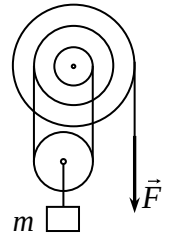


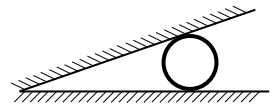
Задания, решения и критерии оценки работ заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников
9 класс, 2024-2025 учебный год

1. Два стакана, содержащих разное количество воды, уравновешены на неравноплечем рычаге. Расстояние между центрами стаканов равно l . Если из одного стакана в другой перелить воду массой Δm , для восстановления равновесия рычага его опору нужно передвинуть на расстояние Δl . Найти массу воды в обоих стаканах. Массой стаканов и рычага пренебречь.

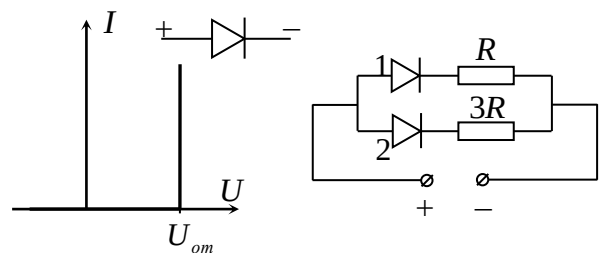
2. Дифференциальный блок состоит из трех скрепленных блоков радиусов R , $2R$ и $3R$, насаженных на одну и ту же ось. На меньший и средний блоки в разных направлениях намотана одна и та же веревка, которая охватывает еще один блок, к оси которого прикреплен груз (см. рисунок). На самый большой блок намотана веревка, с помощью которой поднимают груз. Какой выигрыш в силе обеспечивает такой блок, т.е. чему равно отношение силы F , с помощью которой можно медленно поднимать груз массой m , к силе тяжести груза? Веревку какой длины нужно вытянуть, чтобы поднять груз на высоту h ? Массой веревки и блока, а также трением в оси блока пренебречь.



3. Для обеспечения малых перемещений в тех или иных устройствах используют тепловое расширение. В одной из таких конструкций в зазор между двумя стенками, образующими малый и не меняющийся угол, вставляют стальное колечко. При нагревании размеры колечка увеличиваются благодаря тепловому расширению, и оно сдвигается. На каком расстоянии от вершины угла будет находиться центр колечка при повышении его температуры на $\Delta T = 10^\circ \text{C}$, если при начальной температуре он находился на расстоянии $l_0 = 10$ см от вершины? Коэффициент линейного теплового расширения стали $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

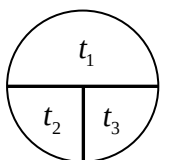


4. Вольтамперная характеристика диода (зависимость тока, текущего через диод, от приложенного к нему напряжения) представлена на рисунке (положительным считается напряжение, соответствующее приложению «плюса» и «минуса» как на вставке на рисунке). Два диода 1 и 2 с напряжением открытия



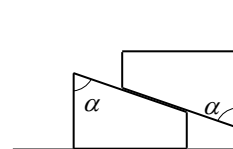
$U_{om} = U_0$ и $U_{om} = 2U_0$ соединили последовательно с резисторами R и $3R$ соответственно, затем эти два участка соединили параллельно и приложили к ним положительное напряжение $4U_0$ (см. рисунок). Найти ток через источник.

5. Вертикальный цилиндрический сосуд разделен не пропускающими воду вертикальными теплопроводящими перегородками на три части, одна из которых составляет половину сосуда, а две другие – по одной четверти сосуда (см. рисунок, вид сверху). В по-



лучившиеся отсеки налита вода при разной температуре - $t_1 = 80^\circ \text{ C}$, $t_2 = 20^\circ \text{ C}$, $t_3 = 40^\circ \text{ C}$. Известно, что через некоторое время горячая вода остыла на $\Delta t = 1^\circ$. Как изменилась температура воды в других отсеках? Перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, сосуд теплоизолирован. **Указание.** Поток тепла между телами пропорционален площади их контакта и разности температур.

