

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

Ответ: (6666, 202, 33).

Решение. Заметим, что число A представляется в виде $\overline{xxxx} = x \cdot 11 \cdot 101$. В произведении ABC множители 11 и 101 встречаются четное число раз. Таким образом, трехзначное число B должно быть кратно 101, а двузначное число C — кратно 11. В силу условий $B = 202$, $C = 33$. Следовательно, $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot x$. Отсюда $x = 6$.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

Ответ: 1.

Решение. Из условия следует, что выполняется равенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}.$$

Преобразуя, получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} \right) + 2 \left(\frac{1}{(x-1)(y+1)} - \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{y(y+1)} + 2 \cdot \frac{y-x+1}{xy(x-1)(y+1)} \Leftrightarrow y(y+1) - x(x-1) + 2(y-x+1) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (y+x+2)(y-x+1) = 0. \end{aligned}$$

Так как x и y — положительные числа, первый множитель положителен, поэтому второй множитель равен нулю, т.е. $x = y + 1$. Значит, $x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = 1$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

Ответ: а) $y = 1 + x + 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$; $y = 1 - 3x + 2m$, где $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

б) 49 пар.

Решение. Уравнение системы равносильно каждому из следующих:

$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi(x+y)) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0,$$

откуда $\frac{\pi}{2}(y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или $\frac{\pi}{2}(3x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнению удовлетворяют все такие (x, y) , что либо $y = 1 + x + 2k$, либо $y = 1 - 3x + 2m$, где k и m — целые. Заметим, что для целых x, y все точки, описываемые равенством $y = 1 - 3x + 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, уже встречаются среди точек вида $y = 1 + x + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ (достаточно взять $k = m - x$).

Рассмотрим теперь неравенство системы. По определению функций $\arcsin t$ и $\arccos t$ сумма $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$ всегда лежит в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, поэтому неравенство задаёт ограничения $x \in [-5, 5]$, $y \in [-4, 4]$ (из областей определения арккосинуса и арксинуса), а также $(x, y) \neq (5, -4)$ (в этой точке неравенство обращается в равенство).

Итак, остаётся подсчитать количество точек внутри прямоугольника $-5 \leq x \leq 5$, $-4 \leq y \leq 4$ без угловой точки $(x, y) = (5, -4)$, лежащих на прямых $y = x + 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Несложно видеть, что при чётных x в прямоугольник попадает по 4 точки, а при нечётных x — по 5 точек, за исключением $x = 5$. Тогда получаем суммарно $5 \times 5 + 4 \times 6 = 49$ точек.

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

Ответ: 6.

Решение. Пусть всего одиннадцатиклассников N человек, а в конце месяца будет выделено $m > 4$ билетов. Количество способов распределить 4 билета между учениками в начале месяца равно C_N^4 , а количество способов распределения билетов, когда Петя и Вася попадают на концерт, равно C_{N-2}^2 (Петя и Вася получают билеты, а ещё два билета распределяются между оставшимися $N - 2$ учениками). Значит, вероятность обоим ученикам попасть на концерт в начале месяца была равна

$$\frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{(N-2)! 4! (N-4)!}{2! (N-4)! N!} = \frac{12}{N(N-1)}.$$

Аналогично получаем, что вероятность, что Петя и Коля оба попадут на концерт в конце месяца, равна

$$\frac{C_{N-2}^{m-2}}{C_N^m} = \frac{(N-2)! (N-m)! m!}{(m-2)! (N-m)! N!} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}.$$

Следовательно, вероятность увеличилась в $\frac{m \cdot (m-1)}{12}$ раз (эта величина не зависит от N). Отсюда получаем, что $\frac{m \cdot (m-1)}{12} = \frac{5}{2}$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $m = 6$.

