdot 7^n$ делилось на 5. Положим $N = \dfrac{s - r \cdot 7^n}{5}$. Тогда

$$N > \frac{2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1} - r \cdot 7^n}{5} = \frac{(14 - r)\, 7^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{5} \geqslant \frac{10 \cdot 7^n - 15 \cdot 5^n}{5} = 2 \cdot 7^n - 3 \cdot 5^n,$$

и по индукционному предположению N будет $(n-1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$N = k_1 \cdot 7^{n-1} + k_2 \cdot 7^{n-2} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r \cdot 7^n + k_1 \cdot 7^{n-1} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$

Вариант 8

1. *Можно ли в таблице 25×41 расставить различные целые числа так, чтобы числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 16?*

Ответ: нет.

Решение. Пусть m — наименьшее число в таблице. Перемещаясь каждый раз на одну клетку в горизонтальном или вертикальном направлении, мы сможем попасть в любую клетку таблицы за не более чем $24+40=64$ шагов. По условию на каждом шаге значение в клетке может увеличиться не более чем на 16. Поэтому все числа таблицы лежат в промежутке $[m, m+64\cdot 16]$. Этот диапазон содержит $64\cdot 16+1=1025$ чисел, то есть ровно столько, сколько клеток в таблице. Значит, таблица заполнена в некотором порядке числами от m до $m+64\cdot 16$. Заметим, что минимальное и максимальное числа располагаются в противоположных углах таблицы. При перемещении от минимального числа к максимальному по маршруту, состоящему из 64 шагов, нам нужно каждый раз увеличивать значение ровно на 16. Но таких маршрутов много. Например, мы можем пройти от m к $m+64\cdot 16$ через любую из двух клеток, граничащих с m. Значит, в этих клетках стоят одинаковые числа. $\square$

2. *При $a,b,c>0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A=\frac{a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)}{(a+b+c)^4-79\,(abc)^{4/3}}.$$

Ответ: 3.

Решение. По неравенству Коши

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)=(a+b+c)\big(a^3+b^3+c^3\big)-\big(a^4+b^4+c^4\big)\leqslant(a+b+c)\big(a^3+b^3+c^3\big)-3\,(abc)^{4/3}.$$

Заметим, что $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+B$, где

$$B=3\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\right)\geqslant 18\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=18abc$$

(мы воспользовались неравенством Коши). Тогда $a^3+b^3+c^3\leqslant(a+b+c)^3-24abc$ и

$$(a+b+c)\big(a^3+b^3+c^3\big)-3\,(abc)^{4/3}\leqslant(a+b+c)^4-24abc\,(a+b+c)-3\,(abc)^{4/3}\leqslant(a+b+c)^4-75\,(abc)^{4/3}.$$

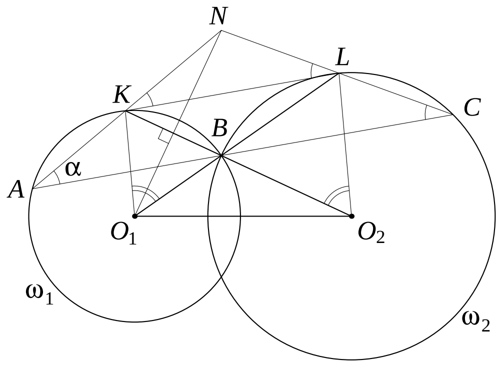
Положим $t=\dfrac{(a+b+c)^4}{(abc)^{4/3}}$. По неравенству Коши $t\geqslant 81$, откуда

$$A\leqslant\frac{(a+b+c)^4-75\,(abc)^{4/3}}{(a+b+c)^4-79\,(abc)^{4/3}}=\frac{t-75}{t-79}=1+\frac{4}{t-79}\leqslant 3.$$

Равенство реализуется при $a=b=c$. $\square$

3. *Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке B. Продолжение отрезка O_2B за точку B пересекает окружность ω_1 в точке K, а продолжение отрезка O_1B за точку B пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку B параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках A и C соответственно. Лучи AK и CL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1N и O_2B.*

Ответ: 90°.



Решение. Так как $\angle O_1BK = \angle O_2BL$, равнобедренные треугольники O_1BK и O_2BL подобны. Значит, их углы при вершине равны. Обозначим общее значение этих углов через 2α. Поскольку вписанный угол в два раза меньше соответствующего ему центрального угла, справедливо равенство $\angle BCL = \angle BAK = \alpha$. Так как $KL \parallel AC$, мы получаем также $\angle KLN = \angle LKN = \alpha$. Тогда

$$\angle LNK = 180^\circ - 2\angle LKN = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle BO_1K = 180^\circ - \angle LO_1K.$$

Поэтому четырехугольник $LNKO_1$ вписанный, откуда

$$\angle LO_1N = \angle LKN = \alpha = \tfrac{1}{2}\angle BO_1K.$$

Значит, прямая O_1N — биссектриса угла при вершине в равнобедренном треугольнике BO_1K, а потому и высота. Таким образом, прямые O_1N и O_2B перпендикулярны. $\square$

4. *В файле записано подряд 2023 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?*

Ответ: нет.

