

9 класс, ВАРИАНТ 13

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$.

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(|x - 3| - 1)^2}{2(x^2 - 2x) + |x^2 - 2x|} \leq 0.$$

Знаменатель представляет собой выражение вида $2a + |a|$. Заметим, что знак этого выражения совпадает со знаком a при любых a . Действительно, если $a > 0$, то $2a + |a| = 3a > 0$, а если $a < 0$, то $2a + |a| = a < 0$. Учитывая также, что числитель дроби неотрицателен при всех значениях переменной, имеем

$$\frac{(|x - 3| - 1)^2}{x^2 - 2x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 3| - 1 = 0, \\ x^2 - 2x \neq 0, \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ или } x = 4, \\ x \neq 0 \text{ и } x \neq 2, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$$

Итак, $x \in (0; 2) \cup \{4\}$.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Ответ: 49.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC . Пусть его биссектриса AN и медиана BM пересекаются в точке O . В треугольнике ABM отрезок AO является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM = BM$.

Обозначим $AB = y$, $y \in \mathbb{Z}$. Тогда $AM = MC = y$. По свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому если $BN = x$, то $CN = 2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, т.е. $3(x + y) = 600$, откуда $y = 200 - x$, поэтому $x \in \mathbb{Z}$. Учтём неравенство треугольника:

$$\begin{cases} 2y < y + 3x, \\ 3x < y + 2y, \\ y < 2y + 3x. \end{cases} \Leftrightarrow x < y < 3x.$$

Так как $y = 200 - x$, то $x < 200 - x < 3x \Leftrightarrow 50 < x < 100$. На этом интервале содержится 49 целых значений x .

Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника $(a; b; c)$ не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x < y < 3x$ заключаем, что из сторон треугольника y , $2y$ и $3x$ сторона y – наименьшая. Тогда по заданному значению y вся тройка $(a; b; c)$ восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно y , ещё одно равно $2y$, а третье равно $p - y - 2y$ (где p – периметр). Поэтому две различные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями y .

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}, -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right), (4; 1)$.

Решение. Первое уравнение при условии $x - 2y \geq 0$ равносильно уравнению $(x - 2y)^2 = xy$, откуда $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$, $(x - y)(x - 4y) = 0$, т.е. $x = y$ или $x = 4y$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $x = y$, то $y^2 + y - 5 = 0$, и получаем две пары $y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ и $x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

Если $x = 4y$, то $y^2 + 4y - 5 = 0$, откуда также имеем две пары $y = 1$, $x = 4$ и $y = -5$, $x = -20$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geq 2y$ удовлетворяют только две из них: $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}, -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right), (4; 1)$.

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

Ответ: 4:3.

Решение. Пусть отрезки BO и AC пересекаются в точке N . Так как треугольник ABC равнобедренный, а BO является биссектрисой угла B , то биссектриса BN треугольника ABC является также его медианой и высотой. Пусть $\angle AON = \alpha$. Поскольку $OA \parallel CH$, то $\angle ACH = \alpha$. Отметим, что этот угол вписан в окружность и опирается на дугу AD , поэтому $\widehat{AD} = 2\alpha$. По теореме об угле между касательной и секущей $\angle DAH = \frac{1}{2} \widehat{AD} = \alpha$. Кроме того, $\angle ABO = 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} AB &= AO \operatorname{ctg} \alpha = 4 \operatorname{ctg} \alpha; \\ AN &= AO \cos \alpha = 4 \cos \alpha; AC = 2AN = 8 \cos \alpha; \\ AH &= AC \sin \alpha = 8 \cos \alpha \sin \alpha; \\ DH &= AH \operatorname{tg} \alpha = 8 \sin^2 \alpha; \\ CH &= AC \cos \alpha = 8 \cos^2 \alpha; \\ AB : CH &= 4 \operatorname{ctg} \alpha : (8 \operatorname{ctg}^2 \alpha) = 1 : (2 \sin \alpha \cos \alpha); \\ S_{\triangle ABD} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH = \frac{1}{2} \cdot 4 \operatorname{ctg} \alpha \cdot 8 \sin^2 \alpha = 16 \cos \alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

Так как по условию площадь треугольника ABD равна 6, откуда получаем $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$, и искомое отношение $AB : CH$ равно 4 : 3.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

Ответ: $AD : AC = 1 : 3$, $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Из точек C и E отрезок BD виден под углом 90° , поэтому точки B, C, D, E лежат на одной окружности. Но тогда $\angle CBD$ и $\angle CED$ вписаны в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу, а значит, равны между собой, т.е. $\angle CBD = 30^\circ$. Следовательно, $CD = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Тогда $AD = AC - CD = \frac{\sqrt{7}}{3}$, и $AD : AC = 1 : 3$.