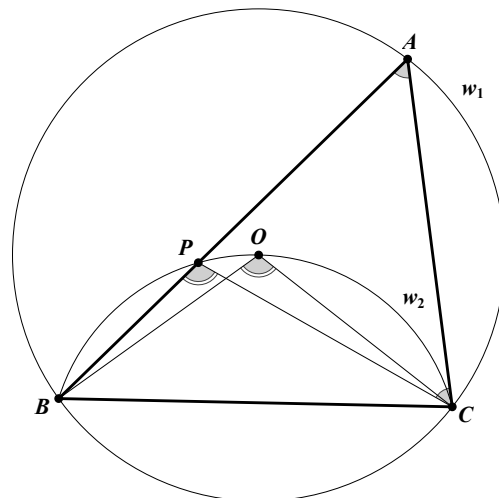
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

Ответ: 45.

Решение. Углы BAC и BOC — это центральный и вписанный углы для окружности ω_1 , опирающиеся на дугу BC . Значит, $\angle BOC = 2\angle BAC$. Кроме того, углы BOC и BPC вписаны в окружность ω_2 и опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны между собой.

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, а по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = \alpha$. Следовательно, треугольник ACP равнобедренный, $CP = AP = \frac{15}{2}$. Из этого треугольника

находим, что $\sin \alpha = \frac{\sqrt{4AP^2 - AC^2}}{2AP} = \frac{4}{5}$, и тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 45$.



6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

Ответ: $M = 5\pi + 16$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. $\Phi(\alpha)$ — это две части круга ω с центром в точке $O(0; 0)$ и радиуса $R = 5$, отсекаемые хордами AB и CD , лежащими на прямых с уравнениями $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$ соответственно. Хорды пересекаются в точке $N(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha)$, которая принадлежит ω , так как $|ON|^2 = (3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 18 < 25 = R^2$. Эта точка N является единственной общей точкой двух частей $\Phi(\alpha)$.

Периметр $\Phi(\alpha)$ равен $\Sigma_1 + \Sigma_2$, где Σ_1 — сумма длин дуг AC и BD , Σ_2 — сумма длин хорд AB и CD . Угол между AB и CD равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\Sigma_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R = 5\pi.$$

Расстояния от точки O до AB и CD равны $\rho_1 = |3\sqrt{2} \sin \alpha|$ и $\rho_2 = |3\sqrt{2} \cos \alpha|$ соответственно, поэтому, используя неравенство $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ о среднем квадратическом и среднем арифметическом, получаем

$$\frac{\Sigma_2}{4} = \frac{\sqrt{R^2 - \rho_1^2} + \sqrt{R^2 - \rho_2^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{2R^2 - (3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 - (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2}{2}} = 4.$$

Равенство достигается при

$$\sqrt{R^2 - \rho_1^2} = \sqrt{R^2 - \rho_2^2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \Leftrightarrow |\sin \alpha| = |\cos \alpha| \Leftrightarrow |\operatorname{tg} \alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\Sigma_2 = 16$, а $M = \max(\Sigma_1 + \Sigma_2) = 5\pi + 16$.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

Ответ: $60 - 24\sqrt{6}$.

Решение. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — нижнее, а $B_1B_2 \dots B_n$ — верхнее основание данной усечённой пирамиды; O и O_1 — центры этих оснований (соответственно); M и M_1 — середины рёбер A_1A_2 и B_1B_2 (соответственно). Из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых к шару из одной точки, следует, что

$$MM_1 = MO + M_1O_1$$

и

$$A_1B_1 = A_1M + B_1M_1; \quad MO = A_1M \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad M_1O_1 = B_1M_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n},$$

следовательно,

$$MM_1 = (A_1M + B_1M_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = A_1B_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Но $MM_1 < A_1B_1$, то есть

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} < 1 \Rightarrow \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow n < 4.$$

Поэтому данная в условии усечённая пирамида треугольная. Обозначим длину ребра нижнего основания через a , верхнего — через b . Так как шар Ω касается всех рёбер пирамиды, её боковая грань $A_1A_2B_2B_1$ — описанная равнобокая трапеция с основаниями a и b .