6. Два одинаковых призмы, в сечении которых лежит прямоугольная трапеция с острым углом α , лежат друг на друге на горизонтальном полу около вертикальной стены так, как показано на рисунке. Коэффициенты трения μ призм об пол и стену одинаковы, наклонные грани призм абсолютно гладкие. Каким должен быть коэффициент трения μ , чтобы призмы находились в покое?



Решения и критерии оценивания

1. Пусть масса воды в одном стакане равна m_1 , во втором m_2 . Тогда условие равновесия рычага в первом случае дает

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2$$

где l_1 и l_2 - плечи стаканов. Пусть теперь из стакана с массой воды m_1 в стакан с массой воды m_2 переливают массу воды Δm . Тогда стакан с водой массой m_2 перевесит, и для восстановления равновесия рычага его опору нужно передвинуть в направлении именно этого стакана. Следовательно, плечо силы тяжести этого стакана станет равным $l_2 - \Delta l$, второго стакана - $l_1 + \Delta l$. В результате условие равновесия рычага во втором случае дает

$$(m_1 - \Delta m)(l_1 + \Delta l) = (m_2 + \Delta m)(l_2 - \Delta l)$$

Из этого уравнения находим суммарную массу воды в стаканах

$$m_1 + m_2 = \frac{l_1 + l_2}{\Delta l} \Delta m = \frac{l}{\Delta l} \Delta m$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное использование условия равновесия рычага - 1 балл
2. Правильное условие равновесия рычага в первом случае – 1 балл
3. Правильно понято, в каком направлении нужно сдвигать опору после переливания воды – 1 балл
4. Правильное условие равновесия рычага во втором случае – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Чтобы груз медленно поднимался, сила натяжения веревки, охватывающей подвижный блок, должна быть равна половине силы тяжести груза. Поэтому на самый маленький и средний блоки дифференциального блока действуют силы натяжения $mg/2$ и $mg/2$. Это значит, что чтобы дифференциальный блок вращался по часовой стрелке и поднимал груз, момент силы F относительно центра дифференциального блока должен быть равен разности моментов сил натяжения, действующих на средний и малый блоки

$$F 3R = \frac{mg}{2} 2R - \frac{mg}{2} R$$

Или

$$F = \frac{1}{6} mg$$

Таким образом, предлагаемая конструкция дает шестикратный выигрыш в силе.

Найдем теперь, сколько мы проиграем в расстоянии. Пусть сила F вытянула кусочек веревки длиной Δl . Тогда дифференциальный блок повернется на угол

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{3R}$$

Это значит, что с меньшего блока смотается кусочек веревки длиной $R\Delta\varphi$, на средний блок наматывается кусочек веревки длиной $2R\Delta\varphi$. Т.е. длина веревки, охватывающей подвижный блок, уменьшится на величину $2R\Delta\varphi - R\Delta\varphi = R\Delta\varphi$, и, следовательно, подвижный блок поднимется на величину

$$\Delta h = \frac{R\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta l}{6}$$

Т.е. блок дает шестикратный проигрыш в расстоянии, как и должно быть в соответствии с золотым правилом механики. Это значит, что для подъема груза на высоту h нужно вытянуть кусок веревки длиной $l = 6h$.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная сила натяжения нижней нити - 1 балл
2. Правильное условие медленного вращения дифференциального блока по часовой стрелке – 1 балл
3. Правильно найден выигрыш в силе, который дает рассмотренный дифференциальный блок – 1 балл
4. Правильное рассмотрение наматываемых и освобождаемых участков веревки при вращении блока по часовой стрелке – 1 балл
5. Правильный ответ для длины веревки, которую необходимо вытянуть для подъема груза на высоту h – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Комментарий: Если участник написал, что поскольку блоки невесомы, нить нерастяжима, и нет трения, то во сколько раз выигрышаем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии (золотое правило механики), и на основе этого написал ответ, пункты 4 и 5 следует засчитать.

3. Пусть угол между стенками равен φ , начальный радиус колечка - R_0 , а его длина – $l_0 = 2\pi R_0$.

