

9 класс

Второй день

- 9.5. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, а точки A_1 и A_2 — соответственно вершины парабол $y = P_1(x)$ и $y = P_2(x)$. Через $m(g(x))$ будем обозначать наименьшее значение функции $g(x)$. Известно, что разности $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ и $m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x))$ оказались равными положительными числами. Найдите угол между прямой A_1A_2 и прямой, содержащей ось Ox .
- 9.6. Петя выбрал 100 попарно различных положительных чисел, меньших 1, и расставил их по кругу. Затем он проделывает с ними операции. За одну операцию можно взять три стоящих подряд (именно в таком порядке) числа a, b, c и заменить число b на $a - b + c$. При каком наибольшем k Петя мог выбрать исходные числа и сделать несколько операций так, чтобы после них среди чисел оказалось k целых?
- 9.7. В строку выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 60$ (ровно в таком порядке). Игорь и Руслан по очереди ставят знаки $+$, $-$ и $\times$ между ними, начинает Игорь; за ход каждый ставит один знак. Когда между каждыми двумя соседними числами поставлен знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно делится на 3, то победа присуждается Игорю, иначе Руслану. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника?
- 9.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке $A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2$. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2 , равны.

10 класс

Второй день

- 10.5. Дано натуральное число n . Натуральные числа $1, 2, \dots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n - 1$ выписанных на листке чисел?
- 10.6. При каком наименьшем k для любого многочлена $f(x)$ степени 100 с вещественными коэффициентами найдётся такой многочлен $g(x)$ степени не выше k с вещественными коэффициентами, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют ровно 100 общих точек?
- 10.7. В программу соревнования входит 25 видов спорта, в каждом из которых определяется один победитель, получающий золотую медаль. В соревновании участвуют 25 спортсменов, каждый — во всех 25 видах спорта. Имеется 25 экспертов, каждый из которых должен сделать *прогноз*, сколько золотых медалей получит каждый спортсмен, при этом в его прогнозе количества медалей должны являться целыми неотрицательными числами с суммой 25. Эксперта признают *компетентным*, если он верно угадает количество золотых медалей хотя бы у одного спортсмена. При каком наибольшем k эксперты могут сделать такие прогнозы, что хотя бы k из них будут признаны компетентными независимо от исхода соревнования?
- 10.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке $A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2$. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2 , равны.

11 класс

Второй день

- 11.5. Дано натуральное число n . Натуральные числа $1, 2, \dots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n - 1$ выписанных на листке чисел?
- 11.6. По кругу выписаны 100 единиц. Петя и Вася играют в игру, каждый делает по 10^{10} ходов. Петя каждым своим ходом выбирает 9 стоящих подряд чисел и уменьшает каждое из них на 2. Вася каждым своим ходом выбирает 10 стоящих подряд чисел и увеличивает каждое из них на 1. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Докажите, что Вася сможет действовать так, чтобы после каждого его хода среди 100 выписанных чисел было не менее пяти положительных, как бы ни играл Петя.
- 11.7. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность Ω . В треугольники DAB, ABC, BCD, CDA вписаны окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ соответственно. Проведены общие внешние касательные к окружностям ω_a и ω_b , ω_b и ω_c , ω_c и ω_d , ω_d и ω_a , не содержащие сторон четырёхугольника $ABCD$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на четырёх проведённых прямых (именно в таком порядке), вписан в окружность Γ . Докажите, что прямые, соединяющие центры окружностей ω_a и ω_c , ω_b и ω_d , Ω и Γ , пересекаются в одной точке.
- 11.8. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. *Хордой* будем называть отрезок целой длины, параллельный оси абсцисс, концы которого лежат на графике функции f . Известно, что у графика функции f ровно N хорд, причём среди них есть хорда длины 2025. Найдите наименьшее возможное значение N .