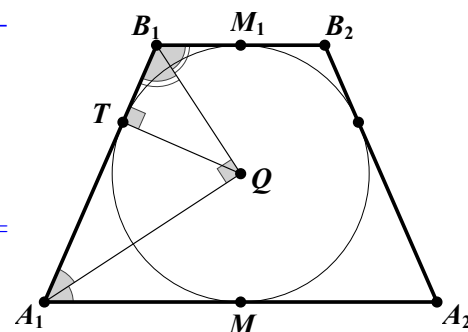
Радиус вписанной окружности найдем из прямоугольного треугольника A_1QB_1 :

$$QT^2 = A_1T \cdot B_1T = A_1M \cdot B_1M_1 = \frac{ab}{4},$$

$QT = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, следовательно, $MM_1 = \sqrt{ab}$. Но $MM_1 = MO + M_1O_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{b}{2\sqrt{3}}$, поэтому $\frac{a+b}{2\sqrt{3}} = \sqrt{ab}$.

Имеем $(a+b)^2 = 12ab$, откуда $\frac{b}{a} = 5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$ (так как $a > b$). Значит,

$$\frac{S_{\text{бок}}}{S_{A_1A_2A_3}} = \frac{3 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot MM_1}{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{3}(2\sqrt{3ab})\sqrt{ab}}{a^2} = 12\frac{b}{a} = 60 - 24\sqrt{6}.$$



Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования — баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего. За грубые ошибки могут быть сняты дополнительные баллы.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(3 балла)** Показано, что $A = x \cdot 11 \cdot 101$ — 1 балл;

- получено, что $B = \overline{x0x}$, $C = \overline{yy}$ — 1 балл;
 - найдены все тройки чисел $(A; B; C)$ — 1 балл
 - утверждается, что таких троек чисел $(A; B; C)$ не существует — не более 1 балла за задачу;
 - получены посторонние или потеряны подходящие тройки чисел — снять 1 балл за каждую.
-

2. **(3 балла)** Из равенства $K(x; y) = K(x - a; y + a)$ получено соотношение на x и y вида $x = y + \beta$ — 2 балла;

- ответ содержит бесконечное количество значений M — не более 1 балла за задачу.
-

3. **(5 баллов)** Решён пункт а) — 2 балла;

- неверно решено элементарное тригонометрическое уравнение или ошибка в основных тригонометрических формулах — 0 баллов за задачу;
- решён пункт б) — 3 балла;

если при этом пункт а) не решён — 2 балла вместо 3 за пункт б);

- решено неравенство пункта б) (то есть указаны промежутки значений для каждой из переменных, и отмечено, что надо отбросить одну из точек) — 1 балл;
 - ответ отличается от правильного на 1 — снять 1 балл;
 - ответ отличается от правильного более чем на 1 — не более 1 балла за пункт б).
-

4. **(4 балла)** Выражена вероятность попасть на концерт в начале месяца и в конце месяца — 1 балл;

- отношение вероятностей записано и упрощено (полученное уравнение не содержит числа одиннадцатиклассников) — 2 балла;
- найдено количество билетов — 1 балл;
- в ответ входит неизвестное число N — 0 баллов за задачу;
- комбинаторная ошибка: в полученной формуле для подсчёта вероятности значение не равно 1 при количестве билетов, равном количеству школьников — 0 баллов за задачу;
- разбор (или не разбор) случаев, когда число билетов больше числа одиннадцатиклассников, не оценивается.

5. (5 баллов) Доказано, что треугольник ACP равнобедренный — 2 балла.

- Найден $\angle BAC$ или тригонометрическая функция этого угла — 1 балл.
-

6. (6 баллов) Изображена фигура $\Phi(\alpha)$ хотя бы для одного значения α — 1 балл;

— при этом за построение круга, заданного вторым неравенством системы, баллы не добавляются;

- построена фигура Φ (или приведено её корректное описание), а других продвижений нет — 1 балл за задачу;

- найдена сумма длин дуг, входящих в периметр — 2 балла;

если фигура Φ при этом не построена, построена неверно или приведено неверное её описание, то 1 балл вместо двух.

- сумма длин хорд выражена как функция одного параметра — 1 балл;
 - найдено максимальное значение суммы длин хорд — 1 балла;
 - найдены все требуемые α — 1 балл.
-

7. (6 баллов) Доказано, что пирамида треугольная — 3 балла;

- найдено искомое отношение или искомый угол — 3 балла

если при этом не доказано, что пирамида треугольная, а только разбирается этот частный случай — 2 балла вместо 3.