Тогда центр колечка находился на расстоянии

$$x_0 = \frac{R_0}{\sin(\varphi/2)}$$

от вершины угла (здесь φ - величина угла). При повышении температуры любого предмета (и, в частности, нашего колечка) на ΔT его длина увеличивается по закону

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta T)$$

где α - коэффициент линейного теплового расширения материала предмета. Если разделить правую и левую часть на 2π , то получится аналогичное соотношение для радиуса колечка

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$$

А если теперь разделить эту формулу на $\sin(\varphi/2)$, получим аналогичное соотношение для изменения расстояния от центра колечка до вершины угла при повышении температуры

$$x = x_0(1 + \alpha\Delta T)$$

Из этой формулы находим перемещение центра колечка относительно вершины угла при повышении температуры

$$\Delta x = x - x_0 = \alpha x_0 \Delta T = 0,011 \text{ мм}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Использование правильной формулы для увеличения длины колечка - 1 балл**
- 2. Обосновано использование аналогичной формулы для радиуса колечка – 1 балл**
- 3. Обосновано использование аналогичной формулы для расстояния от центра колечка до вершины угла – 1 балл**
- 4. Правильный ответ (формула) – 1 балл**
- 5. Правильный ответ (число) – 1 балл**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Вольтамперная характеристика идеального диода показывает, что если к диоду приложить положительное напряжение, превышающее напряжение открытия диода, напряжение на диоде будет равно напряжению открытия. А куда же «денется» избыток напряжения? А какой ток будет течь через диод? Ток через диод будет таким, чтобы напряжение на остальных элементах цепи, включенных последовательно с диодом, было равно избытку приложенного к цепи напряжения над напряжением открытия диода. Давайте используем эти принципы для расчета данной цепи.

Так как напряжение, приложенное к цепи, больше напряжения открытия диодов, оба диода будут открыты. При этом напряжение на резисторе, включенном последовательно с диодом с напряжением открытия U_0 , будет равно $3U_0$, а напряжение на резисторе, включенном последовательно с диодом с напряжением открытия $2U_0$, будет равно $2U_0$. Поэтому из закона Ома для участка цепи заключаем, что через первый резистор будет течь электрический ток

$$I_1 = \frac{3U_0}{R},$$

а через второй резистор – ток

$$I_2 = \frac{2U_0}{3R},$$

Ну а поскольку эти элементы цепи соединены параллельно, через источник будет течь электрический ток I , равный их сумме

$$I = I_1 + I_2 = \frac{11U_0}{3R}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Понимание принципов использования вольтамперной характеристики любого элемента электрической цепи – 1 балл**
- 2. Правильное использование вольтамперной характеристики идеального диода: при приложении положительного напряжения, большего напряжения открытия, диод открывается, напряжение на нем равно напряжению открытия, а «избыток» напряжения будет приложен к тем элементам цепи, которые подключены последовательно с диодом - 1 балл**
- 3. Правильно найден ток, текущий через первый диод – 1 балл**
- 4. Правильно найден ток, текущий через второй диод – 1 балл**
- 5. Правильный ответ – 1 балл.**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Пользуясь указанием к условию задачи, для потока тепла Q от любого более горячего отсека к любому более холодному можно написать

$$Q = k(t_x - t_y)$$

где k - коэффициент пропорциональности, который одинаков для всех перегородок, поскольку у них одинаковые площади, толшины, и они изготовлены из одного и того же материала, t_x и t_y температуры более горячей и более холодной воды. Далее, поскольку изменение температур воды во всех отсеках гораздо меньше разности температур воды в отсеках, можно считать, что поток в рассматриваемых процессах практически не изменяется. Поэтому можно записать уравнение теплового баланса для остывания воды в горячем отсеке в следующем виде

$$c2m\Delta t = k(t_1 - t_2) + k(t_1 - t_3) \quad (*)$$

(c - удельная теплоемкость воды, $2m$ - масса воды в самом горячем отсеке). Уравнение теплового баланса для нагревания воды в самом холодном отсеке дает

$$cm\Delta t_x = k(t_1 - t_2) + k(t_3 - t_2) \quad (**)$$

где $\Delta t_x > 0$ - увеличение температуры воды в отсеке с самой холодной водой. Здесь учтено, что масса воды в отсеке с холодной водой вдвое меньше массы воды в отсеке с горячей водой.