Решение. Договоримся писать пятеричные числа в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Пусть x — считанное число, u и v — его простые делители, $v = u+2$. Заметим, что число $x+1$ четно и равно $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, то есть является точным квадратом. В частности, $x+1$ кратно 4. Будем писать x, u, v в пятеричной системе. Числа u и v оканчиваются не на 0, иначе одно из них равно 5 и $x \leqslant 35$. Поэтому допустимые пары последних цифр u и v — $(1,3)$, $(2,4)$, $(4,1)$. Значит, x оканчивается на 3 или 4. Рассмотрим два случая.

1) *x оканчивается на 4.* Тогда $x+1$ оканчивается на 0, откуда $(x+1) \,\vdots\, 25$. Значит, последними цифрами $x+1$ будут (00), а x оканчивается на (44). Поэтому

$$x = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4344) \quad \text{и} \quad x+1 = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4400).$$

В запись $x+1$ входит $\frac{2023-3}{2} = 1010$ троек. Тогда $(x+1) \bmod 4 = 1010 \cdot 3 \bmod 4 \neq 0$, что невозможно.

2) *x оканчивается на 3.* Пусть a — предпоследняя цифра x. Тогда в пятеричную запись x цифра a входит 2023 раза, двойка и тройка — 1011 и 1012 раз соответственно. Поэтому

$$0 = (x+1) \bmod 4 = (2023a + 1011 \cdot 5 + 3 + 1) \bmod 4 = (3a+3) \bmod 4,$$

откуда $a = 3$ и $x = (33\,3233\,\ldots\,3233)$. По признаку делимости на 6 в пятеричной системе

$$x \bmod 6 = 1011 \cdot (3 - 3 + 2 - 3) \bmod 6 = (-1011) \bmod 6 = 3.$$

Таким образом, $x \vdots 3$, что невозможно. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1}\cdot 4$, $3^{n-2}\cdot 4^2$, $3^{n-3}\cdot 4^3$, … , $3\cdot 4^{n-1}$, 4^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $2\cdot 4^{n+1}-3^{n+2}$.

Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 3^n, $3^{n-1}\cdot 4$, … , 4^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n=1$ доступны только монеты по 3 и 4 пиастра. Если $s \geqslant 8$, то найдется такое $r \in \{0,1,2\}$, что $(s-4r) \vdots 5$. Тогда s имеет вид $4r+3k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что числа 7 и 6 будут 1-разложимыми, а 5 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $5 = 2\cdot 4^2 - 3^3$.

Докажем, что для любого натурального n число $2\cdot 4^{n+1}-3^{n+2}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n-1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 2\cdot 4^{n+1}-3^{n+2}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 4^n пиастров, то $m<8$ и $(2\cdot 4^{n+1}-m\cdot 4^n) \vdots 3$, откуда $m=2$ или $m=5$. Найдутся неотрицательные целые числа $k_1,\ldots,k_n$, для которых

$$s = m\cdot 4^n + k_1\cdot 4^{n-1}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^n.$$

Тогда

$$k_1\cdot 4^{n-1} + k_2\cdot 4^{n-2}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^{n-1} = \frac{s-m\cdot 4^n}{3}.$$

Правая часть равна $2\cdot 4^n - 3^{n+1}$ или 4^n-3^{n+1}. Но оба этих числа $(n-1)$-неразложимы: первое — по индукционному предположению, второе — поскольку из него можно получить первое добавлением $4\cdot 4^{n-1}$. Таким образом, мы получили противоречие.

Докажем теперь, что если $s > 2\cdot 4^{n+1}-3^{n+2}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n-1$ утверждение справедливо. Выберем $r\in\{0,1,2\}$ так, чтобы $s-r\cdot 4^n$ делилось на 3. Положим $N = \dfrac{s-r\cdot 4^n}{3}$. Тогда

$$N > \frac{2\cdot 4^{n+1}-3^{n+2}-r\cdot 4^n}{3} = \frac{(8-r)\,4^n-3^{n+2}}{3} \geqslant \frac{6\cdot 4^n - 3\cdot 3^{n+1}}{3} = 2\cdot 4^n - 3^{n+1},$$

и по индукционному предположению N будет $(n-1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1,\ldots,k_n$, для которых

$$N = k_1\cdot 4^{n-1} + k_2\cdot 4^{n-2}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r\cdot 4^n + k_1\cdot 4^{n-1}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$