

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!



Время выполнения заданий — 240 минут.

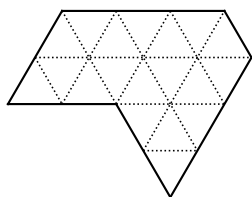
Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 10.1. (15 баллов) Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, оба степени n со старшими коэффициентами 1. У каждого из них ровно n различных целых корней. Известно, что все корни многочлена $P(x)$ чётны, а все корни многочлена $Q(x)$ нечётны. Докажите, что у многочлена $P(x) + Q(x)$ не может быть целых корней.

Задача 10.2. (15 баллов) Дана двусторонняя линейка без делений. Этот инструмент позволяет делать две операции: 1) провести прямую через две данные точки; 2) провести прямую, параллельную данной, на расстоянии 1 от нее. Постройте с её помощью (и не используя никакие другие инструменты) правильный треугольник.

Задача 10.3. (15 баллов) На плоскости отмечено 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Между каждыми двумя проведён либо красный, либо синий отрезок. Красные отрезки не имеют общих точек, кроме, возможно, отмеченных точек. Обязательно ли найдётся треугольник с вершинами в отмеченных точках, все стороны которого синие?

Задача 10.4. (15 баллов) Разрежьте фигуру, составленную из одинаковых равносторонних треугольников (см. рисунок), на три (не обязательно равные) части и сложите из них равносторонний треугольник.



Задача 10.5. (20 баллов) По кругу стоит несколько коробок. В одной из них 2025 камней, а остальные пусты. Разрешается взять два камня (возможно, из разных коробок) и переложить один в соседнюю коробку по часовой стрелке, а другой — в соседнюю против часовой стрелки. Через некоторое время все камни оказались в одной и той же коробке, соседней с начальной. Докажите, что один из камней побывал во всех коробках.

Задача 10.6. (20 баллов) Существует ли функция f , определённая на всей числовой прямой, такая, что для любого x выполнено равенство $f(f(x)) = x^2 - x - 1$?