Вычислим площадь треугольника ADE . Обозначим его угол при вершине A через α . Далее находим: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$; $\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AD \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: $5\pi - 4$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. Если обозначить $2x = a$, $y = b$, $4 - 2x - y = c$, то неравенство принимает вид $|a| + |b| + |c| > a + b + c$. Это неравенство не выполнено тогда и только тогда, когда все три числа a , b , c неотрицательны. Действительно, $|p| \geq p$ при всех p , причём при $p \geq 0$ выполняется равенство, а при $p < 0$ – строгое неравенство. Значит, первое неравенство системы **не** выполнено при $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $4 - 2x - y \geq 0$. Эти три неравенства определяют треугольник с вершинами в точках $A(2; 0)$, $B(0; 4)$, $O(0; 0)$.

Второе неравенство может быть записано в виде $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$ – оно задаёт круг радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке $M(1; 2)$. Заметим, что точка M является серединой гипотенузы AB треугольника, AOB , а радиус круга равен половине гипотенузы. Это означает, что круг описан около треугольника AOB . Пересечением двух множеств является круг с центром M радиуса $\sqrt{5}$ с вырезанным из него треугольником ABO . Площадь этой фигуры равна $\pi(\sqrt{5})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 5\pi - 4$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 145.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x , y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = 3 + 5 = 8$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [1; 18]$ и записываем их в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	7	11	7	13	9	8	8	17	8

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 18 вариантов.

- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 5$. В таблице есть 2 аргумента, при которых $f = 1$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 2 способами, а второй – 1 способом. Значит, количество пар такого типа равно $2 \cdot 1 = 2$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 6$. Аналогично предыдущему пункту получаем $2 \cdot 1 = 2$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 7$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 8$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.

Итого, есть $18 + 2 + 2 + 6 + 6 = 34$ пары натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $18^2 = 324$ пары, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{324-34}{2} = 145$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(2 балла)** Неэквивалентное преобразование неравенства – 0 баллов за всю задачу;

доказано, что числитель неотрицателен при всех x – 1 балл;

ответ отличается от верного одной точкой – снять 1 балл;

ответ отличается от верного двумя или тремя точками – снять 2 балла.

2. **(4 балла)** Установлено, что одна сторона треугольника вдвое больше другой – 1 балл;

получена система линейных неравенств с одной переменной (выписаны неравенства треугольника) – 1 балл;

получено двойное неравенство на переменную и посчитано количество треугольников – 2 балла; если при этом количество отличается от верного на 1 или на 2, то – 1 балл вместо 2;

ответ отличается от верного более чем на 2 – не более 2 баллов за задачу;

в неравенстве треугольника записаны нестрогие неравенства вместо строгих – не более 1 балла за задачу (он может быть поставлен за соотношение между сторонами треугольника).

3. **(4 балла)** Получено только одно линейное соотношение между x и y – 1 балл;

получены два линейных соотношения между x и y – 2 балла;

найжены решения системы для каждого линейного соотношения – по 1 баллу за соотношение;

приобретены лишние решения (не сделан отбор корней) или потеряны решения (за счёт того, что выражения вида $\sqrt{ab}$ заменено выражением $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, и при этом не учтён случай, когда оба числа a, b неположительны – не более 2 баллов за задачу.

4. **(5 баллов)** Найдена одна пара подобных треугольников, а других существенных продвижений нет – 1 балл за задачу;

показано подобие трёх прямоугольных треугольников – 3 балла;

найдено отношение – 2 балла.

5. **(5 баллов)** Найдено отношение – 2 балла;

найжена площадь треугольника – 3 балла.

Доказано, что $\angle CBD = \angle CED$ и других продвижений нет – 1 балл за задачу.