Отсек с водой промежуточной температуры будет получать тепло от отсека с горячей водой и отдавать тепло отсеку с холодной водой. Но поскольку (как это следует из условия)

$$t_1 - t_3 > t_3 - t_2$$

то отсек со средней температурой больше получает, чем отдает тепла, и, следовательно, вода в нем нагреется. В результате получаем следующее уравнение теплового баланса для нагрева воды в этом отсеке

$$cm\Delta t_{cp} = k(t_1 - t_3) - k(t_3 - t_2) \quad (***)$$

где $\Delta t_{cp} > 0$ - увеличение температуры воды со средней температурой. Выражая коэффициент k из формулы (*) и подставляя его в формулы (**) и (***), получим

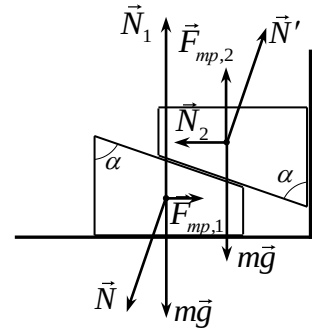
$$\Delta t_x = \frac{2(t_1 + t_3 - 2t_2)}{2t_1 - t_2 - t_3} \Delta t = 1,6^\circ\text{C}, \quad \Delta t_{cp} = \frac{2(t_1 + t_2 - 2t_3)}{2t_1 - t_2 - t_3} \Delta t = 0,4^\circ\text{C}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильное использование формул для потоков тепла между отсеками – 1 балл**
- 2. Сделано обоснованное утверждение, что в формулах для потоков тепла между отсеками один и тот же коэффициент пропорциональности - 1 балл**
- 3. Правильные уравнения теплового баланса для всех трех отсеков – 1 балл**
- 4. Правильный ответ для увеличения температуры в отсеке с холодной водой (формула и число) – 1 балл**
- 5. Правильный ответ для увеличения температуры в отсеке с водой средней температуры (формула и число) – 1 балл**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Силы, действующие на призмы, показаны на рисунке. Это – силы тяжести призм $m\vec{g}$, силы реакции пола $\vec{N}_1$, вертикальной стенки $\vec{N}_2$ и между призмами, действующие на нижнюю $\vec{N}$ и верхнюю $\vec{N}'$ призмы. А также силы трения, действующие на нижнюю $\vec{F}_{mp,1}$ и верхнюю $\vec{F}_{mp,2}$ призмы. В момент начала скольжения силы трения равны тем силам, которые «пытаются» вывести тела из положения равновесия и равны своим максимальным значениям. Поэтому



$$F_{mp,1} = N \cos \alpha$$

$$F_{mp,2} = mg - N \sin \alpha$$

А с другой стороны

$$F_{mp,1} = \mu N_1 = \mu (mg + N \sin \alpha)$$

$$F_{mp,2} = \mu N_2 = \mu N \cos \alpha$$

В результате получаем систему уравнений

$$N \cos \alpha = \mu (mg + N \sin \alpha)$$

$$mg - N \sin \alpha = \mu N \cos \alpha$$

Из которой получим

$$\mu mg = N (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

$$mg = N (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Деля эти уравнения друг на друга, получим квадратное уравнение относительно коэффициента трения, при котором начнется скольжение

$$\mu^2 \cos \alpha + 2\mu \sin \alpha - \cos \alpha = 0$$

Решая это уравнение, получим для предельного коэффициента трения, при котором начнется скольжение

$$\mu = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Таким образом, призмы будут в покое, если коэффициент трения между призмой и полом и призмой и стеной будет удовлетворять неравенству

$$\mu < \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильно расставлены силы, действующие на призмы – 1 балл
2. Использовано правильное условие начала движения – силы трения равны максимальным значениям μN - 1 балл
3. Правильные соотношения для сил в момент начала скольжения – 1 балл

4. Правильное квадратное уравнение для предельного коэффициента трения, при котором начнётся скольжение – 1 балла

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов.

Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.