

ВАРИАНТ 13. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 5$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{13}$.

Решение. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Так как FM и EN – медианы треугольников AFH и CEH , то $HM = AM = FM = 2$, $CN = EN = HN = 5$. Обозначим $\angle AHF = \angle CHE = \alpha$. Тогда $\angle EHF = 180^\circ - \alpha$, $\angle EBF = \alpha$ (так как в четырёхугольнике $BFHE$ углы E и F прямые). Далее находим: $\angle MFH = \alpha$ (треугольник MFH равнобедренный), $\angle NEH = \alpha$ (треугольник NEH равнобедренный), $\angle ENH = 180^\circ - 2\alpha$. Поскольку $EN \parallel FM$, углы MFH и NEH равны как накрест лежащие, откуда $\alpha = 180^\circ - 2\alpha$ и $\alpha = 60^\circ$. Таким образом, $\angle ABC = \alpha = 60^\circ$.

В треугольнике ACH известно, что $CH = 10$, $AH = 4$, $\angle AHC = 120^\circ$. По теореме косинусов находим, что $AC^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 100 + 16 + 40 = 156$, $AC = 2\sqrt{39}$. Отсюда радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{2\sqrt{39}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$.

Треугольник BCF – прямоугольный с углом 60° при вершине B , и при этом $HF = 2$, $CF = CH + HF = 12$. Значит, $BC = \frac{CF}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{0.5\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$. Кроме того, $AH = 4$, $HE = 5$, $AE = 9$, поэтому $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 9 = 36\sqrt{3}$.

2. [5 баллов] На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 477. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 477. Какие числа могли быть написаны на доске?

Ответ: 13, 14, 16, 31 или 13, 30, 31.

Решение. Пусть на доске написано n чисел $x_1 < \dots < x_n$ ($n \geq 2$). Тогда $32x_1 + \dots + x_n = x_1 + \dots + 14x_n = 477$. Вычитая из обеих частей этого равенства сумму $(x_1 + \dots + x_n)$, получим $31x_1 = 13x_n$. Так как числа 31 и 13 взаимно просты, то $x_1 = 13k$, $x_n = 31k$. Если $k \geq 2$, то $32x_1 + \dots + x_n > 32x_1 \geq 32 \cdot (13 \cdot 2) > 477$, что невозможно. Поэтому $k = 1$, откуда $x_1 = 13$, $x_n = 31$.

Тогда $32x_1 + x_n = 32 \cdot 13 + 31 = 447$, и сумма оставшихся чисел равна $477 - 447 = 30$, причём оставшиеся числа больше 13 и меньше 31. Если это число одно, то оно равно 30. Если их два, то различные натуральные числа с суммой 30 – это только 14 и 16. Больше двух чисел быть не может, так как их сумма превосходит $13 \cdot 3 = 39$.

3. [6 баллов] На плоскости Oxy даны точка A , координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B , заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y = 1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} (y^2 + 2(x-a)y) + 2x^2 - 6ax + 5a^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y^2 + 2 \cdot y \cdot (x-a) + (x-a)^2) - (x-a)^2 + 2x^2 - 6ax + 5a^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y+x-a)^2 + x^2 - 4ax + 4a^2 &= 0 \Leftrightarrow (y+x-a)^2 + (x-2a)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $y+x-a=0$ и $x-2a=0$, т.е. $x_A = 2a$, $y_A = -a$.

Так как второе уравнение задаёт окружность, то $a \neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $x^2 + y^2 - 8x - 2ay + \frac{12y}{a} + a^2 + \frac{36}{a^2} = 0$, откуда далее $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y(\frac{6}{a} - a) + (\frac{6}{a} - a)^2) + a^2 + \frac{36}{a^2} = 16 + (\frac{6}{a} - a)^2$, и окончательно $(x-4)^2 + (y + \frac{6}{a} - a)^2 = 4$. Значит, координаты точки B следующие: $x_B = 4$, $y_B = a - \frac{6}{a}$.

Для того, чтобы точки A и B лежали по разные стороны от прямой $y = 1$, необходимо и достаточно, чтобы их ординаты удовлетворяли неравенству $(y_A - 1)(y_B - 1) < 0$, то есть $(-a - 1)\left(\frac{a^2-6}{a} - 1\right) < 0$. Отсюда $(a + 1)\left(\frac{a^2-6-a}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{(a+1)(a+2)(a-3)}{a} > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

Замечание. Для решения задачи достаточно найти ординаты точек A и B .

4. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}), (-\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}), (\sqrt{3}; \pm\sqrt{2}), (-\sqrt{3}; \pm\sqrt{2})$.

Решение. Введём новые переменные $u = x^2 + y^2, v = x^2y^2$. Тогда $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = u^2 - 2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases} 3u - 2v = 3, \\ u^2 - 2v + \frac{2}{3}v = 17. \end{cases}$$

Из первого уравнения $v = \frac{3u}{2} - \frac{3}{2}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$u^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{3u}{2} - \frac{3}{2}\right) = 17 \Leftrightarrow u^2 - 2u - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5, \\ u = -3. \end{cases}$$

Так как $u > 0$, то подходит только значение $u = 5$. Значит, $v = 6$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 - y^2, \\ (5 - y^2)y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \text{ и } x^2 = 2, \\ y^2 = 2 \text{ и } x^2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда следует, что система имеет 8 решений: $(\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}), (-\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}), (\sqrt{3}; \pm\sqrt{2}), (-\sqrt{3}; \pm\sqrt{2})$.

5. [5 баллов] У фокусника есть набор из 12^2 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 12. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 1386.

Решение. Так как в наборе 12^2 карточек, у фокусника есть всевозможные варианты карточек (для каждой пары чисел $(i; j)$, где $1 \leq i \leq 12, 1 \leq j \leq 12$ найдётся карточка, у которой на красной стороне написано число i , а на синей – j). Рассмотрим два вида наборов карточек.

1) Обе карточки являются дублями. Количество способов выбрать пару карточек равно

$$C_{12}^2 = \frac{12(12-1)}{2} = 66.$$

2) Только одна из карточек является дублем. Тогда её можно выбрать 12 способами, после чего вторую карточку можно выбрать любую за исключением: (а) всех дублей (таковых 12, с учётом уже выбранной карточки), (б) всех карточек, имеющих тот же номер на красной стороне, что и выбранный дубль (таких 11, помимо выбранной карточки), (в) всех карточек, имеющих тот же номер на синей стороне, что и выбранный дубль (также 11). Итак, вторую карточку можно выбрать $12^2 - 12 - 11 - 11 = 110$ способами. Значит, в этом случае имеем $12 \cdot 110 = 1320$ способов выбрать пару карточек.

Итак, всего есть $66 + 1320 = 1386$ способов.

6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 3$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{19}{25}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, поэтому вокруг неё можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $COdT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180° , и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω . Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу),}$$

$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT),$$

$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая).}$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60° , поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABT находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 = 19$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим по формуле полупроизведения диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 19 : 25$.