

ВАРИАНТ 17

1. [5 баллов] S – сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{12} > S + 1$, $a_7 a_{11} < S + 17$. Укажите все возможные значения a_1 .

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$.

Решение. Обозначим разность прогрессии через d . Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1, \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > S + 1, \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < S + 17. \end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $5d^2 < 16$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d = 1$. Тогда $a_{10} = a_1 + 9$ и $S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9) = 10a_1 + 45$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1, \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0, \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3, \\ a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}). \end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

Ответ: $\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$.

Решение. Пусть E – середина AB . CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD , а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE , следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 1$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$, $DE = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α .

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α . Угол $\angle AHB = 90^\circ$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников AHC и BCH . Тогда $AH = BH = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$, $DH = \sqrt{36 - 2} = \sqrt{34}$.

Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α , то $CD = DH - CH = \sqrt{34} - \sqrt{23}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α , то $CD = DH + CH = \sqrt{34} + \sqrt{23}$.

3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x; y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq \min(2a + 2b; 2). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 2a + 2b \\ a^2 + b^2 \leq 2. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq 2a + 2b, \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2 + (b-y)^2 \leq 2, \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a; b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса $\sqrt{2}$ с центрами $P(x; y), B(1; 1), A(0; 0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (1) должна иметь решение относительно $(a; b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3 , пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F , представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD . Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x; y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{2}$ от фигуры F . (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{2}$, центры которых принадлежат фигуре F .)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C ; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D . Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP ,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP ,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT .

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT} + S_{QBR} + S_{PCQ} + S_{RDT} - S_{ACBD} = 2 \cdot \frac{\pi (2\sqrt{2})^2}{3} + 2 \cdot \frac{\pi (\sqrt{2})^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 = 6\pi - \sqrt{3}.$$

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}. \end{cases}$$

Ответ: 7560.

Решение. Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a , b , c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a; b; c) = 2^{\max(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)} \cdot 3^{\max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a; b; c) = 2^{\min(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)} \cdot 3^{\min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 15, \\ \min(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 16, \\ \min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим первую систему (2). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$:

$(1; 1; 15)$ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);

$(1; 15; 15)$ – также три набора;

$(1; k; 15)$, где $2 \leq k \leq 14$ – есть 13 различных значений k ,

и для каждого из них 6 перестановок – всего 78 вариантов.

Итак, есть $3 + 3 + 6 \cdot 13 = 84$ способа выбрать тройку чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ есть $3 + 3 + 6 \cdot 14 = 90$ способов, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $84 \cdot 90 = 7560$.

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

Ответ: $x = 2$.

Решение. Из условия следует, что функции $4x+1$, $\frac{x}{2}+2$, $5x-1$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. Тогда

$$\begin{aligned} abc &= \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \cdot \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \\ &= 2 \log_{5x-1}(4x+1) \cdot 2 \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \frac{\log_{4x+1}(5x-1)}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)} = 4. \end{aligned}$$

По условию числа $(a; b; c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a = b \text{ и } a = c + 1; \quad (3)$$

$$b = c \text{ и } c = a + 1; \quad (4)$$

$$c = a \text{ и } a = b + 1. \quad (5)$$

Рассмотрим случай (3). Подставляя $b = a$ и $c = a - 1$ в полученное выше уравнение $abc = 4$, имеем $a \cdot a \cdot (a - 1) = 4$, откуда $a^3 - a^2 - 4 = 0$, $(a - 2)(a^2 + a + 2) = 0$. Так как многочлен $a^2 + a + 2$ не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a = 2$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$. Случаи (4) и (5) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, либо $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a; b; c)$ найдём x .

Если $c = 1$, то $5x - 1 = \frac{x}{2} + 2$, то есть $x = \frac{2}{3}$. Поэтому $a = 2 \log_{\frac{2}{3}} \frac{11}{3} \neq 2$, то есть значений x , при которых $a = b = 2$, $c = 1$, не существует.

Если $a = 1$, то $4x + 1 = \sqrt{5x - 1}$. Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем уравнение $16x^2 + 3x + 2 = 0$, которое не имеет корней, поэтому случай $a = 1$, $b = c = 2$ также не подходит.

Если $b = 1$, то $\left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 = 4x + 1$. Это уравнение эквивалентно уравнению $x^2 - 8x + 12 = 0$, корнями которого являются $x = 2$ и $x = 6$, но $x = 6$ не подходит, так как в этом случае $a = \log_{\sqrt{29}} 25 \neq 2$. Значение $x = 2$ подходит: $a = \log_{\sqrt{9}} 9 = 2$, $c = \log_3 9 = 2$.

Итак, $x = 2$ – единственное решение задачи.

6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A , O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 4.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{7}{5}$. Найдите AC .

Ответ: а) $S_{ABC} = 25$; б) $AC = \frac{50}{\sqrt{42}}$.

Решение. Так как прямые $ТС$ и $ТА$ – касательные к ω , они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P , поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C . Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P , их площади относятся как основания, т.е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 4 : 6 = 2 : 3$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{5}{2}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 4 = 25$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP . Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 2 : 3$. Пусть $CP = 2y$; тогда $AP = 3y$.

Из дополнительного условия $\beta = \arctg \frac{7}{5}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\cos 2\beta &= \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1 - \left(\frac{7}{5}\right)^2}{1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = -\frac{12}{37}; \\ \sin 2\beta &= \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{12}{37}\right) \left(1 - \frac{12}{37}\right)} = \sqrt{\frac{49 \cdot 25}{37^2}} = \frac{35}{37}.\end{aligned}$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 3y \cdot \frac{35}{37} = \frac{105}{37} y^2$, откуда получаем $\frac{105y^2}{37} = 10$, $y^2 = \frac{74}{21}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (2y)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3y \cdot \cos 2\beta = 13y^2 + 12y^2 \cdot \frac{12}{37} = \frac{625y^2}{37} = \frac{625 \cdot 74}{37 \cdot 21}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$.